

Аналитический расчет величины прогиба балочной фермы со сложной решеткой

Кирсанов Михаил Николаевич
НИУ «МЭИ»
Профессор

Арутюнян Виктория Борисовна
НИУ «МЭИ»
студент

Аннотация

Плоская статически определимая ферма рассчитывается прогиб середины пролета. Ферма равномерно загружается по узлам верхнего пояса. Выводится аналитическая зависимость прогиба фермы от числа панелей, размеров, и нагрузки. Применяется метод вырезания узлов и индуктивный метод для обобщения решения на произвольное число панелей. Используются специальные операторы системы компьютерной математики Maple.

Ключевые слова: ферма, интеграл Мора, прогиб, индукция, Maple

Analytical calculation of the deflection of a beam truss with a complex grid

Kirsanov Mikhail Nikolaevich
NRU «MPEI»
Professor

Arutyunyan Victoria Borisovna
NRU «MPEI»
Student

Abstract

A flat statically determinate truss is calculated by the deflection of the middle of the span. The truss is evenly loaded along the nodes of the upper belt. The analytical dependence of the deflection of the truss on the number of panels, dimensions, and loads is derived. The method of cutting out nodes and an inductive method are used to generalize the solution to an arbitrary number of panels. Special operators of the computer mathematics system Maple are used.

Keywords: truss, Mohr's integral, deflection, induction, Maple

Ферма (рис. 1) имеет n панелей в половине пролета и состоит из стержней длиной a в нижнем и верхнем поясе, стоек высотой h и раскосов

длиной $c = \sqrt{a^2 + h^2}$ и $d = \sqrt{a^2 + 4h^2}$. В рассматриваемой ферме число стержней — $k = 12n + 6$, включая три опорные стержня. Для расчета используем программу [1], позволяющую получать выражения для усилий в стержнях в аналитическом виде.

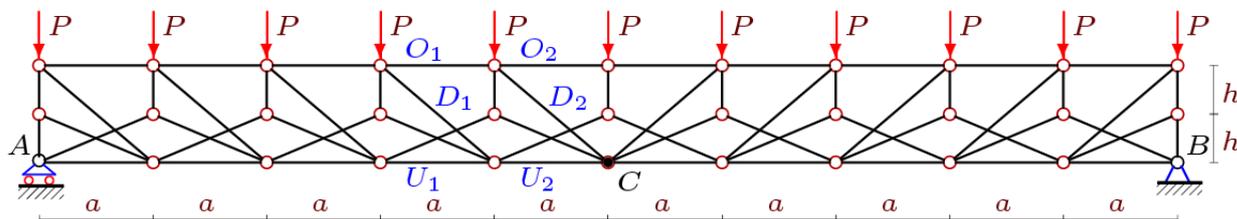


Рисунок 1 — Ферма при нагрузке сверху, $n=4$

В программу вводится структура решетки и координаты узлов. Приведем фрагмент программы на языке системы Maple ввода координат узлов нижнего и верхнего пояса (начало координат в левой опоре)

```
> for i to 2*n+1 do
>   x[i]:=a*(i-1); y[i]:=0;
>   x[i+2*n+1]:=x[i]; y[i+2*n+1]:=h;
>   x[i+4*n+2]:=x[i]; y[i+4*n+2]:=2*h;
> od:
```

Соединение узлов и стержней управляется векторами $N[i]$, содержащими номера концов соответствующего стержня. Соответствующий фрагмент программы для данной фермы имеет вид

```
> for i to 2*n do N[i]:=[i,i+1];
>   N[i+2*n]:=[i+4*n+2,i+4*n+3];
>   N[i+4*n]:=[i+1,i+2*n+1];
>   N[i+6*n]:=[i,i+2*n+2];
> od:
> for i to 2*n+1 do N[i+8*n]:=[i+4*n+2,i+2*n+1]; od:
> for i to n do N[i+10*n+1]:=[i+1,i+4*n+2];
>   N[i+11*n+1]:=[i+n,i+5*n+3];
od:
N[12*n+2]:=[1,2*n+2]:N[12*n+3]:=[4*n+2,2*n+1]:
```

Для вычисления прогиба используется интеграл Мора в виде:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{k-3} S_i^{(P)} S_i^{(1)} l_i / (EF).$$

Здесь обозначено: $S_i^{(P)}$ — усилия в стержнях от заданной нагрузки, l_i — длины стержней, $S_i^{(1)}$ — усилия от единичной силы, приложенной к середине нижнего пояса (на рисунке точка выделена), EF — жесткость стержней фермы. Индукция по 14 фермам дает формулу для прогиба вида

$$\Delta = P(C_1 a^3 + C_2 h^3 + C_3 c^3 + C_4 d^3) / (4h^2 EF).$$

Выявить общие члены последовательностей коэффициентов, полученных из расчетов отдельных ферм, позволяют операторы `rgf_findrecur` пакета `genfunc` системы `Maple`. Так для членов последовательности коэффициентов при h^3 получено линейное однородное рекуррентное уравнение пятого порядка

$$C_{2(n)} = C_{2(n-1)} + 2C_{2(n-2)} - 2C_{2(n-3)} - C_{2(n-4)} + C_{2(n-5)}.$$

Для коэффициента при a^3 уравнение сложнее:

$$C_{1(n)} = 3C_{1(n-1)} - C_{1(n-2)} - 5C_{1(n-3)} + 5C_{1(n-4)} + C_{1(n-5)} - 3C_{1(n-6)} + C_{1(n-7)}.$$

Оператор `rsolve` дает следующие выражения, замыкающие решение поставленной задачи

$$C_1 = (8(5n^4 + 6n^3 + 10n^2 + 6(-1)^n n) + 12((-1)^n - 9)) / 96,$$

$$C_2 = (4n^2 + ((-1)^n + 7)n - (-1)^n + 1) / 2,$$

$$C_3 = (2n^2 + 2((-1)^n + 1)n + (-1)^n - 1) / 2,$$

$$C_4 = (2n^2 + ((-1)^n - 1)n) / 4.$$

Методом индукции можно получить также выражения для усилий в некоторых (наиболее опасных) стержнях фермы (рис. 1):

$$O_1 = Pa(3 - n^2) / (4h), \quad O_2 = Pa(1 - n^2) / (4h),$$

$$D_1 = Pd / h, \quad D_2 = Pd / (2h), \quad U_1 = U_2 = Pa(n^2 + 3) / (4h).$$

Под действием нагрузки подвижная опора получает небольшое смещение. Рассчитать его значение можно также по формуле Максвелла-Мора, приложив в качестве единичной силы горизонтальную силу к подвижной опоре. Опуская выкладки, выпишем итоговую формулу

$$\delta = Pa^2(2n - 1)(n^2 + 2n + 3) / (6hEF).$$

В работах [2-8] аналогичные решения для плоских и пространственных ферм были получены также методом индукции. Обзор некоторых работ по аналитическому расчету прогиба плоских ферм выполнен в [8-10].

Библиографический список

1. Кирсанов М. Н. `Maple` и `Maplet`. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
2. Кирсанов М.Н. Анализ усилий и деформаций в корабельном шпангоуте, моделируемом фермой // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2017. Т. 9. № 3. С. 560–569.
3. Кирсанов М.Н. Статический анализ и монтажная схема плоской фермы // Вестник государственного университета морского и речного флота им.

- адмирала С.О. Макарова. 2016. № 5 (39). С. 61–68.
4. Кирсанов М.Н., Суворов А.П. Исследование деформаций плоской внешне статически неопределимой фермы // Вестник МГСУ. 2017. Т. 12, № 8 (107). С. 869–875.
 5. Кирсанов М.Н. Расчет прогиба плоской решетчатой фермы с четырьмя опорами // Транспортное строительство. 2017. №7. С.15–17.
 6. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба решётчатой балочной фермы распорного типа // Инженерно-строительный журнал. 2015. № 5 (57). С. 58–65.
 7. Кирсанов М.Н. Изгиб, кручение и асимптотический анализ пространственной стержневой консоли // Инженерно-строительный журнал. 2014. № 5 (49). С. 37-43.
 8. Осадченко Н.В. Расчёт прогиба плоской неразрезной статически определимой фермы с двумя пролётами // Постулат. 2017. №12. С. 28.
 9. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 66–73.
 10. Кийко Л.К. Аналитическая оценка прогиба арочной фермы под действием ветровой нагрузки // Научный вестник. 2016. № 1 (7). С. 247–254.