

Аналитическое решение задачи о прогибе внешне статически неопределимой фермы с произвольным числом панелей

Доманов Евгений Викторович

НИУ «МЭИ»

Студент

Аннотация

Ставится задача получения аналитической зависимости от числа панелей прогиба плоской симметричной фермы под действием равномерно распределенной по узлам верхнего пояса нагрузки. Предполагается, что стержни фермы упругие, жесткость стержней одинаковая, а шарниры идеальные. Методом индукции ряд решений для ферм с различным числом панелей обобщается на произвольный случай. Все преобразования выполнены в системе компьютерной математики Maple. Прогиб разыскивается по формуле Максвелла- Мора.

Ключевые слова: ферма, формула Максвелла - Мора, прогиб, индукция, Maple

An analytical solution of the problem of the externally statically indeterminate truss deflection with an arbitrary number of panels

Domanov Evgenii Viktorovich

NRU «MPEI»

Student

Abstract

The task is to obtain an analytical dependence on the number of panels of the deflection of a flat symmetrical truss under the action of a load uniformly distributed over the nodes of the upper belt. It is assumed that the rods of the truss are elastic, the stiffness of the rods is the same, and the hinges are ideal. By induction, a series of solutions for trusses with a different number of panels is generalized to an arbitrary case. All transformations are performed in the computer mathematics system Maple. The deflection is sought by the Maxwell-Mor formula.

Keywords: truss, Maxwell –Mohr's formula, deflection, induction, Maple

Externally statically indeterminate trusses are much more difficult for both numerical and analytical research. Forces in the rods and the reaction of supports in such structures must be determined jointly, from the solution of the general system of equilibrium equations for all nodes of the truss. The usual «manual» methods of determining the forces (the Ritter method and the method of cutting nodes) are not suitable here. Consider a truss with two additional support rods (Fig. 1). Analogous trusses (Fig. 2.3) with other types of supports were studied in [1, 2].

In the truss n panels on the lower belt, the total number of rods — $n_s = 4n + 18$, including five support rods. To determine the forces in the rods, for the nodes of the truss, equilibrium equations are drawn up in the projections on the coordinate axes.

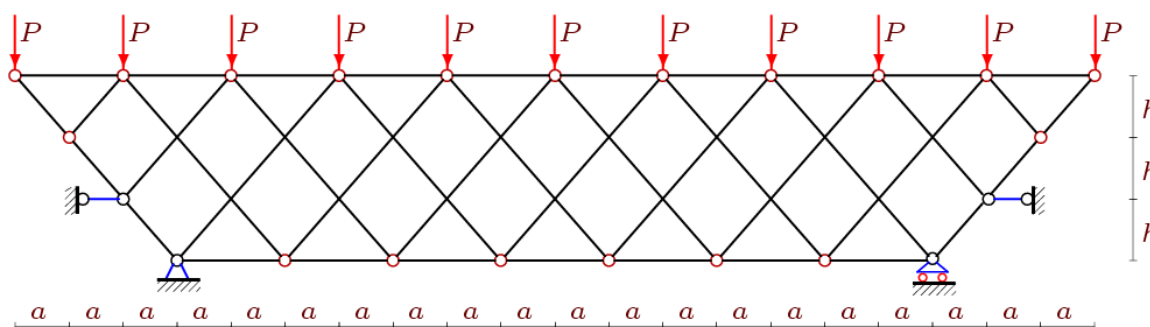
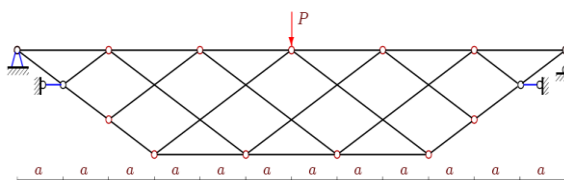
Figure 1— Truss under uniform load, $n = 7$.

Figure 2—Truss [1]

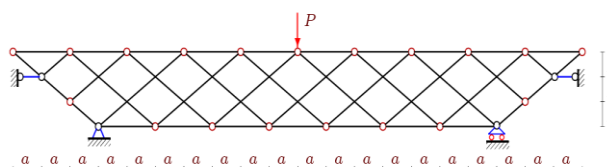


Figure 3—Truss [2]

The coordinates of the nodes and the structure of the connection of the rods are entered in the text of the program [3]. The fragment of the coordinate input program in Maple has the form:

```
for i to 3 #Lateral hinges
do
  x[i]:=a*(i-1):          y[i]:=4*h-h*i:
  x[i+n+4]:=3*a+2*n*a+a*i: y[i+n+4]:=h*i;
end:
```

Hinges of the lower belt:

```
for i to n+1 do x[i+3]:=a+2*a*i:y[i+3]:=0:      end:
```

Hinges of the upper belt:

```
for i to n+2 do x[i+n+7]:=2*a*i:y[i+n+7]:=3*h:end:
```

The order of connections of nodes and rods is introduced by operators

```
for i to n+6 do Q[i]:=[i,i+1];end:
Q[n+7]:=[1,n+8];Q[n+8]:=[2*n+9,n+7];
for i to n+1 do Q[i+n+8]:=[i+n+7,i+n+8];end:
```

```

for i to n+2
do
Q[i+2*n+9]:=[i+1,i+n+7]:
Q[i+3*n+11]:=[i+n+7,i+4]:
end:

```

Here we introduced special vectors $\mathbf{Q}$ with end numbers. In the process of counting, it is noted that for certain values of the panel numbers, the determinant of the system of equilibrium equations degenerates [1,2,4-11]. This corresponds to the kinematic degeneracy of the structure. In order to exclude from the sequence of numbers the values at which this occurs, the following function was introduced

$$k = -\frac{1}{4}(-1)^u - \frac{3}{4} + \frac{3}{2}u, \quad u = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

Only even numbers of panels $n = 2k - 1$ are accepted.

The deflection is calculated using the Maxwell-Mohr's formula:

$$EF\Delta = \sum_{i=1}^{n_s-5} S_i^{(P)} S_i^{(1)} l_i.$$

Indicates: l_i — the length of the rods, $S_i^{(P)}$ — the forces in the rods from a given uniform load, $S_i^{(1)}$ — the forces from a single vertical force applied to the middle of the upper belt (at the knot where the deflection is determined), EF — stiffness of the rods. The stiffness is assumed to be the same for all rods in the truss (except supports). The calculation of eighteen trusses for the load in the middle of the lower belt (Figure 1) showed that the deflection formula has the same form

$$\Delta = P(a^3 A_u + c^3 C_u) / (2EFh^2). \quad (2)$$

The investigated truss belongs to the number of regular ones, for which, regardless of the number of panels, the form of the solution does not change. The problem of the existence of regular statically determinate trusses was studied in [12]. It is necessary to find expressions for the coefficients of this formula. When a common term of the sequence of coefficients was found, it was necessary to analyze 18 deflections and obtain the following numbers: 1, -19, 65, 129, 1037, 1785, 5173, 7733, 16169, 22197, 39161, 50841, 80725, 100769, 148877, 180525, 253073, 300093, 404209. Using the **rgf_findrecur** operator from the package Maple **genfunc** for the members of the sequence, a linear homogeneous recurrence equation of the ninth order

$$A_u = A_{u-1} + 4A_{u-2} - 4A_{u-3} - 6A_{u-4} + 6A_{u-5} + 4A_{u-6} - 4A_{u-7} - A_{u-8} + A_{u-9}.$$

The **rsolve** operator gives a solution to the recurrence equation that specifies the desired formula for the coefficient a^3 in formula (1)

$$A_u = 30u^4 + (-120 - 16(-1)^u)u^3 + (18(-1)^u + 122)u^2 + (-24 - 16(-1)^u)u - 19 - 5(-1)^u / 8. \quad (3)$$

For the coefficient C_u , the solution has the form

$$C_u = (6u^2 - 6(1 + (-1)^n)u - (-1)^n + 13) / 4. \quad (4)$$

Figure 4 shows the curves of the relative deflection $\Delta' = \Delta EF / (P_0 L)$ versus the number u (1), which characterizes the number of panels at $L = an = 100$ м, $P_0 = (n + 4)P$.

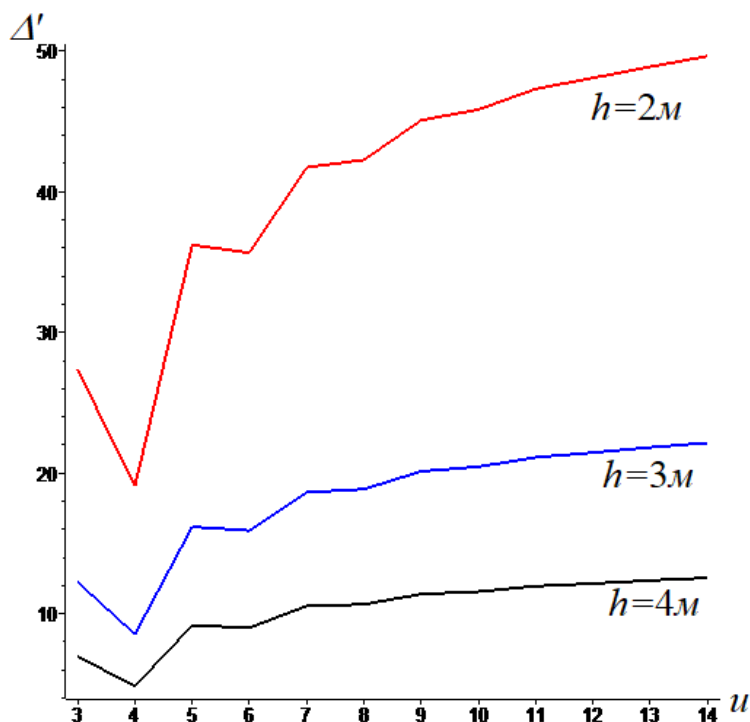


Figure 4 — Dependence of the deflection on the number of panels

The spasmodic change in the deflection characteristic of such trellis farms is noticeable. Similar effects were previously observed in lattice farms [13-21]. Formulas for the arch of arch trusses using the same technique were found in [22-33]. More complex problems of deformation of spatial structures by induction are solved in analytical form in the Maple system in [5, 34-39]. All these solutions can find application in the estimation of solutions obtained numerically [40-42]. Surveys of analytical solutions for planar trusses are given in [43-45].

References

1. Voropay R.A. Derivation of the formula for the deflection of the truss with additional horizontal struts // Postulat. 2018. No. 6
2. Voropay R.A. The derivation of the dependence of the deflection of a beam truss with lateral struts on the number of panels// Postulat. 2018. No. 6
3. Кирсанов М.Н. Задачи по теоретической механике с решениями в Maple

11. М.: Физматлит, 2010. 264 с.
4. Кирсанов М.Н., Разананирина Р.К. Формула для прогиба решетчатой фермы, имеющей случаи кинематической изменяемости//Постулат. 2017. № 9 (23). С. 1.
5. Кирсанов М.Н. Расчет пространственной стержневой системы, допускающей мгновенную изменяемость//Строительная механика и расчет сооружений. 2012. № 3. С. 48-51.
6. Кирсанов М.Н. Вывод формулы для прогиба решетчатой фермы, имеющей случаи кинематической изменяемости//Строительная механика и конструкции. 2017. Т. 1. № 14. С. 27-30.
7. Кирсанов М.Н. Формула для прогиба и анализ кинематической изменяемости решетчатой фермы // Строительная механика и конструкции. 2017. Т. 2. № 15. С. 5-10.
8. Кирсанов М.Н., Суворов А.П. Исследование деформаций плоской внешне статически неопределимой фермы// Вестник МГСУ. 2017. Т. 12. № 8 (107). С. 869-875.
9. Белянкин Н.А., Бойко А. Ю., Плясова А.А. Формулы для определения деформаций внешне статически неопределимой фермы от действия сосредоточенной и распределенной нагрузки // Строительство и архитектура. 2017. Т.5. №4.
10. Кирсанов М.Н. Аналитическое выражение для прогиба балочной фермы со сложной решеткой//Моделирование и механика конструкций. 2016. № 4. С. 4.
11. Доманов Е.В., Кирсанов М.Н. Модельный анализ работы стержневой конструкции покрытия промышленного здания//Моделирование и механика конструкций. 2017. № 5. С. 4.
12. Hutchinson R. G., Fleck N. A. Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 2005. 85, No. 9. Pp. 607 – 617.
13. Кирсанов М.Н. Расчет жесткости стержневой решетки // Вестник машиностроения. 2015. № 8. С. 48-51.
14. Кирсанов М.Н. индуктивный анализ влияния погрешности монтажа на жесткость и прочность плоской фермы//Инженерно-строительный журнал. 2012. Т. 31. № 5. С. 38-42.
15. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет многорешетчатой фермы//Строительная механика и расчет сооружений. 2014. № 6 (257). С. 2-6.
16. Kirsanov M. An inductive method of calculation of the deflection of the truss regular type//Architecture and Engineering. 2016. Т. 1. № 3. С. 14-17.
17. Кирсанов М.Н. Расчет прогиба плоской решетчатой фермы с четырьмя опорами// Транспортное строительство. 2017. № 7. С. 15-18.
18. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет балочной фермы со сложной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 3 (260). С. 7-12.
19. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет балочной фермы с решеткой типа

- «butterfly»//Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 4 (267). С. 2-5.
20. Кирсанов М.Н. Анализ усилий и деформаций в корабельном шпангоуте, моделируемом фермой//Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2017. Т. 9. № 3. С. 560-569.
21. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба распорной фермы с произвольным числом панелей// Механизация строительства. 2017. Т. 78. № 3. С. 26-29.
22. Тиньков Д.В. Расчет прогиба плоской арочной фермы с крестообразной решеткой // Постулат. 2017. № 12.
23. Савиных А. С. Анализ прогиба арочной раскосой фермы, нагруженной по верхнему поясу. // Строительство и архитектура. 2017. Том 5. Выпуск 3 (6). С. 12-17.
24. Широков А. С. Индуктивный вывод зависимости прогиба и смещения опоры арочной фермы от числа панелей в системе Maple // Международный научный семинар «Нелинейные модели в механике, статистике, теории поля и космологии» – GRACOS-17. Казань: Изд-во Академии наук РТ, 2017. С. 267-272.
25. Компанеец К. А Расчет смещения подвижной опоры плоской арочной раскосой фермы при нагрузке в середине пролета //Молодежь и наука. 2017. №4. С.108.
26. Рахматулина А.Р., Смирнова А.А. Вывод зависимости прогиба арочной фермы от числа панелей в системе Maple//Материалы Всероссийской научно-практической конференции «45 лет отрасли легких металлоконструкций: от модуля Кисловодск до модуля Пятигорск» (03.04.2017-05.04.2017) / под. ред. Марутяна А.С., Файбишенко В.К., Вартумяна А.А. – Пятигорск: Изд-во ПФ СКФУ, 2017. 262 с. С.85-88.
27. Кирсанов М.Н., Степанов А.С. О зависимости деформаций плоской арочной фермы от числа панелей// Строительная механика и расчет сооружений. 2017. № 5 (274). С. 9-14.
28. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба арочной фермы//Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. № 5. С. 50-55.
29. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование деформаций плоской фермы арочного типа//Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2015. № 3 (31). С. 42-48.
30. Кирсанов М.Н. Сравнительный анализ жесткости двух схем арочной фермы//Строительство уникальных зданий и сооружений. 2015. № 9 (36). С. 44-55.
31. Кирсанов М.Н. Аналитическая оценка прогиба и усилий в критических стержнях арочной фермы // Транспортное строительство. 2017. № 9. С. 8-10.
32. Кирсанов М.Н. Индуктивный анализ деформации арочной фермы // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2018. Т. 14. № 1. С. 64-70.
33. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба арочной

- фермы//Строительная механика и конструкции. 2018. Т. 1. № 16. С. 7-11.
- 34.Кирсанов М.Н. Анализ прогиба фермы прямоугольного пространственного покрытия//Инженерно-строительный журнал. 2015. № 1 (53). С. 32-38.
- 35.Кирсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой системы//Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2012. № 1. С. 49-53.
- 36.Кирсанов М.Н. Напряженное состояние и деформации прямоугольного пространственного стержневого покрытия//Научный вестник Воронежского государственного архитектурно-строительного университета. Строительство и архитектура. 2016. № 1 (41). С. 93-100.
- 37.Кирсанов М.Н. Оценка прогиба и устойчивости пространственной балочной фермы//Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 5 (268). С. 19-22.
- 38.Леонов П.Г., Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и анализ пространственной стержневой конструкции в системе Maple //В сборнике: Информатизация инженерного образования ИНФОРИНО-2014 Труды международной научно-методической конференции. 2014. С. 239-242.
- 39.Кирсанов М.Н. Учет строительного подъема в аналитическом расчете пространственной балочной фермы // Известия Московского государственного технического университета МАМИ. 2014. Т. 4. № 2 (20). С. 36-39.
- 40.Тиньков Д.В. Оптимальная геометрия плоской балочной раскосной фермы с учетом линейной ползучести материала // Инженерно-строительный журнал. 2016. №1(61). С. 25–32. doi: 10.5862/MCE.61.3
- 41.Алексейцев А.В., Курченко Н.С. Деформации стальных стропильных ферм при ударных аварийных воздействиях // Инженерно-строительный журнал. 2017. № 5(73). С. 3–13
- 42.Барановский М.Ю., Тарасов В.А. Стандартизированные ферменные конструкции с уклоном 10% пролетами 24, 30, 36 метров // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2014. №7(22). С. 92–106.
- 43.Осадченко Н.В. Аналитические решения задач о прогибе плоских ферм арочного типа// Строительная механика и конструкции. 2018. Т.1. №16. С.12-33.
- 44.Осадченко Н.В. Расчёт прогиба плоской неразрезной статически определимой фермы с двумя пролётами // Постулат. 2017. № 12. С. 28. <https://elibrary.ru/item.asp?id=32381924>
- 45.Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 66–73.