

Аналитический расчет деформации балочной фермы с усиленным верхним поясом

Воропай Руслан Александрович
НИУ «МЭИ»
Студент

Доманов Евгений Викторович
НИУ «МЭИ»
Студент

Аннотация

Плоская статически определимая ферма с прямоугольной решеткой и нисходящими раскосами равномерно загружается по узлам верхнего пояса. В конструкцию введены дополнительные раскосы от узлов нижнего пояса к элементам верхнего. Выводится зависимость прогиба фермы от числа панелей. Применяются операторы системы Maple, алгоритм метода вырезания узлов для определения усилий и индуктивный метод для обобщения решения на произвольное число панелей. Для определения прогиба применяется интеграл Мора.

Ключевые слова: ферма, интеграл Мора, прогиб, индукция, Maple

Analytical calculation of the deformation of a beam truss with a reinforced upper belt

Voropay Ruslan Alexandrovich
NRU «MPEI»
Student

Domanov Evgenii Viktorovich
NRU «MPEI»
Student

Abstract

A flat statically determinate truss with a rectangular grid and downward slanting is uniform loaded along the nodes of the upper belt. In the design, additional braces are built-in from the nodes of the lower belt to the elements of the upper belt. The dependence of the deflection of the truss on the number of panels is derived. The operators of the Maple system, the algorithm of the method of cutting out nodes for determining forces, and the inductive method for generalizing the solution to an arbitrary number of panels are applied. The Mohr's integral is used to determine the deflection.

Keywords: truss, Mohr's integral, deflection, induction, Maple

Стержни верхнего пояса фермы под действием вертикальной нагрузки испытывают достаточно значительные сжимающие усилия и могут потерять устойчивость. Для увеличения устойчивости этих стержней желательно в верхнем поясе использовать более короткие стержни. В ферме на рисунке 1 для этого введены дополнительные раскосы, уменьшающие длину стержней верхнего пояса втрое и, следовательно, критическую силу в девять раз. Ставится задача вывода зависимости прогиба такой конструкции от числа панелей. Для расчета усилий применим программу [1]. Ранее эта программа применялась в ряде аналитических расчетов арочных [2-7], внешне статически неопределимых [8-12] и пространственных ферм [13-19].

В рассматриваемой ферме с n панелями в половине пролета число стержней – $k=16n+4$, включая три опорные стержня. Каждая панель состоит из трех стержней в верхнем поясе, одного стержня нижнего пояса, основного нисходящего и двух дополнительных раскосов. Число шарниров (узлов) – $8n+2$. Для этих узлов и составляются уравнения равновесия в проекциях на оси координат.

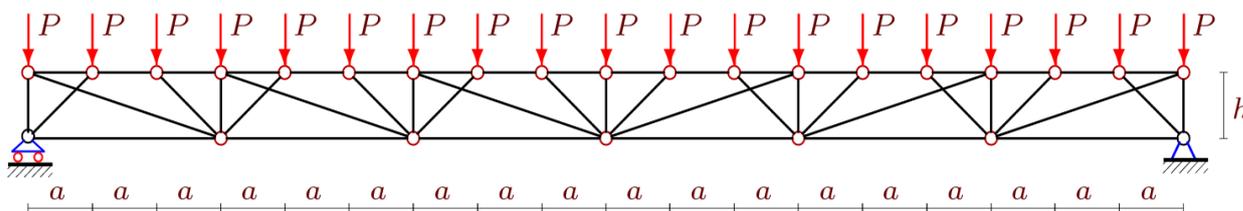


Рисунок 1 — Ферма при нагрузке сверху, $n=3$

В программу необходимо ввести координаты узлов и порядок соединения узлов и стержней. Фрагмент программы ввода координат узлов нижнего пояса (начало координат в левой опоре) на языке системы Maple имеет вид

```
for i to 2*n+1 do x[i]:=3*a*i-3*a: y[i]:=0: end:
верхнего пояса:
for i to 6*n+1 do x[i+2*n+1]:=a*i-a: y[i+2*n+1]:=h:
od;
```

Порядок соединений узлов и стержней вводится операторами специальными векторами $N[i]$, содержащими номера концов соответствующего стержня (по аналогии с заданием графа в дискретной математике). Решение системы линейных уравнений в символьной форме (задействованы возможности системы Maple) дает выражения для усилий во всех стержнях. Для вычисления прогиба используется интеграл Мора в виде:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{k-3} S_i^{(P)} S_i^{(1)} l_i / (EF).$$

Здесь обозначено: $S_i^{(P)}$ — усилия в стержнях от заданной нагрузки, l_i — длины стержней, $S_i^{(1)}$ — усилия от единичной силы, приложенной к середине

нижнего пояса, EF — жесткость, одинаковая для всех стержней фермы. Индукция по 16 фермам дает формулу для прогиба вида

$$\Delta = (a^3 A_n + h^3 H_n + c^3 C_n) / (2h^2 EF), \quad (1)$$

При обнаружении общего члена последовательности коэффициентов при a^3 потребовалось проанализировать 16 выражений прогиба и получить следующие натуральные числа: 87, 1170, 5679, 17664, 42795, 88362, 163275, 278064, 444879, 677490. Выявить общий член этой последовательности затруднительно. Оператором `rgf_findrecur` пакета `genfunc` системы Maple для членов этой последовательности получено следующее линейное однородное рекуррентное уравнение пятого порядка

$$A_n = 5A_{n-1} - 10A_{n-2} + 10A_{n-3} - 5A_{n-4} + A_{n-5}.$$

С помощью оператора `rsolve` найдено решение рекуррентного уравнения, задающее искомую формулу для коэффициента при a^3

$$A_n = (135n^3 + 51n - 12) / 2.$$

Аналогично находим, что коэффициент H_n удовлетворяет однородному уравнению $H_n = 3H_{n-1} - 3H_{n-2} + H_{n-3}$ и имеет вид $H_n = n(2 + 3n)$. Для коэффициента C_n решение имеет вид $C_n = 3n^2$.

Кривые на рисунке 2 построены по формуле (1) для безразмерного относительного прогиба $\tilde{\Delta} = \Delta EF / (P_0 L)$ при длине пролета $L=100$ м. Здесь обозначена суммарная нагрузка $P_0 = P(6n + 1)$. Длина панели зависит от пролета: $a = L / (6n)$.

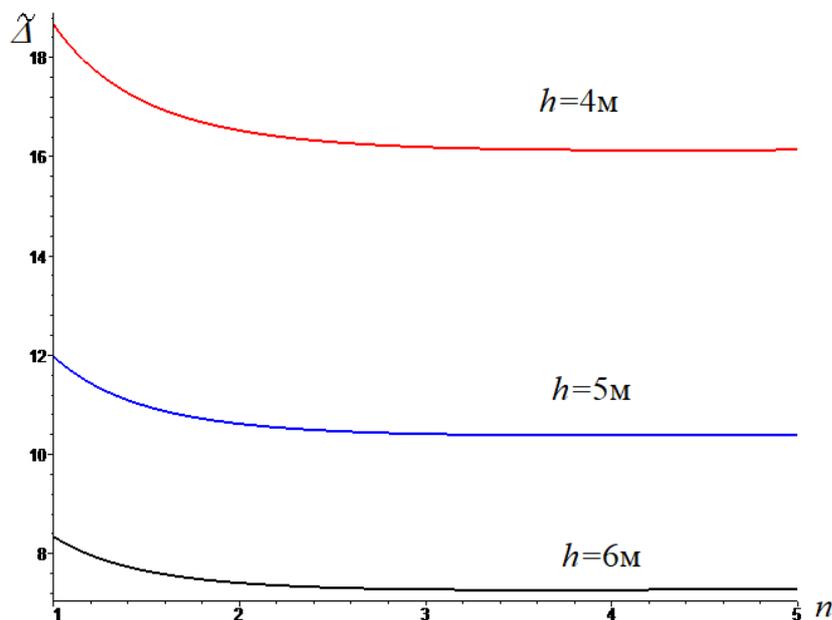


Рисунок 2 — Зависимость прогиба от числа панелей

Число панелей почти не влияет на величину прогиба в такой постановке. С увеличением высоты фермы прогиб резко уменьшается.

Обзор некоторых аналогичных работ, использующих программу [1] в задачах о прогибе плоских ферм, выполнен в [11, 20, 21]. Прогиб плоских ферм различной конструкции в аналитической форме найден в [25-31].

Решетчатые фермы методом индукции с применением системы Maple рассчитаны в [9, 22, 24, 32, 33].

Библиографический список

1. Кирсанов М.Н. Maple и Maple. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
2. Савиных А.С. Анализ прогиба арочной раскосой фермы, нагруженной по верхнему поясу. // Строительство и архитектура. 2017. Том 5. Выпуск 3 (6). С. 12-17.
3. Компанеец К.А. Расчет смещения подвижной опоры плоской арочной раскосой фермы при нагрузке в середине пролета // Молодежь и наука. 2017. №4.
4. Рахматулина А.Р., Смирнова А.А. Вывод зависимости прогиба арочной фермы от числа панелей в системе Maple//Материалы Всероссийской научно-практической конференции «45 лет отрасли легких металлоконструкций: от модуля Кисловодск до модуля Пятигорск» Пятигорск: Издательство ПФ СКФУ, 2017. С.85–88.
5. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба арочной фермы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. № 5. С. 50–55
6. Кирсанов М.Н., Степанов А.С. О зависимости деформаций плоской арочной фермы от числа панелей // Строительная механика и расчет сооружений. 2017. № 5. С. 9–14.
7. Широков А. С. Индуктивный вывод зависимости прогиба и смещения опоры арочной фермы от числа панелей в системе Maple // Международный научный семинар «Нелинейные модели в механике, статистике, теории поля и космологии» -GRACOS-17. Казань: Изд-во Академии наук РТ, 2017. С. 267–272.
8. Кирсанов М.Н., Суворов А.П. Исследование деформаций плоской внешне статически неопределимой фермы // Вестник МГСУ. 2017. Т. 12, № 8 (107). С. 869–875.
9. Кирсанов М.Н. Расчет прогиба плоской решетчатой фермы с четырьмя опорами // Транспортное строительство. 2017. №7. С.15-17.
10. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба распорной фермы с произвольным числом панелей // Механизация строительства. 2017. № 3 (873). С. 26-29.
11. Осадченко Н.В. Расчёт прогиба плоской неразрезной статически определимой фермы с двумя пролётами // Постулат. 2017. №12. С. 28.
12. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба решётчатой балочной фермы распорного типа // Инженерно-строительный журнал. 2015. № 5 (57). С. 58–65.
13. Кирсанов М.Н. Изгиб, кручение и асимптотический анализ пространственной стержневой консоли // Инженерно-строительный журнал. 2014. № 5 (49). С. 37-43.
14. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование жесткости

- пространственной статически определимой фермы // Вестник МГСУ. 2017. Т. 12. № 2 (101). С. 165–171.
15. Кирсанов М.Н. Особенности аналитического расчета пространственных стержневых систем // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. № 5. С. 11-15.
 16. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой регулярной структуры с плоской гранью // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 2 (259). С. 2-6.
 17. Кирсанов М.Н., Андреевская Т.М. Анализ влияния упругих деформаций мачты на позиционирование антенного и радиолокационного оборудования // Инженерно-строительный журнал. 2013. № 5 (40). С. 52–58.
 18. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и оптимизация пространственной балочной фермы // Вестник Московского энергетического института. 2012. № 5. С. 5–8.
 19. Kirsanov M.N. Analysis of the buckling of spatial truss with cross lattice // Magazine of Civil Engineering. 2016. № 4. С. 52–58. doi: 10.5862/MCE.64.5.
 20. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 66–73.
 21. Кийко Л.К. Аналитическая оценка прогиба арочной фермы под действием ветровой нагрузки // Научный вестник. 2016. № 1 (7). С. 247–254.
 22. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба и усилий в решетчатой ферме // Механизация строительства. 2017. 4 (874). С. 20–23.
 23. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба двухпролетной плоской фермы // Механизация строительства. 2017. № 5. С. 35–38.
 24. Кирсанов М.Н. Зависимость прогиба плоской решетчатой фермы от числа панелей // Механизация строительства. 2017. № 10. С. 24–27.
 25. Kirsanov M.N., Zaborskaya N.V. Deformations of the periodic truss with diagonal lattice // Magazine of Civil Engineering. 2017. № 3. С. 61–67. doi: 10.18720/MCE.71.7
 26. Кирсанов М.Н. Аналитический метод расчета прогиба плоской фермы со сложной решеткой шпренгельного типа // Транспортное строительство. 2017. №5. С.11–13.
 27. Кирсанов М.Н. Аналитическая оценка прогиба и усилий в критических стержнях арочной фермы // Транспортное строительство. 2017. №9. С. 8–10.
 28. Кирсанов М.Н. Анализ усилий и деформаций в корабельном шпангоуте, моделируемом фермой // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2017. Т. 9. № 3. С. 560–569.
 29. Кирсанов М.Н. К выбору решетки балочной фермы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. №3. С. 23–27.
 30. Кирсанов М.Н. Статический анализ и монтажная схема плоской фермы // Вестник государственного университета морского и речного флота им.

- адмирала С.О. Макарова. 2016. № 5 (39). С. 61–68.
- 31.Воропай Р.А. Вывод зависимости прогиба плоской шпренгельной фермы от числа панелей // Постулат. 2017. № 11. С.33
- 32.Воропай Р.А., Доманов Е.В. Индуктивный вывод зависимости прогиба плоской решетчатой фермы от числа панелей в системе Maple // Постулат. 2017. № 12. С.11.
- 33.Кирсанов М.Н., Маслов А.Н. Формулы для расчёта прогиба балочной многорешётчатой фермы // Строительная механика и расчёт сооружений. 2017. № 2 (271). С. 6–10.