

Решение задач линейного программирования в системе POMWIN*Прохорова Наталья Юрьевна**Приамурский государственный университет имени Шолом-Алейхема**студент**Эйрих Надежда Владимировна**Приамурский государственный университет имени Шолом-Алейхема**кандидат физико-математических наук, доцент***Аннотация**

В статье описывается одна из возможностей программы POMWIN – выбор из множества допустимых планов наиболее выгодного (оптимального). Показано решение «классических» задач (задачи о диете и задачи о банке) с использованием данной системы. Рассмотрены случаи существования единственного решения и бесконечного множества решений этих задач.

Ключевые слова: система POMWIN, линейное программирование, система неравенств, целевая функция

Solution of problems linear programming in a software system «POMWIN»*Prokhorova Natalya Yurievna**Sholom-Aleichem Priamursky State University**student**Eyrikh Nadezhda Vladimirovna**Sholom-Aleichem Priamursky State University**PhD in Mathematics, Associate Professor***Abstract**

This article describes one of the POMWIN program options - choose from the set of feasible plans for the most favorable (optimal). Displaying solution "classic" tasks (tasks of the diet and the problem of the bank) using this system. The cases of the existence of a unique solution and an infinite number of solutions of the problems.

Keywords: system POMWIN, linear programming, the system of inequalities, the objective function

Актуальность применения методов линейного программирования является очевидным фактом, так как использование математических моделей помогает совершенствовать планирование и анализировать деятельность компаний. Представление данных в виде математической модели позволяет

конкретизировать информацию, создавать и моделировать варианты, выбирать оптимальные решения [1].

Линейное программирование – это направление математического программирования, изучающее методы решения экстремальных задач, которые характеризуются линейной зависимостью между переменными и линейным критерием. Сущность линейного программирования состоит в нахождении точек наибольшего или наименьшего значения некоторой функции при определенном наборе ограничений, налагаемых на аргументы и образующих систему ограничений, которая имеет, как правило, бесконечное множество решений [2].

В настоящее время линейное программирование является одним из наиболее употребительных аппаратов математической теории оптимального принятия решений. Для решения задач линейного программирования разработано сложное программное обеспечение, дающее возможность эффективно и надежно решать практические задачи больших объемов. Владение аппаратом линейного программирования необходимо каждому специалисту в области прикладной математики [3].

В 1939 году Леонид Витальевич Канторович опубликовал работу «Математические методы организации и планирования производства», в которой сформулировал новый класс экстремальных задач с ограничениями и разработал эффективный метод их решения, таким образом, были заложены основы линейного программирования. Джордж Данциг разработал симплекс-метод и считается «отцом линейного программирования» на западе [4]. В своей статье Л.П. Бестужева и Л.Б. Медведева дали анализ учебной игры по теме «Решение задачи линейного программирования графическим способом» [5]. М.В. Пудова рассмотрела построение эффективных вычислительных схем для решения задач линейного программирования в ситуации, когда матрица ограничений имеет узкоблочную с окаймлением структуру [6]. Н.Я. Боярчук в своем исследовании представил экономическую интерпретацию результатов анализа на чувствительность оптимального решения ЗЛП [7]. Пособие, написанное Г.В. Калининой и Е.Н. Курочкиной содержит теоретические аспекты оптимального планирования и решения ЗЛП, рассматривается решение классических задач линейного программирования в среде Excel [8]. В своих статьях О.А. Кочеткова и Ю.Н. Пудовкина рассмотрели решение задач линейного программирования с помощью визуальной среды Delphi, а Ю.Н. Заваровский и А.С. Арапова с помощью программного пакета Maple [9, 10]. В статье М.В. Булгаковой рассматривается симплексный метод решения задачи линейного программирования с использованием модифицированных жордановых исключений [11]. Л.Т. Ашепков и И.Б. Косогорова рассмотрели каноническую задачу линейного программирования с интервальными коэффициентами [12].

Нами для решения задач линейного программирования была использована система POMWIN (QM for Windows или POM-QM). Эта программа представляет собой пакет для производственного менеджмента,

применения количественных подсчетов, управленческих наук и операционных исследований. Программа доступна в бесплатном лицензионном варианте. Новая версия данной программы – POM-QM for Windows объединяет в себе модули: PM for Windows, QM for Windows и DM for Windows. Благодаря стандартизации с помощью интерфейса Windows, гибкости, удобному дизайну и пользовательской поддержке данный программный пакет является наиболее удобным для работы в области операционного менеджмента, количественных подсчетов и управленческих наук.

Рассмотрим задачу о диете: пусть требуется составить такую диету, которая, с одной стороны, удовлетворяла бы минимальные потребности организма в питательных веществах, с другой – требовала бы наименьших затрат [13]. Опишем простую математическую модель этой задачи. Пусть имеется два вида продуктов П1 и П2, содержащих питательные вещества А, В и С. В одном килограмме продуктов П1 и П2 содержится определенное количество питательных веществ каждого вида (табл.1).

Таблица 1- Количество питательных веществ

А	В	С	S
0,1	0,1	0,4	В 1 кг П1
0,3	0,1	0,1	В 1 кг П2

Пусть 0,3; 0,2 и 0,4 – ежесуточная потребность организма в питательных веществах А, В и С соответственно; 20 р. и 40 р. – стоимость одного килограмма продуктов П1 и П2. Обозначим x (кг) и y (кг) – количество продуктов П1 и П2 соответственно. Составим систему ограничений описанной задачи линейного программирования:

$$\begin{cases} 0,1x + 0,3y \geq 0,3, \\ 0,1x + 0,1y \geq 0,2, \\ 0,4x + 0,1y \geq 0,4, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Для выполнения требования минимизации затрат на продукты целевая функция должна выглядеть следующим образом:

$$S = 20 \cdot x + 40 \cdot y \rightarrow \min.$$

Покажем этапы решения данной задачи в системе POMWIN. Вначале необходимо запустить программу и указать модуль, который будет использоваться для решения, в нашем случае – это линейное программирование (рис. 1).

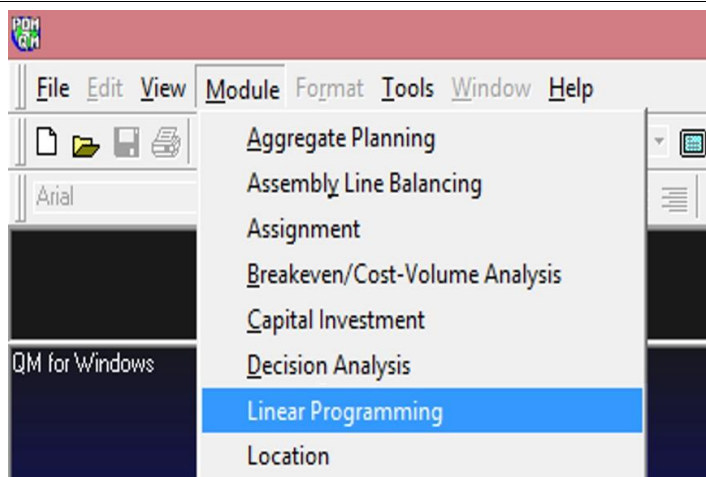


Рисунок 1 – Запуск программы и выбор модуля

Далее создаем новый проект (рис. 2).

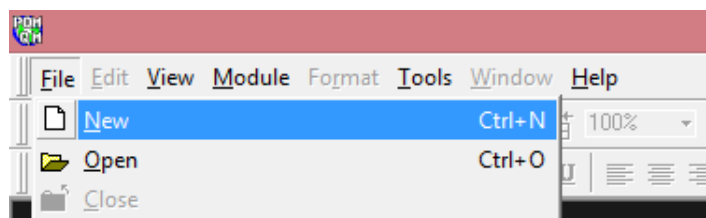


Рисунок 2 – Создание нового проекта

В появившемся окне указываем количество условий (в нашем случае их пять) и количество переменных (в нашем случае их две), так как нам необходимо обеспечить количество питательных веществ при минимальных затратах на продукты, то выбираем задачу на минимум, затем нажимаем ОК (рис. 3).

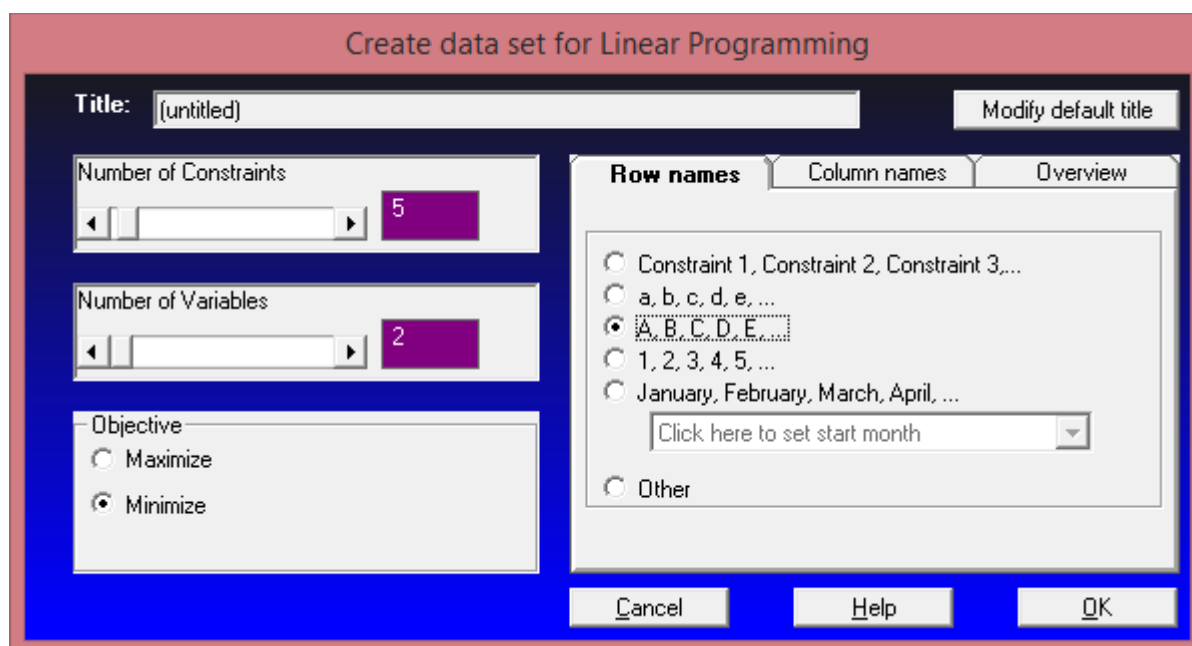


Рисунок 3 – Установление параметров новой таблицы

После заполнения таблицы исходной информации (системы ограничений), необходимой для решения поставленной задачи линейного программирования (рис. 4) нажимаем Solve для получения решения (рис. 5).

	X	Y		RHS	Equation form
Minimize	20	40			Min 20X + 40Y
A	,1	,3	>=	,3	.1X + .3Y >= .3
B	,1	,1	>=	,2	.1X + .1Y >= .2
C	,4	,1	>=	,4	.4X + .1Y >= .4
D	1	0	>=	0	X >= 0
E	0	1	>=	0	Y >= 0

Рисунок 4 – Таблица исходной информации для задачи о диете

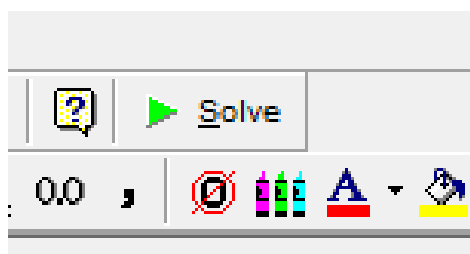


Рисунок 5 – Запуск расчета

Отметим, что одновременно с поставленной задачей в программе POMWIN формулируется и решается двойственная задача (рис. 6, рис. 7).

Original Problem							
Minimize	X	Y					
A	0,1	0,3	>=	0,3			
B	0,1	0,1	>=	0,2			
C	0,4	0,1	>=	0,4			
D	1	0	>=	0			
E	0	1	>=	0			
Dual Problem							
	A	B	C	D	E		
Maximize	0,3	0,2	0,4	0	0		
X	0,1	0,1	0,4	1	0	<=	20
Y	0,3	0,1	0,1	0	1	<=	40

Рисунок 6 – Вид прямой и двойственной задачи

Ranging					
(untitled) Solution					
Variable	Value	Reduced Cost	Original Val	Lower Bound	Upper Bound
X	1,5	0	20	13,3333	40
Y	,5	0	40	20	60
Constraint	Dual Value	Slack/Surplus	Original Val	Lower Bound	Upper Bound
A	-100	0	,3	,2	,4667
B	-100	0	,2	,1545	,3
C	0	,25	,4	-Infinity	,65
D	0	1,5	0	-Infinity	1,5
E	0	,5	0	-Infinity	,5

Рисунок 7 – Решение прямой и двойственной задачи

Система POMWIN также позволяет получить геометрическую интерпретацию решения задачи линейного программирования (рис. 8).

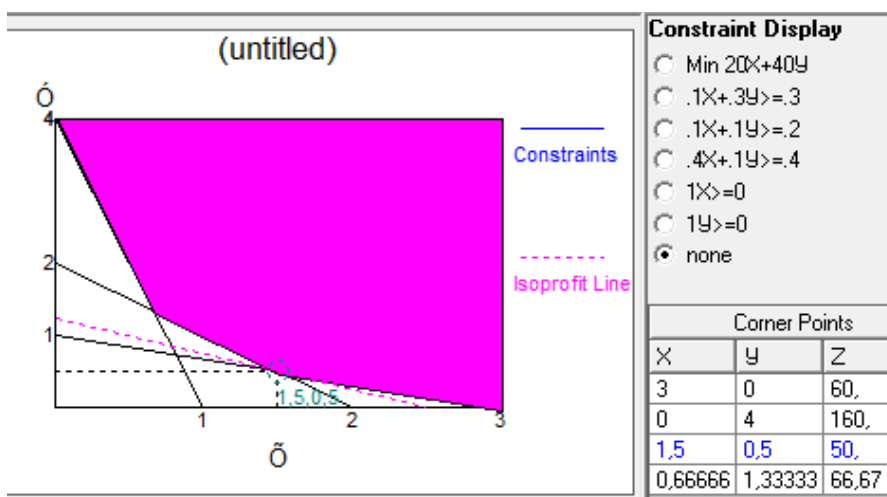


Рисунок 8 – Геометрическое решение задачи о диете

Итак, получаем решение поставленной задачи: для удовлетворения минимальных потребностей организма из имеющихся в распоряжении продуктов необходимо 1,5 кг продукта П1 и 0,5 кг продукта П2, при этом наименьшие затраты составят 50 рублей (рис. 9).

Linear Programming Results		
(untitled) Solution		
Variable	Status	Value
surplus 1	NONBasic	0
surplus 2	NONBasic	0
surplus 3	Basic	,25
surplus 4	Basic	1,5
surplus 5	Basic	,5
Optimal Value (Z)		50

Рисунок 9 – Результаты решения задачи о диете

Проанализируем решение в системе POMWIN задачи о диете с бесконечным множеством решений. Для этого, в поставленной выше задаче, изменим стоимость продуктов, например, сделаем одинаковой по 40 руб. Тогда целевая функция примет вид:

$$S = 40 \cdot x + 40 \cdot y \rightarrow \min.$$

После введения в таблицу исходной информации (рис. 10), получаем следующие результаты: для удовлетворения минимальных потребностей организма можно взять 1,5 кг продукта П1 и 0,5 кг продукта П2, либо 0,67 кг продукта П1 и 1,33 кг продукта П2, при этом наименьшие затраты составят 80 рублей (рис. 11, рис. 12).

(untitled)					
	X	Y		RHS	Equation form
Minimize	40	40			Min 40X + 40Y
A	,1	,3	>=	,3	.1X + .3Y >= .3
B	,1	,1	>=	,2	.1X + .1Y >= .2
C	,4	,1	>=	,4	.4X + .1Y >= .4
D	1	0	>=	0	X >= 0
E	0	1	>=	0	Y >= 0

Рисунок 10 – Исходная информация для задачи о диете с бесконечным множеством решений

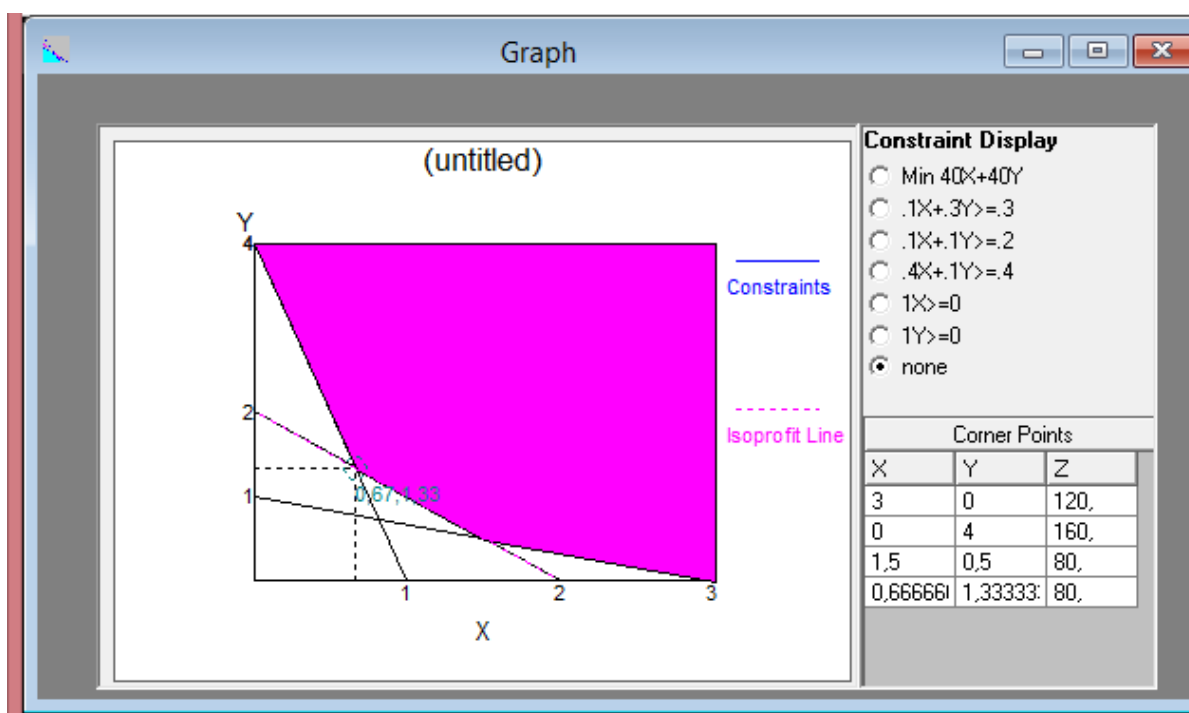


Рисунок 11 – Геометрическое решение задачи о диете с бесконечным множеством решений

Linear Programming Results		
(untitled) Solution		
Variable	Status	Value
X	Basic	,6667
Y	Basic	1,3333
surplus 1	Basic	,1667
surplus 2	NONBasic	0
surplus 3	NONBasic	0
surplus 4	Basic	,6667
surplus 5	Basic	1,3333
Optimal Value (Z)		80

Рисунок 12 – Результаты решения задачи о диете с бесконечным множеством решений

При этом следует отметить, что решением данной задачи будет любое значение x , удовлетворяющее условию $0,67 \leq x \leq 1,5$, а значение второй переменной находится из условия $y = 2 - x$.

Продemonстрируем решение в программе POMWIN еще одной задачи линейного программирования – задачи о банке, требующей нахождения максимума целевой функции.

Пусть собственные средства банка и депозиты в сумме составляют 100 миллионов долларов. Часть этих средств, но не менее 35 млн.\$ должна быть размещена в кредитах. При этом следует учесть ликвидное ограничение: ценные бумаги должны составлять не менее 30% от средств, размещенных в кредитах и ценных бумагах. Известно, что доходность кредитов 15 %, а доходность ценных бумаг – 10 %. Цель банка состоит в том, чтобы получить максимальную прибыль от кредитов и ценных бумаг [13].

Составляем математическую модель задачи. Пусть x – деньги, размещенные в кредитах (млн \$), а y – деньги, размещенные в ценных бумагах (млн \$). Имеем следующую систему линейных ограничений:

$$\begin{cases} x + y \leq 100, \\ x \geq 35, \\ y \geq 0,3(x + y), \\ x \geq 0, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Для получения максимальной прибыли, необходимо найти максимум целевой функции:

$$f = 0,15x + 0,1y \rightarrow \max.$$

Вновь указываем количество условий и количество переменных, в данном случае выбираем задачу на максимум и заполняем исходные данные задачи (рис. 13).

	X	Y		RHS	Equation form
Maximize	,15	,1			Max .15X + .1Y
A	1	1	<=	100	X + Y <= 100
B	1	0	>=	35	X >= 35
C	3	-7	=	0	3X - 7Y = 0
D	1	0	>=	0	X >= 0
E	0	1	>=	0	Y >= 0

Рисунок 13 – Исходная информация для задачи о банке

Программа выдает оптимальное решение (рис. 14, рис. 15).

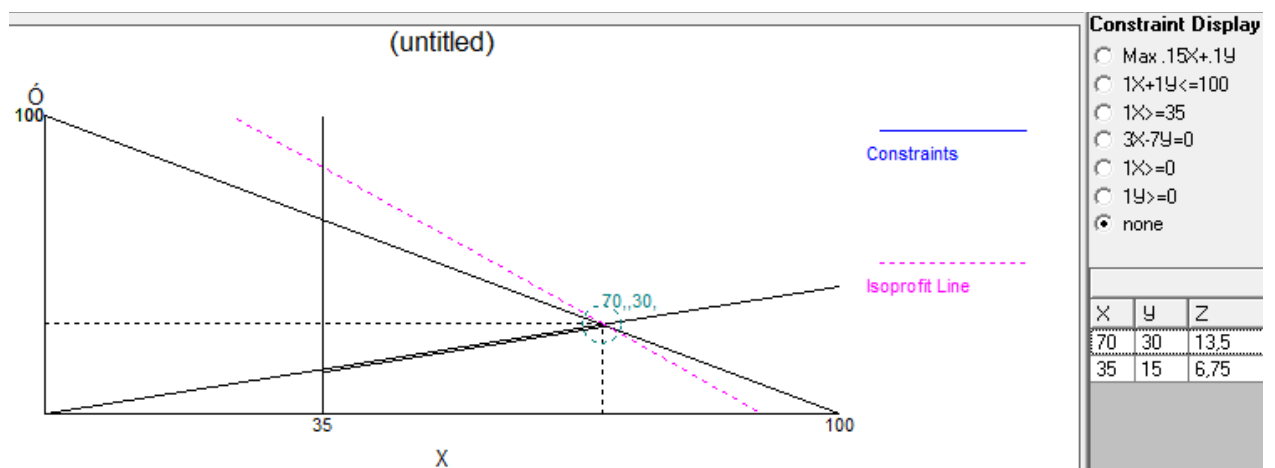


Рисунок 14 – Геометрическое решение задачи о банке

	X	Y		RHS	Dual
Maximize	,15	,1			
A	1	1	<=	100	,135
B	1	0	>=	35	0
C	3	-7	=	0	,005
D	1	0	>=	0	0
E	0	1	>=	0	0
Solution->	70	30	Optimal Z->	13,5	

Рисунок 15 – Результаты решения задачи о банке

То есть, банк сможет получить максимальную прибыль в размере 13,5 миллионов долларов, если деньги, размещенные в кредитах, составят 70

миллионов долларов, а деньги, размещенные в ценных бумагах, составят 30 миллионов долларов.

Приведенные примеры доказывают выгодность проведения расчетов в программе POMWIN для нахождения решений задач линейного программирования. Программа позволяет быстро находить оптимальное решение поставленных задач (как максимальное, так и минимальное), дает геометрическую интерпретацию решения (как единственного, так и бесконечного множества решений), одновременно формулирует и решает двойственную задачу.

Программа POMWIN находит широкое применение, так как круг прикладных задач, математические модели которых представляют собой задачи линейного программирования, достаточно широк. Такие задачи требуется решать в различных областях человеческой деятельности, где необходим выбор одного из возможных образов действий (программ действий), например, при решении проблем управления и планирования производственных процессов, в проектировании и перспективном планировании, в военном деле и т.д. [14].

Библиографический список

1. Решение задач линейного программирования [Электронный ресурс] URL: <http://xreferat.com/33/6942-3-reshenie-zadach-lineiynogo-programmirovaniya.html> (дата обращения: 02.12.2016).
2. Основные понятия линейного программирования [Электронный ресурс] URL: <http://matmetod-popova.narod.ru/theme21.htm> (дата обращения: 02.12.2016).
3. Применение линейного программирования для решения экономических задач (оптимизация прибыли) [Электронный ресурс] URL: <http://xreferat.com/114/139-2-primenenie-lineiynogo-programmirovaniya-dlya-resheniya-ekonomicheskikh-zadach-optimizaciya-pribyli.html> (дата обращения: 02.12.2016).
4. Линейное программирование [Электронный ресурс] URL: http://ru.vlab.wikia.com/wiki/Линейное_программирование (дата обращения: 02.12.2016).
5. Бестужева Л.П., Медведева Л.Б. Решение задачи линейного программирования графическим способом // Ярославский педагогический вестник. 2008. № 1. С. 23-27.
6. Пудова М.В. Новые алгоритмы решения задач линейного программирования со специальной структурой // Дискретный анализ и исследование операций. Серия 2. 2002. Т. 9. № 1. С. 78-98.
7. Боярчук Н.Я. Оптимизация управленческих решений на основе задач линейного программирования // Труды Братского государственного университета. Серия: Экономика и управление. 2014. Т. 1. № 1. С. 184-187.
8. Калинина Г.В., Курочкина Е.Н. Классические задачи линейного

- программирования. Учебное пособие. Рязань, 2011.
9. Кочеткова О.А., Пудовкина Ю.Н. Решение задач линейного программирования в визуальной среде Delphi // Новая наука: Теоретический и практический взгляд. 2016. № 4-2 (75). С. 156-159.
 10. Заваровский Ю.Н., Арапова А.С. Общая задача линейного программирования и задача целочисленного программирования и их решение в пакете Maple // В сборнике: Управление реформированием социально-экономического развития предприятий, отраслей, регионов сборник научных статей V Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и преподавателей. 2014. С. 330-336.
 11. Булгакова М.В. Симплекс-метод в задачах линейного программирования с использованием модифицированных жордановых исключений // АПК России. 2010. Т. 57. С. 154-156.
 12. Ашепков Л.Т., Косогорова И.Б. Интервальная задача линейного программирования // Экономика и математические методы. 2006. Т. 42. № 3. С. 99-104.
 13. Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В. Математика в экономике: Учебник: В 2-х ч. Ч.1. М.: Финансы и статистика, 2000. 224с.
 14. Применение линейного программирования для решения экономических задач (оптимизация прибыли) [Электронный ресурс] URL: <http://xreferat.com/114/139-2-primenenie-lineiynogo-programmirovaniya-dlya-resheniya-ekonomicheskikh-zadach-optimizaciya-pribyli.html> (дата обращения: 02.12.2016).