

## Двойная индукция для вывода формулы для прогиба рамной фермы с произвольным числом панелей

*Арутюнян Виктория Борисовна*  
*НИУ «МЭИ»*  
*студент*

### Аннотация

Плоская статически определимая ферма имеет две опоры и произвольное число панелей в ригеле. Решетка ферма раскосная прямоугольная. К ферме приложена нагрузка в середине пролета. Поставлена задача получения аналитической зависимости прогиба фермы от числа панелей в ригеле для случая двух, трех и четырех панелей в опорных частях рамы. Для решения задачи используется система компьютерной математики Maple и метод индукции для обобщения частных решений на общий случай.

**Ключевые слова:** ферма, рама, формула Мора, прогиб, индукция, Maple

## Double induction for deriving a formula for deflecting a frame truss with an arbitrary number of panels

*Arutyunyan Victoria Borisovna*  
*NRU «MPEI»*  
*Student*

### Abstract

A planar statically determinate truss has two supports, and an arbitrary number of panels in the crossbar. Lattice of the truss is diagonal type. The truss is loaded in the middle of the span. The task is to obtain the analytical dependence of the deflection of the truss against the number of panels in the crossbar for the case of two, three and four panels in the supporting parts of the frame. To solve the problem, the Maple computer mathematics system and the induction method are used to generalize the particular solutions to the general case

**Keywords:** truss, Mohr's integral, lattice, frame, deflection, induction, Maple

The deformation of an elastic hinge-rod frame is considered. The proportions of the frame truss are controlled by two parameters - the number of panels  $2n$  in the crossbar and the number of panels  $2m$  by the height of the supporting and inclined (angled  $45^\circ$ ) parts of the frame (Fig. 1, 2). The height of the frame is  $2ma$ , the span is  $2nb + 2a(m - 1)$ .

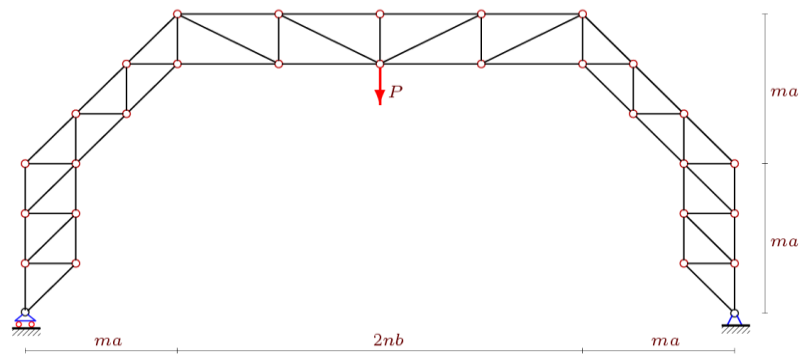


Figure 1—Truss with load in center,  $n = 2, m=3$

To determine the deflection (vertical displacement of the point of force application) we use the simplified Maxwell-Mohr's formula

$$\Delta = P \sum_{i=1}^{M-3} S_i^2 l_i / (EF).$$

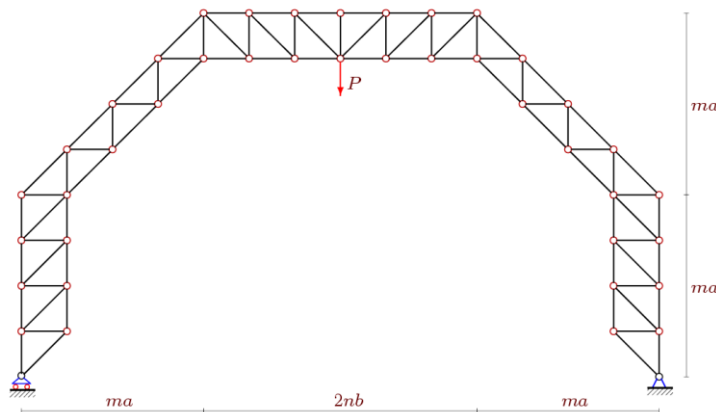


Figure 2—Truss,  $n = 3, m=4$

Denoted:  $S_i$  — forces from the unit force applied to the middle of the belt,  $EF$ — stiffness of the truss bars,  $l_i$  — length of the rods,  $M=16m+8n-4$  — number of rods. To obtain a formula representation of the solution, the forces are calculated in the system of symbolic mathematics Maple [1]. Earlier, according to this program, formulas were obtained for the deflection of planar [2-10], spatial [11-18], arched [19-28] and lattice trusses [29-39]. In most of these solutions, one induction method was used. Two-parameter induction is much more time-consuming. Typically, this induction is used in the calculation of frames [40-44], where these parameters arise naturally — the number of panels along the vertical and horizontally. The coordinates of the nodes are entered in the program. To do this, the hinges of the construction are numbered (Figure 3).

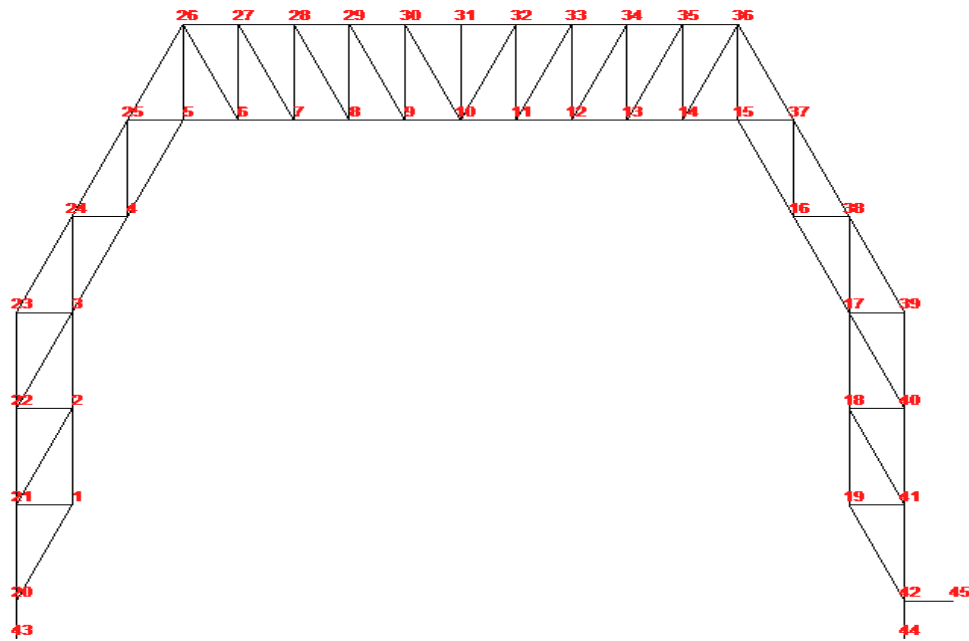


Figure 3 — Hinge numbers in the Maple system

The left movable support is modeled by a vertical non-deformable rod, the movable one by two rods. The lengths of these rods are arbitrary, since they do not enter into the sum of the Maxwell-Mohr's formula. The algorithm for entering the structure of the farm resembles the input of a graph and is described in sufficient detail in [1-3]. To solve the system of equations of node equilibrium, the inverse matrix method implemented by means of Maple is used. Calculation of the deflection gives the following formula

$$\Delta = P(C_1 a^3 + C_2 ab^2 + C_3 ba^2 + C_4 b^3 + C_5 c^3) / (2a^2 EF). \tag{1}$$

where  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Operators **rgf\_findrecur** from the **genfunc** packet (system Maple) gives the simple linear homogeneous recurrence equation of the second order for all coefficients  $C_{1,n}$ ,  $C_{3,n}$  and  $C_{5,n}$

$$C_{1,3,5(n)} = 2C_{1,3,5(n-1)} - C_{1,3,5(n-2)}.$$

To find the coefficients  $b^3$  a simple linear homogeneous recurrence equation of the fourth order is obtained

$$C_{4(n)} = 4C_{4(n-1)} - 6C_{4(n-2)} + 4C_{4(n-3)} - C_{4(n-4)}.$$

To find the coefficients  $b^2 a$  a simple linear homogeneous recurrence equation of the third order is obtained

$$C_{2(n)} = 3C_{2(n-1)} - 3C_{2(n-2)} + C_{2(n-3)}.$$

We note that the coefficients in all three recurrence equations are *binomial* coefficients. The operator **resolve** gives the solution in the form of polynomial expressions:

for  $m=2$

$$C_1 = 12\sqrt{2} + 5 + n, C_2 = 4n^2, C_3 = 8n,$$

for  $m=3$

$$C_1 = 38\sqrt{2} + 11 + n, C_2 = 6n^2, C_3 = 18n.$$

for  $m=4$

$$C_1 = 88\sqrt{2} + 19 + n, C_2 = 8n^2, C_3 = 32n.$$

for  $m=2, 3, 4$

$$C_4 = n(2n^2 + 1) / 3, C_5 = n.$$

Only these two coefficients do not depend on the number of panels in height. The remaining coefficients can be generalized to an arbitrary case, using all the same operators **rgf\_findrecur** and **rsolve**. To obtain general formulas it was sufficient to calculate the trusses with  $m = 1, 2, \dots, 8$ :

$$C_1 = m^2 + m - 1 + n + 2\sqrt{2}m(1 + 2m^2) / 3,$$

$$C_2 = 2mn^2, C_3 = 2nm^2.$$

Thus, the obtained solution is suitable for a wide class of trusses of the structure in question - from high and narrow, to large-span with a small height. Analytical solutions are easily verified and can serve as test cases for numerical solutions obtained in various special-purpose computer programs, in which a rather cumbersome and finite-element-sensitive finite-element method is used. Solutions are useful in optimization problems too [46-48].

A survey of analytical solutions for planar trusses, including arches, is contained in [27, 49].

## References

1. Кирсанов М.Н. Задачи по теоретической механике с решениями в Maple 11. М.: Физматлит, 2010. 264 с.
2. Кирсанов М.Н., Хроматов В.Е. Моделирование деформаций плоской фермы треугольного очертания// Строительная механика и расчет сооружений. 2017. 6(275).С. 24-28.
3. Кирсанов М. Н. Статический анализ и монтажная схема плоской фермы // Вестник государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. 2016. №5(39). С. 61-68. doi: 10.21821/2309-5180-2016-8-5-61-68
4. Кирсанов М.Н. Анализ усилий и деформаций в корабельном шпангоуте моделируемого фермой // Вестник государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. 2017. Т. 9. № 3. С. 560–569. doi: 10.21821/2309-5180-2017-9-3-560-569
5. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба и усилий в стержнях симметричной балочной фермы// Строительство и реконструкция.2017.1(69). С.19-23.
6. Кирсанов М.Н. Точное решение задачи о прогибе балочной фермы с произвольным числом панелей в системе Maple // Строительство: наука и образование. 2017. Том 7. Выпуск 1 (22). Ст. 1. Режим доступа: <http://nso-journal.ru>. DOI: 10.22227/2305-5502.2017.1.1

7. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба распорной фермы с произвольным числом панелей // Механизация строительства. 2017. № 3. С. 26-29.
8. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба двухпролетной плоской фермы // Механизация строительства. 2017. № 5. С. 35-38.
9. Кирсанов М.Н. Индуктивный анализ влияния погрешности монтажа на жесткость и прочность плоской фермы // Инженерно-строительный журнал. 2012. №5(31). С. 38-42
10. Кирсанов М.Н. Аналитическое моделирование нагружения балочной фермы регулярного типа // Вестник МЭИ. 2016. № 6. С. 108-112
11. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой системы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2012. № 1. С. 49-53.
12. Кирсанов М.Н. Расчет пространственной стержневой системы, допускающей мгновенную изменяемость // Строительная механика и расчет сооружений. 2012. № 3. С. 48-51.
13. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба фермы прямоугольного пространственного покрытия // Инженерно-строительный журнал. 2015. № 1 (53). С. 32-38.
14. Кирсанов М.Н. Оценка прогиба и устойчивости пространственной балочной фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. 5(268). С.19-22.
15. Kirsanov M.N. The deflection of spatial coatings with periodic structure // Magazine of Civil Engineering. 2018. No. 8. С. 58–66. doi: 10.18720/MCE.76.6
16. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба пространственного прямоугольного покрытия // Вестник МГСУ. 2018. Т. 13. Вып. 5 (116). С. 579–586. doi: 10.22227/1997–0935.2018.5.579-586
17. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование жесткости пространственной статически определимой фермы // Вестник МГСУ. 2017. Т. 12. Вып. 2 (101). С. 165–171.
18. Кирсанов М.Н. Напряженное состояние и деформации прямоугольного пространственного стержневого покрытия // Научный журнал строительства и архитектуры. 2016. №1(41). С. 93-100.
19. Кирсанов М.Н. Аналитическая оценка прогиба и усилий в критических стержнях арочной фермы // Транспортное строительство. 2017. № 9. С. 8-10.
20. Кирсанов М.Н. Сравнительный анализ жесткости двух схем арочной фермы // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2015. № 9 (36). С. 44-55.
21. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование деформаций плоской фермы арочного типа // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2015. № 3 (31). С. 42-48
22. Кирсанов М.Н., Степанов А.С. О зависимости деформаций плоской арочной фермы от числа панелей // Строительная механика и расчет

- сооружений. 2017. № 5 (274). С. 9-14.
23. Кирсанов М.Н. Индуктивный анализ деформации арочной фермы // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2018. 14(1). Pp.64-70. DOI:10.22337/2587-9618-2018-14-1-64-70
24. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба арочной фермы // Строительная механика и конструкции. 2018. №1. С.7-11.
25. Кирсанов М.Н., Степанов А.С. О зависимости деформаций плоской арочной фермы от числа панелей // Строительная механика и расчет сооружений. 2017. № 5. С. 9-14.
26. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба арочной фермы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. № 5. С. 50-55
27. Осадченко Н.В. Аналитические решения задач о прогибе плоских ферм арочного типа // Строительная механика и конструкции. 2018. Т.1. №16. С.12-33.
28. Компанец К. А Расчет смещения подвижной опоры плоской арочной раскосной фермы при нагрузке в середине пролета // Молодежь и наука. 2017. №4. С.108.
29. Kirsanov M. N. A Precise Solution of the Task of a Bend in a Lattice Girder with a Random Number of Panels. Russian Journal of Building Construction and Architecture. 2018. No. 1(37). P.92-99.
30. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет многорешетчатой фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2014. № 6 (257). С. 2-6.
31. Кирсанов М.Н., Заборская Н.В. Деформации периодической фермы с раскосной решеткой // Инженерно-строительный журнал. 2017. № 3(71). С. 61–67.
32. Гриднев С.Ю., Кирсанов М.Н., Овчинников И.Г. Статический расчет двухраскосной балочной фермы // Интернет-журнал НАУКОВЕДЕНИЕ. Том 8, №6 (2016) <http://naukovedenie.ru/PDF/99TVN616.pdf>
33. Кирсанов М.Н. Статический расчет плоской фермы с двойной треугольной решеткой // Справочник. Инженерный журнал с приложением. 2017. № 11 (248). С. 32-36.
34. Кирсанов М.Н. К выбору решетки балочной фермы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. №3. С.23-27.
35. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба и усилий в решетчатой ферме // Механизация строительства. 2017. №4. С. 20-23.
36. Кирсанов М.Н. Зависимость прогиба плоской решетчатой фермы от числа панелей // Механизация строительства. 2017. № 10. С. 24-27.
37. Кирсанов М.Н. Аналитический метод расчета прогиба плоской фермы со сложной решеткой шпренгельного типа // Транспортное строительство. 2017. №5. С.11-13.
38. Кирсанов М.Н. Расчет прогиба плоской решетчатой фермы с четырьмя опорами // Транспортное строительство. 2017. №7. С.15-17.
39. Кирсанов М.Н. Расчет жесткости стержневой решетки // Вестник машиностроения. 2015. № 8. С. 49-51.
40. Широков А.С. Вывод формулы для прогиба статически определимой

- портальной фермы в зависимости от числа панелей // Молодежь и наука. 2018. №5. С.119
41. Доманов Е.В., Кирсанов М.Н. Модельный анализ работы стержневой конструкции покрытия промышленного здания // Моделирование и механика конструкций. 2017. №5.
  42. Горбунова А.С., Кирсанов М.Н., Лепетюха В.А. Индуктивный вывод формулы для деформации плоской стержневой модели покрытия промышленного здания // Моделирование и механика конструкций. 2016. №5.
  43. Astakhov S. The derivation of formula for deflection of statically indeterminate externally flat truss under load at midspan// Construction and Architecture. 2017. Т. 5. № 2. С. 50-54.
  44. Кирсанов М.Н., Орлов И.В. Математическая модель упругой работы стержневой конструкции покрытия промышленного здания // Моделирование и механика конструкций. 2017. №5.
  45. Грибова О. В. Расчет прогиба плоской внешне статически неопределимой стержневой рамы // Постулат. 2017.12 .
  46. Алексейцев А.В. Эволюционная оптимизация стальных ферм с учетом узловых соединений стержней // Инженерно-строительный журнал. 2013. № 5(40). С. 27–37.
  47. Серпик И.Н., Алексейцев А.В. Оптимизация металлических конструкций путем эволюционного моделирования. – М.: Изд-во АСВ, 2012. – 239 с.
  48. Юрьев А.Г. Естественный фактор оптимизации топологии конструкций // Вестник Белгородского государственного технологического университета им. В.Г. Шухова. 2013. № 5. С. 46–48.
  49. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 66–73.