

## Расчет прогиба плоской внешне статически неопределимой стержневой рамы

*Грибова Ольга Валерьевна*

*НИУ "МЭИ"*

*Ассистент*

### Аннотация

Стержневая рама опирается на три подвижные и одну неподвижную шарнирную опору. Выводятся формулы для прогиба фермы при четырех видах нагрузок. Зависимость прогиба фермы от числа панелей находится с применением специальных операторов системы компьютерной математики Maple и метода индукции. Жесткости всех стержней предполагаются одинаковыми. Для определения прогиба используется формула Максвелла - Мора.

**Ключевые слова:** ферма, формула Максвелла - Мора, прогиб, индукция, Maple

### Calculation of the deflection of flat externally statically indefinable core frame

*Gribova Olga Valeryevna*

*NRU "MPEI"*

*Assistant*

### Abstract

Stretch frame is supported by three movable and one fixed hinge support. Derived formulas for the deflection of the truss under four types of loads. The dependence of the deflection of a farm on the number of panels is found using special operators of the computer mathematics system Maple and the method of induction. The stiffnesses of all rods are assumed to be the same. To determine the deflection, the Maxwell-Mora formula is used.

**Keywords:** truss, Maxwell's - Mohr formula, deflection, kinematic variability, induction, Maple

Известны аналитические расчеты прогиба арочных ферм различной конструкции [1-13]. Всех их объединяет метод расчета (индуктивный с применением системы Maple). Большая часть таких расчетов дает зависимость прогиба от одного параметра, например числа панелей в ригеле. Значительно сложнее и полезней решения, содержащие два параметра. Такое решение предлагается в настоящей работе.

П-образная ферма (рис. 1, разработка профессора Кирсанова М.Н.) может работать как рамная конструкция в составе некоторого пространственного сооружения (ангара, покрытия, склада), в котором эти

рамы объединены дополнительными горизонтальными связями. В ферме с  $2n$  панелями в ригеле и по  $m$  панелей в боковых частях содержатся  $K = 8(n + m) + 18$  стержней, включая пять стержней, моделирующие опоры. Расчет усилий в стержнях производится по программе [14], в которой используется метод вырезания узлов. Расчет начинается с нумерации узлов и стержней (рис. 2), задания координат узлов и порядка соединения стержней. Здесь применяются приемы теории графов. Данную ферму можно рассматривать как граф (очевидно, не плоский и не планарный).

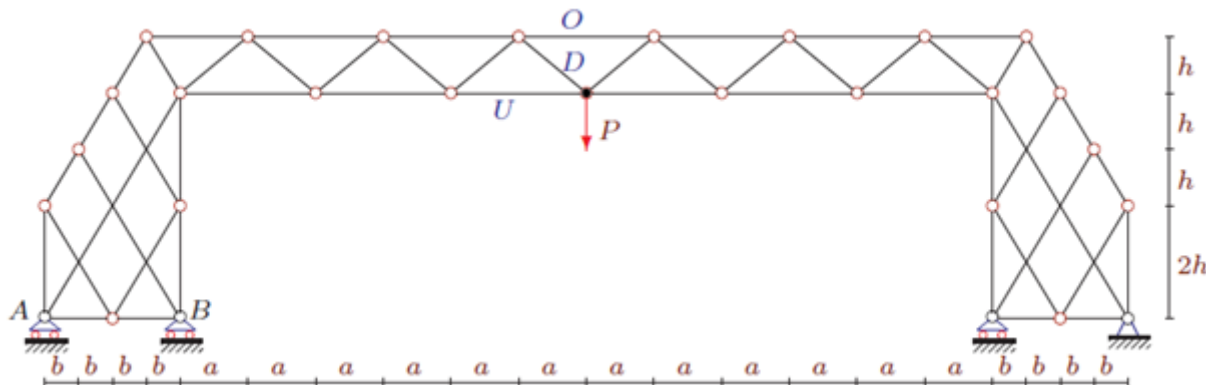


Рисунок 1 — Ферма нагружена сосредоточенной силой.  $m=2, n=3$

В системе Maple образуется матрица  $G$  коэффициентов системы уравнений равновесия узлов в проекциях на оси. Нечетные уравнения соответствуют проекциям на горизонтальную ось  $x$ , четные — на ось  $y$ . Этот фрагмент программы на языке Maple имеет вид

```
> m0:=8*n+8*m+18: # число стержней фермы с опорами
> for i to m0 do
>   Lxy[1]:=x[N[i][2]]-x[N[i][1]]:
>   Lxy[2]:=y[N[i][2]]-y[N[i][1]]:
> L[i]:=subs(a^2+h^2=c^2,sqrt(Lxy[1]^2+Lxy[2]^2));
> for j to 2 do
>   j1:=2*N[i][2]-2+j:
>   if j1<=m0 then G[j1,i]:=-Lxy[j]/L[i]:fi;
>   j1:=2*N[i][1]-2+j:
>   if j1<=m0 then G[j1,i]:= Lxy[j]/L[i]:fi;
> od;
> od;
```

Здесь  $L_{xy}$  — проекции стержней на оси координат. Для сокращения формы результата выполнена подстановка  $\text{subs}(a^2+h^2=c^2\dots)$ . Расчет усилий дает их аналитические выражения, используемые далее в формуле Максвелла - Мора для определения перемещения. В общем случае, если не учитывать моменты и перерезывающие силы, она имеет вид

$$\Delta = \sum_{i=1}^{K-5} S_i^{(P)} S_i^{(1)} l_i / (EF).$$

Здесь обозначено:  $S_i^{(P)}$  — усилия в стержнях от заданной нагрузки,  $l_i$  — длины стержней,  $S_i^{(1)}$  — усилия от единичной силы, приложенной к узлу нижнего пояса в середине ригеля (шарнир выделен темной точкой),  $EF$  — жесткость стержней. В случае нагрузки одной силой (рис. 1) формула Максвелла – Мора упрощается  $\Delta = P \sum_{i=1}^{K-5} (S_i^{(1)})^2 l_i / (EF)$ . Вывод формул зависимости прогиба от  $m$  и  $n$  производится в два этапа. Сначала при фиксированном числе  $m=1$  методом индукции по некоторому числу ферм с последовательно увеличивающимся числом панелей  $n$  находится общая формула вида

$$\Delta = P(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3 + C_4 b a^2) / (h^2 EF), \tag{1}$$

где  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $f = \sqrt{h^2 + b^2}$ . Затем, это же повторяется для  $m=2$ ,  $m=3$  и т.д., пока не выясняется зависимость результата от  $m$ . Решающую роль здесь играют операторы системы Maple, позволяющие находить общие члены последовательностей методом составления и решения рекуррентных уравнений. В некоторых случаях приходится менять очередность анализа — сначала по  $m$ , потом по  $n$ .

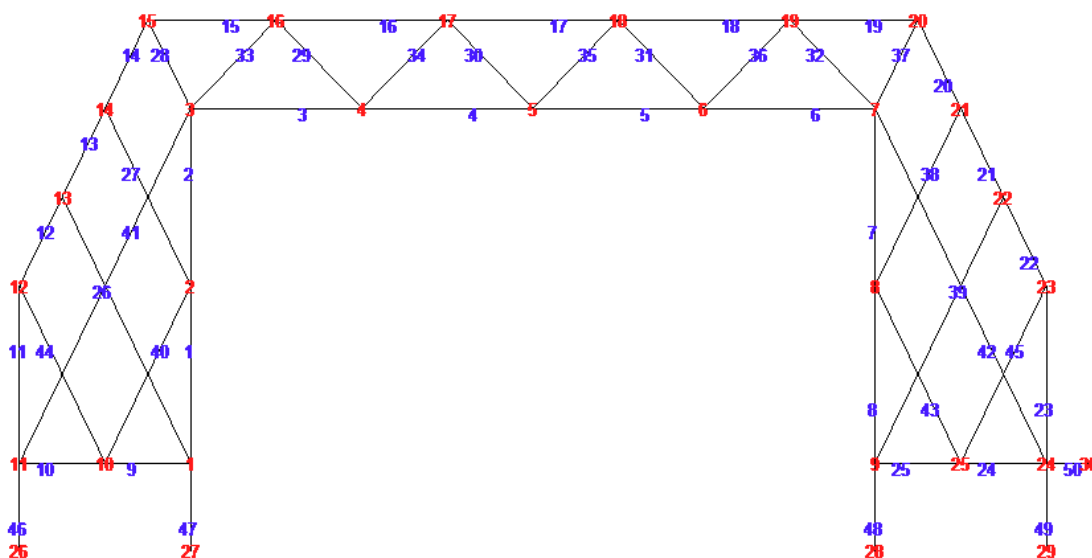


Рисунок 2 — Нумерация стержней и узлов.  $m=2$ ,  $n=2$

В результате были получены следующие выражения для коэффициентов:

$$C_1 = n(8n^2 + 1) / 3, C_2 = n, C_3 = m, C_4 = 0.$$

Одновременно можно найти реакции опор и выражения для усилий в наиболее растянутых и сжатых стержнях:

$$Y_A = 0, Y_B = P / 2,$$

$$U = Pa(2n - 1) / (2h), D = Pc / (2h), O = -Pan / h$$

Если единичную горизонтальную силу приложить к левой подвижной опоре А, то получим горизонтальное смещение этой опоры:

$$\delta_A = 2P(A_1h^3 + A_2ba^2 + A_3b^2a + A_4f^3 + A_5b^3) / (hbEF), \quad (2)$$

$$A_1 = m, A_2 = n^2(-1)^m(2 - (-1)^m), A_3 = A_4 = A_5 = 0$$

Более сложные случаи нагружения также позволяют вывести аналогичные формулы. Для всех случаев нагружения вид решений (1) и (2) не меняется. Меняются только коэффициенты. При загрузке нижнего пояса ригеля равномерной нагрузкой (рис. 3) имеем следующие зависимости:

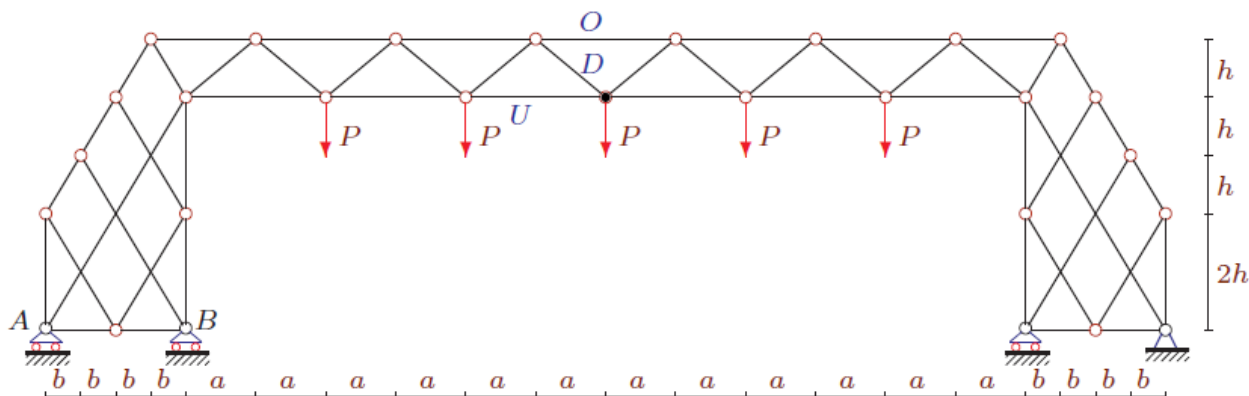


Рисунок 3 — Ферма нагружена по нижнему поясу ригеля.  $m=2, n=3$

$$C_1 = n^2(10n^2 - 1) / 3, C_2 = n^2, C_3 = m(2n - 1), C_4 = 0$$

$$Y_A = 0, Y_B = P(2n - 1) / 2$$

$$U = Pa(2n^2 - 1) / (2h), D = Pc / (2h), O = -Pan^2 / h$$

$$A_1 = m(2n - 1), A_2 = (-1)^m n(4n^2 - 1) / (2 + (-1)^m), A_3 = A_4 = A_5 = 0$$

Если ферма нагружена по всему верхнему поясу (рис. 4), то выражения для коэффициентов следующие

$$C_1 = 2n^2(5n^2 + 1) / 3, C_2 = n^2,$$

$$C_3 = (-1 + 4(2 + n)m + (2m - 3)\cos 2\varphi - 4(\sin \varphi - \cos \varphi)) / 2$$

$$C_4 = -8n^2(1 + (-1)^m), \varphi = \pi m / 2,$$

$$Y_A = P(4 - (-1)^m) / 2, Y_B = P(2n + 4 + (-1)^m) / 2,$$

$$U = P(an^2 - 2b(1 + (-1)^m)) / h, D = 0, O = -U,$$

$$A_1 = (n(2m(1 + m) + 1 + (3 - 2m)\cos 2\varphi - 4(\cos \varphi - \sin \varphi)) / 2 - 10m + 11 + 16(\sin \varphi - \cos \varphi) + (2m(1 + m) + 5)\cos 2\varphi) / 4$$

$$A_2 = ((1 + (-1)^m)n / 3 + 4n^3(-1)^m / (2 + (-1)^m)),$$

$$A_3 = -4(1 + (-1)^m)n, A_4 = (1 - (-1)^m - 3m) / 4,$$

$$A_5 = 2(\sin \varphi - \cos \varphi - 1).$$

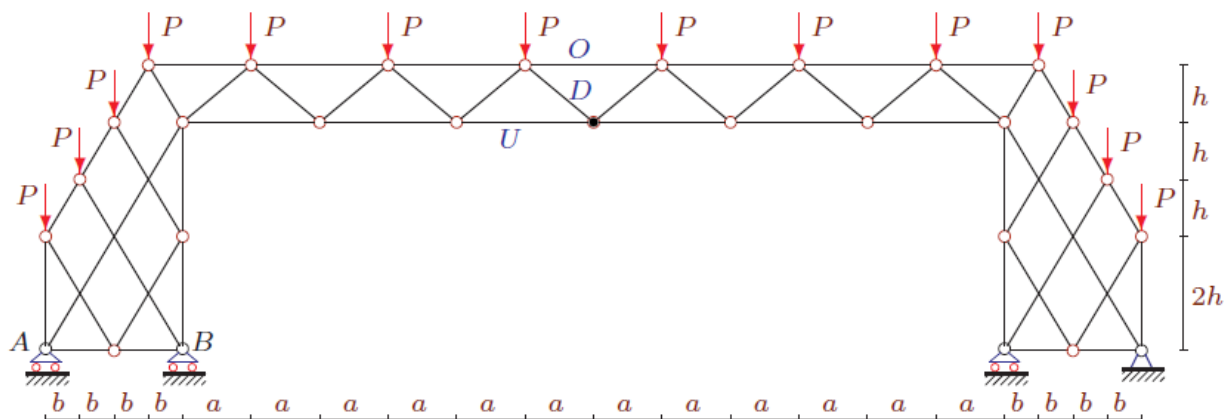


Рисунок 4 — Ферма нагружена по верхнему поясу.  $m=2, n=3$

При загрузении верхнего пояса ригеля (рис. 5) имеем результаты:

$$C_1 = 2n^2(5n^2 + 1) / 3, C_2 = n^2, C_3 = 2m(n + 1), C_4 = -2n^2$$

$$Y_A = 0, Y_B = P(n + 1), \varphi = \pi m / 2,$$

$$U = P(an^2 - b) / h, D = 0, O = -U,$$

$$A_1 = (1 + n)(2m^2 + 2m + 1 + (3 - 2m)\cos 2\varphi - 4(\cos \varphi - \sin \varphi)) / 4,$$

$$A_2 = (-1)^m(n(1 + (-1)^m) + 4n^3) / (2 + (-1)^m),$$

$$A_3 = 2n(1 - 2(-1)^m), A_4 = (1 - (-1)^m) / 2, A_5 = 1 - (-1)^m.$$

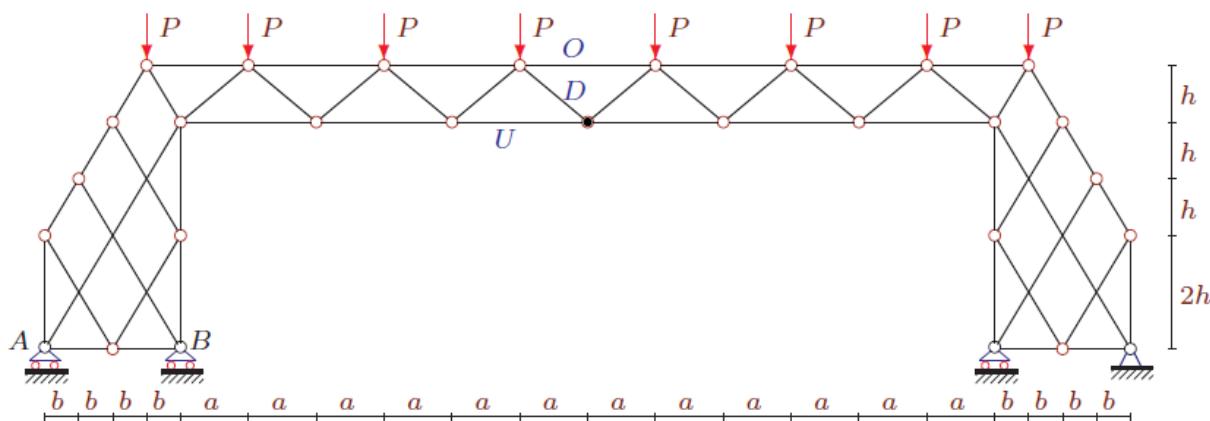


Рисунок 5 — Ферма нагружена по верхнему поясу ригеля

Линейная комбинация четырех полученных решений позволяет рассчитать широкий круг задач с данной конструкцией.

В работах [15-25] приводятся аналогичные расчеты в символьной форме для различных ферм регулярного типа (допускающих индуктивный анализ). В [26-31] этот же метод применяется для более сложных задач пространственного типа.

**Библиографический список**

1. Компанеец К. А. Расчет смещения подвижной опоры плоской арочной раскосной фермы при нагрузке в середине пролета // Молодежь и наука. 2017. №4.
2. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба арочной фермы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. № 5. С. 50–55.
3. Савиных А. С. Анализ прогиба арочной раскосой фермы, нагруженной по верхнему поясу. // Строительство и архитектура. 2017. Том 5. Выпуск 3 (6). С. 12-17.
4. Рахматулина А.Р., Смирнова А.А. Вывод зависимости прогиба арочной фермы от числа панелей в системе Maple//Материалы Всероссийской научно-практической конференции «45 лет отрасли легких металлоконструкций: от модуля Кисловодск до модуля Пятигорск» Пятигорск: Издательство ПФ СКФУ, 2017. С.85–88.
5. Кирсанов М.Н., Степанов А.С. О зависимости деформаций плоской арочной фермы от числа панелей // Строительная механика и расчет сооружений. 2017. № 5. С. 9–14.
6. Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A. The dependence of the deflection of the arched truss loaded on the upper belt, on the number of panels // Научный альманах. 2017. N 2-3(28). С. 268-271.
7. Бирбасов А.А., Шаров И.Ю. Формула для горизонтального смещения опоры арочной фермы от действия нагрузки по нижнему поясу // Вестник научных конференций. 2016. № 2-6(6). С.11-12.
8. Пилягина Л. Зависимость горизонтального смещения опоры арочной фермы от числа панелей // Научный альманах. 2016. №6-2 (19). С. 282-284.
9. Доманов Е. В. Прогиб упругой симметричной арочной фермы под действием сосредоточенной нагрузки в середине пролета// Вестник научных конференций. 2016. № 3-6(7). С. 37-38.
10. Кийко Л.К. Аналитическая оценка прогиба арочной фермы под действием ветровой нагрузки //Научный вестник. 2016. № 1 (7). С. 247-254.
11. Астахов С.В. Вывод формулы для прогиба внешне статически неопределимой плоской фермы под действием нагрузки в середине пролета // Construction and Architecture (2017) Vol. 5. Issue 2 (15): 50–54 DOI 10.12737/2511
12. Кирсанов М.Н., Орлов И.В. Математическая модель упругой работы стержневой конструкции покрытия промышленного здания // Моделирование и механика конструкций. 2017. №5
13. Kirsanov M.N., Lafickova M. G., Nikitina A. S. An inductive derivation of the dependence of the arched truss deflection on the number of panels // Научный альманах. 2017. N 4-3(30). С. 205-208.
14. Кирсанов М. Н. Maple и MapleT. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
15. Кирсанов М.Н. К выбору решётки балочной фермы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. № 3. С. 23-27.

16. Кирсанов М.Н. Расчёт прогиба симметричной балочной фермы в аналитической форме // Строительная механика и конструкции. 2016. Т. 2. № 13. С. 5-9.
17. Кирсанов М.Н., Рахматулина А.Р., Смирнова А.А. Анализ прогиба внешне статически неопределимой балочной фермы // Строительная механика и конструкции. 2017. Т. 1, № 14. С. 31-35.
18. Кирсанов М.Н. Анализ усилий и деформаций в корабельном шпангоуте, моделируемом фермой // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2017. Т. 9, № 3. С. 560-569. doi: 10.21821/2309-5180-2017-9-3-560-569
19. Белянкин Н.А., Бойко А.Ю., Кирсанов М.Н. Аналитический расчёт прогиба балочной фермы с усиленной треугольной решёткой // Строительство и архитектура. 2017. Т. 5, № 2. С. 122-125. doi: 10.12737/article\_5950d11b5663a5.97032989
20. Осадченко Н.В. Расчёт прогиба плоской неразрезной статически определимой фермы с двумя пролётами // Постулат. 2017. №12. С. 28.
21. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба решётчатой балочной фермы распорного типа // Инженерно-строительный журнал. 2015. № 5 (57). С. 58-65.
22. Кирсанов М.Н. Статический анализ и монтажная схема плоской фермы // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2016. № 5 (39). С. 61-68. doi: 10.21821/2309-5180-2016-8-5-61-68
23. Кирсанов М.Н., Маслов А.Н. Формулы для расчёта прогиба балочной многорешетчатой фермы // Строительная механика и расчёт сооружений. 2017. № 2 (271). С. 6-10.
24. Воропай Р.А. Вывод зависимости прогиба плоской шпренгельной фермы от числа панелей // Постулат. 2017. № 11. Ст. 33. 5 с.
25. Воропай Р.А., Доманов Е.В. Индуктивный вывод зависимости прогиба плоской решётчатой фермы от числа панелей в системе Maple // Постулат. 2017. № 12. С. 11. 6 с.
26. Кирсанов М.Н. Особенности аналитического расчёта пространственных стержневых систем // Строительная механика и расчёт сооружений. 2011. № 5. С. 11-15.
27. Кирсанов М.Н. Аналитический расчёт и оптимизация пространственной балочной фермы // Вестник Московского энергетического института. 2012. № 5. С. 5-8.
28. Кирсанов М.Н., Андреевская Т.М. Анализ влияния упругих деформаций мачты на позиционирование антенного и радиолокационного оборудования // Инженерно-строительный журнал. 2013. № 5 (40). С. 52-58.
29. Кирсанов М.Н. Изгиб, кручение и асимптотический анализ пространственной стержневой консоли // Инженерно-строительный журнал. 2014. № 5 (49). С. 37-43.
30. Кирсанов М.Н. Аналитический расчёт пространственной стержневой регулярной структуры с плоской гранью // Строительная механика и

расчёт сооружений. 2015. № 2 (259). С. 2-6.

31. Kirsanov M.N., Zaborskaya N.V. Deformations of the periodic truss with diagonal lattice // Magazine of Civil Engineering. 2017. No. 3. P. 61 –67. doi: 10.18720/MCE.71.7