

Циклическая подгруппа группы

Попов Иван Николаевич

*Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова
к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры математики*

Аннотация

В работе изложены результаты по исследованию свойств циклической подгруппы группы чисел из интервала от -1 до 1 со сложением, равным отношению суммы двух чисел к сумме 1 и их произведения. Представлена формула для вычисления числа из циклической группы, порожденной рациональным числом, с последовательным обобщением результата.

Ключевые слова: группа, подгруппа, циклическая подгруппа.

Cyclic subgroup of the group

Popov Ivan Nikolaevich

Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov

Candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, associate professor of the Department of Mathematics

Abstract

The paper presents the results of the study of the properties of a cyclic subgroup of a group of numbers from the interval from -1 to 1 with the addition equal to the ratio of the sum of two numbers to the sum of 1 and their products. A formula for calculating a number from a cyclic group generated by a rational number with a sequential generalization of the result is presented.

Keywords: group, subgroup, cyclic subgroup.

Введение

Определим на числовом интервале $(-1;1) \subset \mathbb{R}$ операцию сложения $\oplus$ следующим образом. Пусть $x, y \in (-1;1)$. Будем считать, что

$$x \oplus y = \frac{x+y}{1+xy}.$$

Например,

$$\frac{1}{3} \oplus \frac{2}{3} = \frac{9}{11}, \quad \left(-\frac{2}{3}\right) \oplus \frac{1}{3} = -\frac{3}{7}, \quad \left(-\frac{9}{10}\right) \oplus \left(-\frac{1}{10}\right) = -\frac{100}{109}, \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \oplus \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Учитывая, что при условии $x, y \in (-1;1)$ выполняются неравенства

$$1 - \frac{x+y}{1+xy} = \frac{(1-x)(1-y)}{1+xy} > 0 \text{ и } 1 + \frac{x+y}{1+xy} = \frac{(1+x)(1+y)}{1+xy} > 0,$$

то справедливо неравенство $-1 < \frac{x+y}{1+xy} < 1$ или $-1 < x \oplus y < 1$, откуда следует, что операция $\oplus$ является алгебраической на интервале $(-1;1)$.

Так как для чисел $x, y, z \in (-1;1)$ выполняются равенства

$$(x \oplus y) \oplus z = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}, \quad x \oplus (y \oplus z) = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}, \quad x \oplus y = y \oplus x,$$

то операция $\oplus$ на интервале $(-1;1)$ обладает свойствами ассоциативности и коммутативности. Число 0 относительно операции $\oplus$ является нейтральный элемент; каждое число из интервала $(-1;1)$ обладает симметрическим числом относительно операции $\oplus$, которое равно числу $-x$ для числа x . Исходя из этого, алгебра $((-1;1); \oplus)$ является абелевой группой, которую обозначим W .

Среди подгрупп любой группы выделяются циклические подгруппы [1, 3]. Циклическая подгруппа $\langle x \rangle$ группы W , порожденная числом $x \in (-1;1)$, есть подгруппа всех чисел, кратных числу x ; $\langle x \rangle = \{kx \mid k \in \mathbb{Z}\}$, полагая, что $0x = 0$, $\langle x \rangle = \{0; \pm x; \pm 2x; \pm 3x; \dots\}$.

Цель статьи – описать строения циклических подгрупп группы W , порожденных рациональными неотрицательными числами.

1. Решение уравнения $x \oplus y = a$ в группе W

Рассмотрим решения уравнения $x \oplus y = a$ в группе W относительно x и y при фиксированном числе a . Учитывая, что при $x, y \in (-1;1)$ следует, что $x \oplus y \in (-1;1)$, то при $|a| \geq 1$ уравнение решений не имеет.

Каждому решению уравнения $x \oplus y = a$ можно сопоставить точку $(x; y)$ на плоскости с введенной системой координат xOy , и решениями уравнения естественно считать точки плоскости, и можем говорить о линиях решений (в частном случае, о графиках).

Исходя из определения сложения $\oplus$ в группе W , уравнение $x \oplus y = 0$ имеет бесконечно много решений вида $(x; -x)$. Все такие точки принадлежат прямой $y = -x$.

Если $a \neq 0$, то из уравнения $x \oplus y = a$ получаем равенство

$$y = \frac{1}{a} + \frac{\frac{1-a^2}{a^2}}{x - \frac{1}{a}} \quad \text{или} \quad y = b + \frac{b^2 - 1}{x - b}, \quad \text{где} \quad b = \frac{1}{a}, \quad x \in (-1;1).$$

Все решения уравнения принадлежат гиперболы с центром в точке $(b; b)$, причем только одной ее ветке, так как $|b| > 1$ (поэтому центр расположен вне квадрата $[-1;1] \times [-1;1]$).

Точка, симметричная точке $(x; y)$ относительно прямой $x + y = 0$, имеет координаты $(-y; -x)$. Решая уравнения $x \oplus y = a$ и $x \oplus y = -a$, получаем

$$y = b + \frac{b^2 - 1}{x - b} \text{ и } y = -b + \frac{b^2 - 1}{x + b}.$$

Заменим во втором равенстве y на $-x$ и x на $-y$ и выразим y через x :

$$-x = -b + \frac{b^2 - 1}{-y + b}, \quad x = b + \frac{b^2 - 1}{y - b}, \quad y = b + \frac{b^2 - 1}{x - b}.$$

Отсюда получаем симметричность графиков решений уравнений $x \oplus y = a$ и $x \oplus y = -a$ относительно графика $y = -x$.

На рисунке 1 указаны графики решений уравнений:

линия 1 – график решений уравнения $x \oplus y = 0,5$;

линия 2 – график решений уравнения $x \oplus y = -0,5$;

линия 3 – график решений уравнения $x \oplus y = 0,8$;

линия 4 – график решений уравнения $x \oplus y = -0,8$.

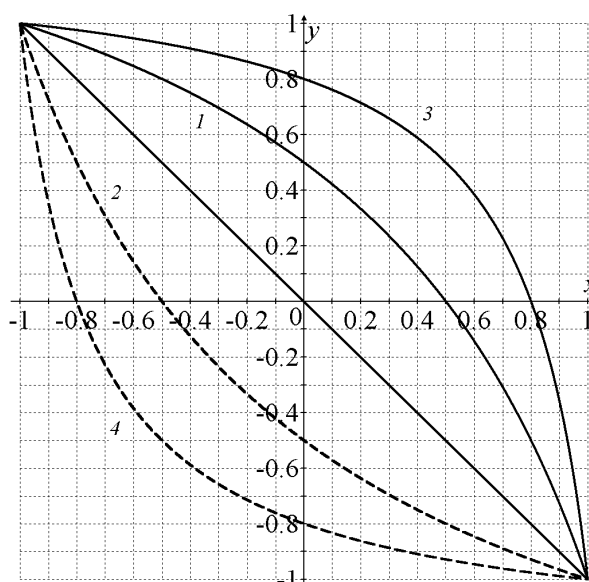


Рисунок 1 – Графическое представление решений уравнения $x \oplus y = a$

2. Строение циклических подгрупп группы W

Очевидно, что $\langle 0 \rangle = \{0\}$. Пусть $\frac{m}{n} \in W$, где $m, n \in N$, и $k \in N$.

По определению в группе W верны равенства $0 \frac{m}{n} = 0$ и $1 \frac{m}{n} = \frac{m}{n}$.

Представим результаты вычислений $k \frac{m}{n}$ в группе W для некоторых значений k :

$$2 \frac{m}{n} = \frac{2nm}{n^2 + m^2};$$

$$\begin{aligned} 3 \frac{m}{n} &= \frac{3n^2m + m^3}{n^3 + 3nm^2}; \\ 4 \frac{m}{n} &= \frac{4n^3m + 4nm^3}{n^4 + 6n^2m^2 + m^4}; \\ 5 \frac{m}{n} &= \frac{5n^4m + 10n^2m^3 + m^5}{n^5 + 10n^3m^2 + 5nm^4}; \\ 6 \frac{m}{n} &= \frac{6n^5m + 20n^3m^3 + 6nm^5}{n^6 + 15n^4m^2 + 15n^2m^4 + m^6}; \\ 7 \frac{m}{n} &= \frac{7n^6m + 35n^4m^3 + 21n^2m^5 + m^7}{n^7 + 21n^5m^2 + 35n^3m^4 + 7nm^6}; \\ 8 \frac{m}{n} &= \frac{8n^7m + 56n^5m^3 + 56n^3m^5 + 8nm^7}{n^8 + 28n^6m^2 + 70n^4m^4 + 28n^2m^6 + m^8}; \\ 9 \frac{m}{n} &= \frac{9n^8m + 84n^6m^3 + 126n^4m^5 + 36n^2m^7 + m^9}{n^9 + 36n^7m^2 + 126n^5m^4 + 84n^3m^6 + 9nm^8}. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & & \\
 & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & & \\
 & & & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 \\
 & 1 & & & 8 & & 28 & & 56 & & 70 & & 56 & & 28 & & 8 & & 1 \\
 1 & & 1 & & 9 & & 36 & & 84 & & 126 & & 126 & & 84 & & 36 & & 9 & & 1
 \end{array}$$

Видим, что коэффициенты в числителе и знаменателе представленных кратных совпадают с числами из треугольника Паскаля. Как известно, числа в треугольнике Паскаля равны

$$C_p^q = \frac{p!}{q!(p-q)!}, \text{ где } p, q \in N \cup \{0\}, q \in \{0; 1; 2; \dots; p\}.$$

Здесь p – номер строки, начиная с нуля, q – номер элемента в строке, также начиная с нуля. Например,

$$8 \frac{m}{n} = \frac{C_8^1 n^7 m + C_8^3 n^5 m^3 + C_8^5 n^3 m^5 + C_8^7 n m^7}{C_8^0 n^8 + C_8^2 n^6 m^2 + C_8^4 n^4 m^4 + C_8^6 n^2 m^6 + C_8^8 m^8};$$

$$9 \frac{m}{n} = \frac{C_9^1 n^8 m + C_9^3 n^6 m^3 + C_9^5 n^4 m^5 + C_9^7 n^2 m^7 + C_9^9 m^9}{C_9^0 n^9 + C_9^2 n^7 m^2 + C_9^4 n^5 m^4 + C_9^6 n^3 m^6 + C_9^8 n m^8}.$$

Можем выдвинуть гипотезу, что

$$(2k+1) \frac{m}{n} = \frac{C_{2k+1}^1 n^{2k} m + C_{2k+1}^3 n^{2k-2} m^3 + C_{2k+1}^5 n^{2k-4} m^5 + \dots + C_{2k+1}^{2k+1} m^{2k+1}}{C_{2k+1}^0 n^{2k+1} + C_{2k+1}^2 n^{2k-1} m^2 + C_{2k+1}^4 n^{2k-3} m^4 + \dots + C_{2k+1}^{2k} n m^{2k}};$$

$$(2k) \frac{m}{n} = \frac{C_{2k}^1 n^{2k-1} m + C_{2k}^3 n^{2k-3} m^3 + C_{2k}^5 n^{2k-5} m^5 + \dots + C_{2k}^{2k-1} n m^{2k-1}}{C_{2k}^0 n^{2k} + C_{2k}^2 n^{2k-2} m^2 + C_{2k}^4 n^{2k-4} m^4 + \dots + C_{2k}^{2k} m^{2k}}.$$

Так как, используя бином Ньютона, верны равенства

$$(n+m)^{2k+1} + (n-m)^{2k+1} =$$

$$= 2 \cdot (C_{2k+1}^0 n^{2k+1} + C_{2k+1}^2 n^{2k-1} m^2 + C_{2k+1}^4 n^{2k-3} m^4 + \dots + C_{2k+1}^{2k} n m^{2k}),$$

$$(n+m)^{2k+1} - (n-m)^{2k+1} =$$

$$= 2 \cdot (C_{2k+1}^1 n^{2k} m + C_{2k+1}^3 n^{2k-2} m^3 + C_{2k+1}^5 n^{2k-4} m^5 + \dots + C_{2k+1}^{2k+1} m^{2k+1})$$

и

$$(n+m)^{2k} + (n-m)^{2k} =$$

$$= 2 \cdot (C_{2k}^0 n^{2k} + C_{2k}^2 n^{2k-2} m^2 + C_{2k}^4 n^{2k-4} m^4 + \dots + C_{2k}^{2k} n m^{2k}),$$

$$(n+m)^{2k} - (n-m)^{2k} =$$

$$= 2 \cdot (C_{2k}^1 n^{2k-1} m + C_{2k}^3 n^{2k-3} m^3 + C_{2k}^5 n^{2k-5} m^5 + \dots + C_{2k}^{2k-1} n m^{2k-1}),$$

то, обобщая, получаем, что гипотеза будет звучать следующим образом:

$$k \frac{m}{n} = \frac{(n+m)^k - (n-m)^k}{(n+m)^k + (n-m)^k}, \quad k \in N \cup \{0\}.$$

Метод математической индукции покажем, что это равенство верно.

При $k = 0$ получаем:

$$\frac{(n+m)^0 - (n-m)^0}{(n+m)^0 + (n-m)^0} = \frac{0}{2} = 0 = 0 \frac{m}{n},$$

тем самым обоснована база индукции.

Пусть верно равенство $k \frac{m}{n} = \frac{(n+m)^k - (n-m)^k}{(n+m)^k + (n-m)^k}$. Тогда

$$\begin{aligned}
(k+1)\frac{m}{n} &= \frac{m}{n} \oplus k\frac{m}{n} = \frac{m}{n} \oplus \frac{(n+m)^k - (n-m)^k}{(n+m)^k + (n-m)^k} = \frac{\frac{m}{n} + \frac{(n+m)^k - (n-m)^k}{(n+m)^k + (n-m)^k}}{1 + \frac{m}{n} \cdot \frac{(n+m)^k - (n-m)^k}{(n+m)^k + (n-m)^k}} = \\
&= \frac{m(n+m)^k + m(n-m)^k + n(n+m)^k - n(n-m)^k}{n(n+m)^k + n(n-m)^k + m(n+m)^k - m(n-m)^k} = \\
&= \frac{(n+m)(n+m)^k - (n-m)(n-m)^k}{(n+m)(n+m)^k + (n+m)(n-m)^k} = \frac{(n+m)^{k+1} - (n-m)^{k+1}}{(n+m)^{k+1} + (n-m)^{k+1}}.
\end{aligned}$$

Индукционный переход доказан. Следовательно, предложенная формула для вычисления числа в группе W , кратного $\frac{m}{n}$, справедлива.

Итак,

$$\left\langle \frac{m}{n} \right\rangle = \left\{ \pm \frac{(n+m)^k - (n-m)^k}{(n+m)^k + (n-m)^k} \mid k \in N \cup \{0\} \right\}, \text{ где } \frac{m}{n} \in (-1;1), m, n \in N.$$

В подгруппе $\left\langle \frac{m}{n} \right\rangle$ группы W , как в любой группе, справедливо равенство

$$\ell \frac{m}{n} \oplus k \frac{m}{n} = (\ell + k) \frac{m}{n}$$

для любых $\ell, k \in Z$.

Можно показать, что для любого целого числа k

$$\frac{(n+m)^{-k} - (n-m)^{-k}}{(n+m)^{-k} + (n-m)^{-k}} = - \frac{(n+m)^k - (n-m)^k}{(n+m)^k + (n-m)^k}.$$

Поэтому

$$\left\langle \frac{m}{n} \right\rangle = \left\{ \frac{(n+m)^k - (n-m)^k}{(n+m)^k + (n-m)^k} \mid k \in Z \right\}, \text{ где } \frac{m}{n} \in (-1;1), m, n \in N.$$

Используя формулу общего элемента группы $\left\langle \frac{m}{n} \right\rangle$, можно вычислить число, кратное числу $\frac{m}{n}$, без вычислений промежуточных чисел, которые

появляются при использовании формулы $k \frac{m}{n} = \frac{m}{n} \oplus (k-1) \frac{m}{n}$. Например,

$${}_5\frac{1}{5} = \frac{(5+1)^5 - (5-1)^5}{(5+1)^5 + (5-1)^5} = \frac{6^5 - 4^5}{6^5 + 4^5} = \frac{211}{275}, \quad {}_5\frac{1}{5} = \frac{211}{275}.$$

Последовательность чисел вида $k \frac{m}{n}$, $m, n \in N$, $\frac{m}{n} \in W$ и $k \in Z$, является возрастающей (так как $(k+1) \frac{m}{n} > k \frac{m}{n}$) и ограниченной (так как $-1 \leq k \frac{m}{n} < 1$). При этом, учитывая, что $0 < m < n$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k \frac{m}{n} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(n+m)^k - (n-m)^k}{(n+m)^k + (n-m)^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{n-m}{n+m}\right)^k}{1 + \left(\frac{n-m}{n+m}\right)^k} = 1.$$

На рисунке 3 представлен график последовательности, состоящей из некоторых чисел группы $\left\langle \frac{1}{5} \right\rangle$ (числа обозначены точками и для наглядности соединены отрезками).

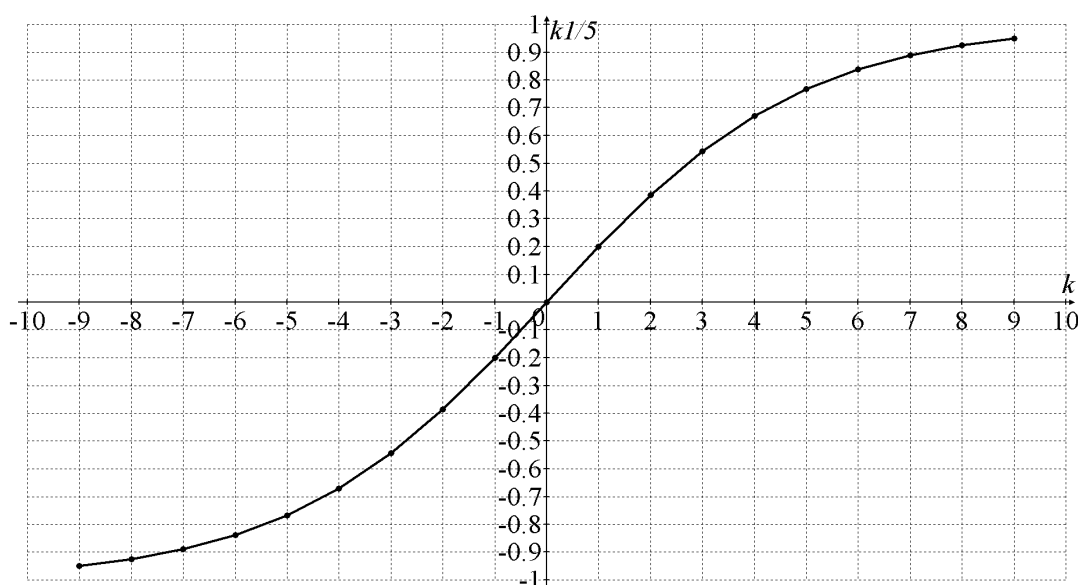


Рисунок 3 – График последовательности элементов группы $\left\langle \frac{1}{5} \right\rangle$

Элемент группы $\left\langle \frac{m}{n} \right\rangle$ можно записать в виде: $\frac{1 - \left(\frac{n-m}{n+m}\right)^k}{1 + \left(\frac{n-m}{n+m}\right)^k}$, $k \in Z$. Тогда

решением уравнения $k \frac{m}{n} = a$, где $a \in \left\langle \frac{m}{n} \right\rangle$, является число $k = \log_{\frac{n-m}{n+m}} \frac{1-a}{1+a}$.

Например, решением уравнения $k \frac{1}{4} = \frac{272}{353}$ в группе $\left\langle \frac{1}{4} \right\rangle$ является число

$$k = \log_3 \frac{81}{625} = 4, \text{ решением уравнения } k \frac{1}{4} = -\frac{1441}{1684} \text{ – число } k = \log_3 \frac{3125}{243} = -5.$$

3. Циклическая подгруппа $\left\langle \frac{1}{2} \right\rangle$ группы W

Рассмотрим циклическую подгруппу $\left\langle \frac{1}{2} \right\rangle$ группы W . В этом случае $m=1$, $n=2$ и

$$k \frac{1}{2} = \frac{(2+1)^k - (2-1)^k}{(2+1)^k + (2-1)^k} = \frac{3^k - 1}{3^k + 1},$$

то есть положительное число, кратное $\frac{1}{2}$, вычисляется по формуле

$$k \frac{1}{2} = \frac{3^k - 1}{3^k + 1}.$$

Отсюда

$$\left\langle \frac{1}{2} \right\rangle = \left\{ \frac{3^k - 1}{3^k + 1} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Заметим, что $3^k - 1 : 2$ и $3^k + 1 : 2$ для любого числа $k \in \mathbb{N}$. Так как

$$\frac{3^k - 1}{3^k + 1} = \frac{\frac{1}{2}(3^k - 1)}{\frac{1}{2}(3^k + 1)} = \frac{\frac{3^k - 1}{2}}{\frac{3^k - 1}{2} + 1},$$

то

$$k \frac{1}{2} = \frac{a_k}{a_k + 1}, \text{ где } a_k = \frac{3^k - 1}{2}, k \in \mathbb{N},$$

то есть число в группе W , кратное $\frac{1}{2}$, есть несократимая дробь, знаменатель которой на 1 больше ее числителя. Учитывая, что

$$3a_k + 1 = 3 \cdot \frac{3^k - 1}{2} + 1 = \frac{3^{k+1} - 1}{2} = a_{k+1},$$

то $a_{k+1} = 3a_k + 1$, поэтому

$$(k+1) \frac{1}{2} = \frac{a_{k+1}}{a_{k+1} + 1} = \frac{3a_k + 1}{3a_k + 2}.$$

Последнее равенство позволяет вычислять $k \frac{1}{2}$ рекуррентно для натуральных чисел k . Так как $0 \frac{1}{2} = 0$, то получаем последовательность чисел, кратных $\frac{1}{2}$, в группе W :

$$0, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{4}{5}, \pm \frac{13}{14}, \pm \frac{40}{41}, \pm \frac{121}{122}, \pm \frac{364}{365}, \pm \frac{1093}{1094}, \pm \frac{3280}{3281}, \pm \frac{9841}{9842}, \dots$$

Заключение

В работе рассмотрены циклические подгруппы вида $\left\langle \frac{m}{n} \right\rangle$ группы W , где $\frac{m}{n}$ – рациональная дробь из интервала $(-1;1)$. Для любого $k \in \mathbb{Z}$ верно:

$$k \frac{m}{n} = \frac{(n+m)^k - (n-m)^k}{(n+m)^k + (n-m)^k} = \frac{(1+m/n)^k - (1-m/n)^k}{(1+m/n)^k + (1-m/n)^k}.$$

Обозначив $x = \frac{m}{n}$, получаем, что

$$kx = \frac{(1+x)^k - (1-x)^k}{(1+x)^k + (1-x)^k}.$$

Обобщая, можем считать, что x – произвольное (а не только рациональное) число из интервала $(-1;1)$. Как и в произвольной группе, в группе W верно двойное равенство $(-k)x = k(-x) = -kx$.

Равенство $kx = \frac{(1+x)^k - (1-x)^k}{(1+x)^k + (1-x)^k} = \frac{1 - \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^k}{1 + \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^k}$ наталкивает на мысль об

описании циклических подгрупп следующим образом.

Пусть x – положительное действительное число и

$$G(x) = \left\{ \frac{1-x^k}{1+x^k} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

В частности, $G(1) = \{0\}$.

Сложение на множестве $G(x)$, как и прежде, определим равенством:

$$a \oplus b = \frac{a+b}{1+ab}.$$

Обозначим $kx = \frac{1-x^k}{1+x^k}$ для целого числа k . Тогда для чисел $\ell, k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \ell x \oplus kx &= \frac{1-x^\ell}{1+x^\ell} \oplus \frac{1-x^k}{1+x^k} = \frac{\frac{1-x^\ell}{1+x^\ell} + \frac{1-x^k}{1+x^k}}{1 + \frac{1-x^\ell}{1+x^\ell} \cdot \frac{1-x^k}{1+x^k}} = \\ &= \frac{(1-x^\ell) \cdot (1+x^k) + (1+x^\ell) \cdot (1-x^k)}{(1+x^\ell) \cdot (1+x^k) + (1-x^\ell) \cdot (1-x^k)} = \frac{2-2x^{\ell+k}}{2+2x^{\ell+k}} = \frac{1-x^{\ell+k}}{1+x^{\ell+k}} = (\ell+k)x, \end{aligned}$$

то есть $\ell x \oplus kx = (\ell+k)x \in G(x)$. Так же

$$(-k)x = \frac{1-x^{-k}}{1+x^{-k}} = \frac{(1-x^{-k}) \cdot x^k}{(1+x^{-k}) \cdot x^k} = \frac{x^k - 1}{x^k + 1} = -\frac{1-x^k}{1+x^k} = -kx, \quad 0 < x < 1.$$

Можем утверждать, что $(G(x); \oplus)$ – абелева группа.

Для любого $kx \in G(x)$ справедливо двойное неравенство: $-1 < kx < 1$.

Если осуществить замену $x = \frac{1-a}{1+a}$, то $a = \frac{1-x}{1+x}$. Функция $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$

или $f(x) = -1 + \frac{2}{x+1}$ – гипербола с асимптотами $x = -1$ и $y = -1$. График функции $f(x)$ представлен на рисунке 4.

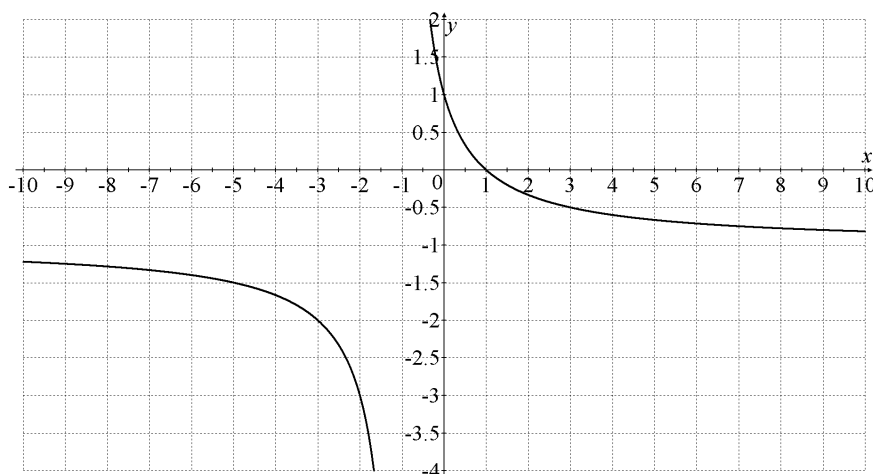


Рисунок 4 – График функции $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$

При положительных значениях переменной x значения переменной a принадлежат интервалу $(-1;1)$. Если $x \in (0;1)$, то $a \in (0;1)$; если $x = 1$, то $a = 0$; если $x \in (1;+\infty)$, то $a \in (-1;0)$.

При замене $x = \frac{1-a}{1+a}$ получаем равенство $k \left(\frac{1-a}{1+a} \right) = \frac{(1+a)^k - (1-a)^k}{(1+a)^k + (1-a)^k}$.

Например, при $a = \frac{1}{2}$ дробь $\frac{1-a}{1+a} = \frac{1}{3}$ и $k \frac{1}{3} = \frac{3^k - 1}{3^k + 1}$ для любого $k \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$G\left(\frac{1}{3}\right) = \left\{ \frac{3^k - 1}{3^k + 1} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\langle \frac{1}{2} \right\rangle \subset W. \text{ В общем случае } G(x) = \left\langle \frac{1-x}{1+x} \right\rangle \subset W.$$

Библиографический список

1. Александров П.С. Введение в теорию групп. М.: Наука, 1980. 144 с.
2. Иванов Б.Н. Дискретная математика. Алгоритмы и программы. М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. 288 с.
3. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. М.: Наука, 1972. 240 с.