

Индуктивный вывод зависимости прогиба плоской решетчатой фермы от числа панелей в системе Maple

Воропай Руслан Александрович

НИУ "МЭИ"

Студент

Доманов Евгений Викторович

НИУ "МЭИ"

Студент

Аннотация

Балочная статически определимая ферма равномерно загружается по узлам верхнего или нижнего пояса. Для вывода коэффициентов формулы применяются операторы системы Maple и алгоритм метода вырезания узлов. Усилия в стержнях находятся в символьном виде. Для нахождения смещения применяется формула Максвелла - Мора. Опорные стержни предполагаются жесткими. Строятся сравнительные графики полученной зависимости.

Ключевые слова: ферма, формула Максвелла - Мора, прогиб, индукция, Maple

Inductive derivation of the dependence of the deflection of a flat lattice truss on the number of panels in the Maple system

Voropay Ruslan Alexandrovich

NRU "MPEI"

Student

Domanov Evgenii Viktorovich

NRU "MPEI"

Student

Abstract

The beam statically determinate truss is evenly loaded along the nodes of the upper or lower belt. To derive the coefficients of the formula, the operators of the Maple system and the algorithm of the method of cutting out the nodes are applied. Efforts in the rods are symbolic. To find the displacement, the Maxwell-Mora formula is applied. The supporting rods are assumed to be rigid. Comparative graphs of the obtained dependence are constructed.

Keywords: truss, Maxwell's formula - Mora, deflection, induction, Maple

В тех случаях, когда обычные "ручные" методы определения усилий в стержнях фермы не могут быть применены, необходимо составлять систему

уравнений равновесия всех узлов. К такому случаю относится и изучаемая раскосная ферма, решетка которой состоит из двух типов стержней: длиной $c = \sqrt{a^2 + h^2}$ и $g = \sqrt{a^2 + 4h^2}$. В ферме нет ни одного узла, к которому подходят только два стержня с неизвестными усилиями, поэтому метод пошагового вырезания узлов, обычно применяемый в расчетной и учебной практике, здесь неприменим. В ферме нет и сечений Риттера, рассекающих ее на две части по трем стержням. Таким образом, необходимо составить уравнения равновесия всей системы в целом. Справиться с этой задачей может любая система компьютерной математики. В работах [1-8] для составления, решения и анализа решения для плоских решетчатых ферм применялась система Maple. В [9] в этой системе аналитически решена задача о прогибе шпренгельной фермы. Анализ плоских арочных ферм в системе Maple дан в [10-12]. Индуктивный метод для вывода общих зависимостей прогиба и смещения опоры фермы применен в [13-17]. Более сложные задачи о деформировании пространственных ферм решены в [18-22].

В рассматриваемой ферме с n панелями в половине пролета число стержней – $n_s = 8n + 8$, включая три опорные стержня. Число шарниров (узлов) – $m = 4n + 4$. Для этих узлов и составляются уравнения равновесия в проекциях на оси координат.

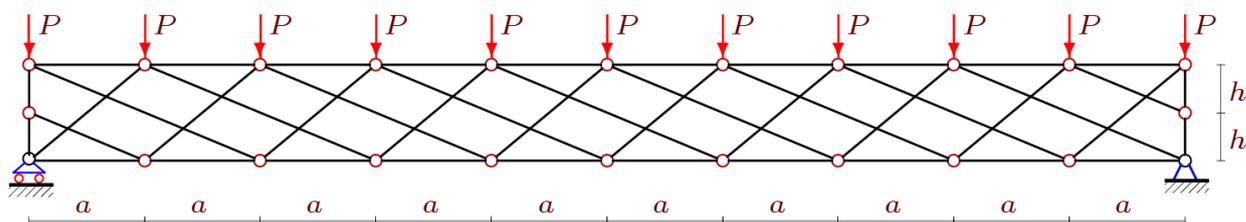


Рисунок 1 — Ферма при нагрузке сверху, $n=4, k=5$

Берем за основу программу [23] вычисления коэффициентов этой системы. В программу необходимо ввести координаты узлов и порядок соединения узлов и стержней. Программа ввода координат (начало координат в левой опоре) на языке системы Maple имеет вид

```
> for i to 2*n+1 do
  x[i]:=a*i-a: y[i]:=0:
od:
> x[i+2*n+2]:=x[i]: y[i+2*n+2]:=2*h:
  x[4*n+4]:=x[2*n+1]: y[4*n+4]:=h:
  x[m-2]:=x[1]: y[m-2]:=-2:
  x[m-1]:=x[2*n+1]: y[m-1]:=-2:
  x[m]:=x[2*n+1]+1: y[m]:=0:
end:
```

Все действия записываются в циклах. Структура соединений узлов и стержней (номер узла в начале стержня и номер в конце) для раскосной

решетчатой фермы несколько сложнее, чем в простых балочных фермах. В данном случае решетка вводится операторами

```

for i to 2*n do
  N[i]:=[i,i+1];
  N[i+4*n+4]:=[i,i+2*n+3];
  N[i+6*n+4]:=[i+1,i+2*n+1];
end:
for i to 2*n+2 do
  N[i+2*n]:=[i+2*n+1,i+2*n+2];
end:
N[4*n+3]:=[1,2*n+2]: N[4*n+4]:=[4*n+4,2*n+1]:
N[8*n+5]:=[4*n+2,4*n+4]:

```

В процессе расчета ферм с разным числом панелей выяснилось, что для ферм с числом панелей равным 3, 6, 9, или $n=3k$, $k=1,2,3\dots$ определитель системы обращается в ноль. Это свидетельствует о *кинематической изменяемости* фермы. Поэтому число панелей задается в виде $n = ((6*k - 3 + (-1)^{(k+1)}) / 4)$ и определяется закономерность коэффициентов решения в зависимости от числа $k=1,2,4,5,7,8\dots$ Для расчета прогиба используется формула Максвелла – Мора в виде:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n_s-3} S_i^{(P)} S_i^{(1)} l_i / (EF).$$

Здесь обозначено: $S_i^{(P)}$ — усилия в стержнях от заданной нагрузки, l_i — длины стержней, $S_i^{(1)}$ — усилия от единичной силы, приложенной к середине нижнего пояса, EF — жесткость стержней. Индукция по десяти фермам для нагрузки сверху (рис. 1) показала, что формула для прогиба имеет один и тот же вид

$$\tilde{\Delta} = (a^3 A_k + h^3 H_k + c^3 C_k + g^3 T_k) / (8h^2), \quad (1)$$

а для коэффициентов получаются следующие полиномиальные выражения

$$A_k = (270k^4 - 180k^3(3 + (-1)^k) + 10k^2(57 + 27(-1)^k) + (76(-1)^k - 300)k - 83(-1)^k - 173) / 64,$$

$$H_k = 2(10k + 1 + (-1)^k), \quad C_k = 6k^2 + 6k((-1)^k - 1) - 1 - 3(-1)^k,$$

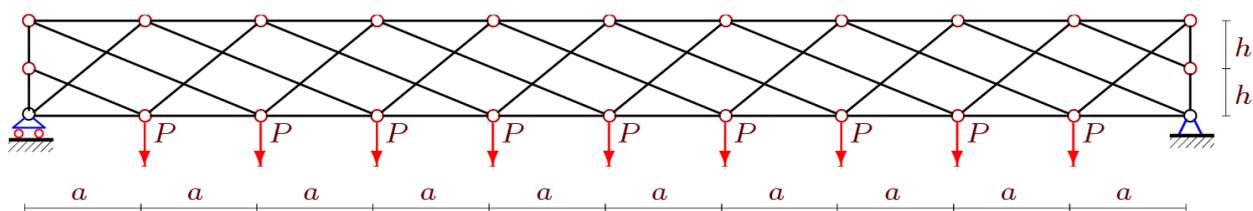
$$T_k = (6k^2 - 6k(1 + (-1)^k) - 3(1 + (-1)^k)) / 8.$$

Аналогично, для нагрузки снизу (рис. 2) применительно к формуле (1) получаем коэффициенты

$$A_k = (270k^4 - 180k^3(3 + (-1)^k)k^3 + 10k^2(57 + 27(-1)^k) - (300 + 308(-1)^k)k + 275 + 109(-1)^k) / 64,$$

$$H_k = 10(2k - 1 - (-1)^k), C_k = 6k^2 - 2k((-1)^k + 3) + 3 + (-1)^k,$$

$$T_k = (6k^2 - 2k(3 + 7(-1)^k) + 9 + 7(-1)^k) / 8.$$

Рисунок 2 — Ферма с нагрузкой снизу, $n=4, k=5$

Кривые на рисунке 3 построены для безразмерного относительного прогиба $\tilde{\Delta} = \Delta EF / (PL)$ при длине пролета $L=50$ м и высоте $h=4$ м для нагрузки сверху и при длине пролета $L=100$ м для нагрузки снизу.

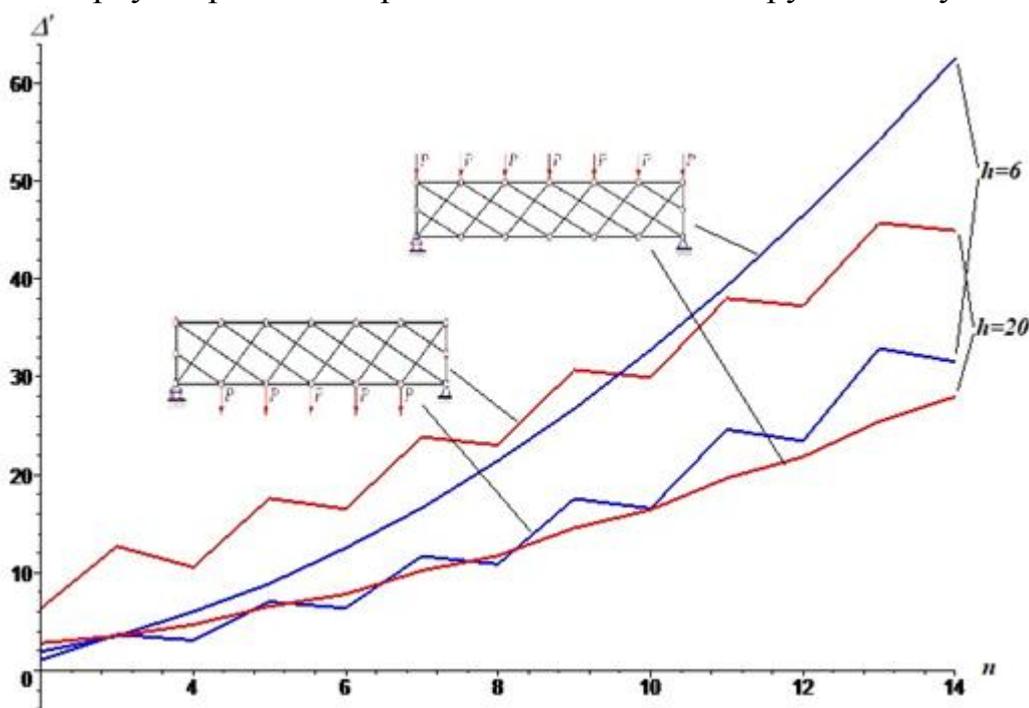


Рисунок 3 — Зависимость прогиба от числа панелей для двух случаев нагружения

Обзор некоторых аналогичных работ, использующих программу [23] в задачах о прогибе плоских ферм, выполнен в [17]. В [24] помимо решения задачи о прогибе приведена *монтажная схема* решетчатой фермы и алгоритм для ее получения. Эта задача важна для проектирования решетки с учетом такого расположения отдельных стержней, при котором они не испытывают вынужденного изгиба в местах пересечения. Индукционный метод достаточно универсален. В [25] этим методом решена задача о деформировании регулярного свайного фундамента, в [26] – получено решение о деформировании упругой подвески микромеханического волнового твердотельного гироскопа.

Библиографический список

1. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба решетчатой балочной фермы распорного типа // Инженерно-строительный журнал. 2015. № 5 (57). С. 58–65.
2. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет балочной фермы с решеткой типа «butterfly» // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 4 (267). С. 2–5.
3. Кирсанов М.Н. Расчет жесткости стержневой решетки // Вестник машиностроения. 2015. № 8. С. 48–51.
4. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет балочной фермы со сложной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 3 (260). С. 7–12.
5. Кирсанов М.Н., Маслов А.Н. Формулы для расчета прогиба балочной многорешетчатой фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2017. № 2 (271). С. 6–10.
6. Kirsanov M.N., Zaborskaya N.V. Deformations of the periodic truss with diagonal lattice // Magazine of Civil Engineering. 2017. № 3. С. 61–67. doi: 10.18720/MCE.71.7.
7. Кирсанов М.Н. Расчет прогиба плоской решетчатой фермы с четырьмя опорами // Транспортное строительство. 2017. №7. С.15–17.
8. Kirsanov M. An inductive method of calculation of the deflection of the truss regular type // Architecture and Engineering. 2016. Т. 1. № 3. С. 14–17.
9. Воропай Р.А. Вывод зависимости прогиба плоской шпренгельной фермы от числа панелей // Постулат. 2017. № 11. С.33.
10. Савиных А. С. Анализ прогиба арочной раскосой фермы, нагруженной по верхнему поясу // Строительство и архитектура. 2017. Т.5. № 3 (6). С. 12–17.
- 11.Компанеец К. А. Расчет смещения подвижной опоры плоской арочной раскосой фермы при нагрузке в середине пролета // Молодежь и наука. 2017. №4.
- 12.Кирсанов М.Н., Степанов А.С. О зависимости деформаций плоской арочной фермы от числа панелей // Строительная механика и расчет сооружений. 2017. № 5 (274). С. 9–14.
- 13.Пережилова Е.Д. Точное решение задачи о смещении подвижной опоры фермы с произвольным числом панелей // Строительство и архитектура. 2017. Т.5. № 3 (6). С. 7–11.
- 14.Кирсанов М.Н., Суворов А.П. Исследование деформаций плоской внешне статически неопределимой фермы // Вестник МГСУ. 2017. Т. 12. № 8 (107). С. 869–875.
- 15.Kirsanov M., Astahov S. The mathematical model of dome covering industrial facility // Architecture and Engineering. 2017. Т. 2. № 2. С. 8-14.
- 16.Кирсанов М.Н. Аналитический расчет, предельный и сравнительный анализ плоской балочной фермы // Научный журнал строительства и архитектуры. 2015. № 3 (39). С. 86–93.
- 17.Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о

- прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 66–73.
18. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой регулярной структуры с плоской гранью // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 2 (259). С. 2–6.
19. Кирсанов М.Н. Изгиб, кручение и асимптотический анализ пространственной стержневой консоли // Инженерно-строительный журнал. 2014. № 5 (49). С. 37–43.
20. Кирсанов М.Н. Особенности аналитического расчета пространственных стержневых систем // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. № 5. С. 11–15.
21. Кирсанов М.Н., Андреевская Т.М. Анализ влияния упругих деформаций мачты на позиционирование антенного и радиолокационного оборудования // Инженерно-строительный журнал. 2013. № 5 (40). С. 52–58.
22. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и оптимизация пространственной балочной фермы // Вестник Московского энергетического института. 2012. № 5. С. 5–8.
23. Кирсанов М. Н. Maple и MapleT. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
24. Кирсанов М.Н. Статический анализ и монтажная схема плоской фермы // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2016. № 5 (39). С. 61–68.
25. Кирсанов М.Н. Дискретная модель свайного фундамента // Инженерно-строительный журнал. 2015. № 3 (55). С. 3–9.
26. Кирсанов М.Н. Жесткость торсионной подвески микромеханического волнового твердотельного гироскопа // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2015. № 3. С. 18–22.