

О решении обратных задач для нечетких соответствий в среде Wolfram Mathematica

*Осипов Геннадий Сергеевич
Сахалинский государственный университет
д.т.н., заведующий кафедрой Информатики*

*Вашикидзе Нателла Семеновна
Сахалинский государственный университет
доцент кафедры Информатики*

*Филиппова Галина Викторовна
Сахалинский государственный университет
доцент кафедры Информатики*

Аннотация

Изложены теоретические и методологические аспекты решения нечетких реляционных уравнений для обратной задачи с нечеткими соответствиями. Обоснован выбор пакета компьютерной алгебры на базе символьных вычислений *Wolfram Mathematica* как инструментария для исследования. Приведен пример решения обратной и прямой задач для нечетких соответствий.

Ключевые слова: нечеткие продукционные правила, реляционное уравнение, обратные задачи

About solving inverse problems for fuzzy matches in the Wolfram Mathematica

*Osipov Gennadij Sergeevich
Sakhalin State University
Doctor of technical Sciences, Head of the Department of Computer Science*

*Vashakidze Natella Semenovna
Sakhalin State University
Associate Professor, Department of Computer Science*

*Filippova Galina Viktorovna
Sakhalin State University
Associate Professor, Department of Computer Science*

Abstract

Theoretical and methodological aspects of the solution of fuzzy relational equations for inverse problem with fuzzy mappings. Justified the choice of

computer algebra package based on symbolic computation Wolfram Mathematica as a tool for research. An example of solving the inverse and direct tasks for fuzzy mappings

Keywords: fuzzy production rules, relational equation, inverse problems

Введение

В настоящее время во многих практически значимых областях интеллектуальной деятельности человека широко внедряются экспертные системы, основанные на нечетких базах знаний и процедурах нечеткого логического вывода. Так, например, Р.И. Баженов и В.А. Малышев [1] предложили реализацию нечёткой экспертной системы в *SciLab* при помощи компонента *Fuzzy Logic Toolbox* с использованием алгоритма *Mamdani*.

Одним из важнейших направлений исследований является создание нечетких систем поддержки принятия решений в сложных комплексах обеспечения безопасности и жизнеобеспечения транспортных и техногенных объектов [2].

Для решения прямых задач нечеткого моделирования применяется механизм логического вывода, характерной чертой которого является, например, использование уровней истинности предпосылок правил. Более сложной является решение обратной задачи – задачи диагностики [3], когда исходя из текущего состояния системы, необходимо определить причины, которые привели ее в это состояние.

Поэтому целью настоящего исследования является разработка и практическая апробация в пакете компьютерной математики теоретических и методологических основ синтеза нечетких диагностических систем на базе нечетких соответствий.

Основные понятия и определения

Выделим основные этапы обратного метода вывода заключений в системах нечетких продукций:

1. формулировка нечеткого причинно-следственного отношения R между предпосылкой A и заключением B (нечеткой импликацией), которое можно рассматривать как нечеткое подмножество декартова произведения R полного множества предпосылок x (входной переменной) и заключений y (выходной переменной) имеющего функцию принадлежности $\mu_R(x, y)$.

Нечеткая импликация $A \rightarrow B$ представляется в виде нечеткой продукции:

«ЕСЛИ x есть A , ТО y есть B »,

где A и B – нечеткие множества с функциями принадлежности $\mu_A(x)$ и $\mu_B(y)$;

2. задание нечеткого факта:

« y' есть B' »,

где y' – фактическое значение выходной переменной y , определяемое функцией принадлежности $\mu_{B'}(y)$;

3. формирование вывода « x' есть A' ».

Целью обратного нечеткого вывода является установление степени истинности предпосылки нечеткой продукции при заданной степени истинности заключения.

Классический вариант постановки обратной задачи для нечетких реляционных моделей представлен в работах [4, 5].

Пусть задано множество предпосылок x и заключений y связанных нечетким бинарное причинно-следственным отношением:

$$R = \{\mu_R(x, y)/(x, y)\},$$

которое удобно представлять в виде матрицы R . Предпосылки и заключения являются нечеткими множествами A и B на своих базовых множествах, тогда:

$$B = A \bullet R.$$

Необходимо найти такие значения функции принадлежности нечеткого множества A' (степени истинности предпосылок)

$$A' = \{\mu_A(x')/x'\},$$

которые бы соответствовали полученным значениям функции принадлежности нечеткого множества (степеням истинности заключений)

$$B' = \{\mu_B(y')/y'\}.$$

Практическая реализация в Wolfram Mathematica

Пусть $x = \{x_i\}_{i=1, \dots, m} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $y = \{y_j\}_{j=1, \dots, n} = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$.

Очевидно семантическая интерпретация вводимых множеств определяется конкретикой решаемой задачи. Например, в работе [5] осуществляется синтез системы диагностики автомобиля.

Нечеткая импликация представлена матрицей:

$$R_{m \times n} = (r_{ij})_{i=1, \dots, m}^{j=1, \dots, n} = \begin{matrix} & y_1 & y_2 & y_3 \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 & 0.2 \\ 0.8 & 0.4 & 0.9 \\ 0.5 & 1.0 & 0.5 \\ 0.9 & 0.5 & 0.8 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Пусть в результате наблюдений известны заключения:

$$B' = \{0.7/y'_1, 0.3/y'_2, 0.2/y'_3\} \text{ или в матричном виде } b = (0.7 \ 0.3 \ 0.2)^T$$

Необходимо определить степени истинности приведших к этому заключению предпосылок $A' = \{\mu_A(x'_1)/x'_1, \mu_A(x'_2)/x'_2, \mu_A(x'_3)/x'_3, \mu_A(x'_4)/x'_4\}$

или в матричном виде $\xi = (\mu_A(x'_1) \ \mu_A(x'_2) \ \mu_A(x'_3) \ \mu_A(x'_4))^T$

Получим следующее нечеткое матричное уравнение:

$$R^T \bullet \xi = b.$$

Если в качестве t -нормы использовать операцию взятия минимума (т.е. использовать (max-min) композицию), то перейдем к следующей системе нечетких уравнений

$$\max(\min(r_{1i}, \xi_1), \min(r_{2i}, \xi_2), \dots, \min(r_{mi}, \xi_m)) = b_i \quad (i = 1, n)$$

или в развернутом виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max(\min(0.7, \mu_A(x'_1)), \min(0.8, \mu_A(x'_2)), \min(0.5, \mu_A(x'_3)), \min(0.9, \mu_A(x'_4))) = 0.7 \\ \max(\min(0.3, \mu_A(x'_1)), \min(0.4, \mu_A(x'_2)), \min(1.0, \mu_A(x'_3)), \min(0.5, \mu_A(x'_4))) = 0.3 \\ \max(\min(0.2, \mu_A(x'_1)), \min(0.9, \mu_A(x'_2)), \min(0.5, \mu_A(x'_3)), \min(0.8, \mu_A(x'_4))) = 0.2 \end{array} \right.$$

Решение такой системы было получено в среде *Wolfram Mathematica*. На рисунке представлен вариант задания исходных данных задачи.

$$R = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 & 0.2 \\ 0.8 & 0.4 & 0.9 \\ 0.5 & 1.0 & 0.5 \\ 0.9 & 0.5 & 0.8 \end{pmatrix};$$

$$x = \{x1', x2', x3', x4'\};$$

$$b = \{0.7, 0.3, 0.2\};$$

Рис. 1 Исходные данные

Возможный вариант представления нечетких реляционных уравнений приведен на рисунке 2.

```

eq1 = Max[Min[R[[1, 1]], x[[1]]], Min[R[[2, 1]], x[[2]]], Min[R[[3, 1]], x[[3]]],
  Min[R[[4, 1]], x[[4]]] == b[[1]];
eq2 = Max[Min[R[[1, 2]], x[[1]]], Min[R[[2, 2]], x[[2]]], Min[R[[3, 2]], x[[3]]],
  Min[R[[4, 2]], x[[4]]] == b[[2]];
eq3 = Max[Min[R[[1, 3]], x[[1]]], Min[R[[2, 3]], x[[2]]], Min[R[[3, 3]], x[[3]]],
  Min[R[[4, 3]], x[[4]]] == b[[3]];
    
```

Рис. 2 Задание нечетких уравнений

Для получения решения системы уравнений с нечеткими соответствиями использовалась процедура *Reduce*. На рисунке 3 показан формат вызова процедуры и результат решения.

```

In[18]:= Reduce[{eq1, eq2, eq3, 0 <= x <= 1}, x]
Out[18]= 0.7 <= x1' <= 1. && 0 <= x2' <= 0.2 && 0 <= x3' <= 0.2 && 0 <= x4' <= 0.2
    
```

Рис. 3 Решение системы нечетких реляционных уравнений

Таким образом, получено следующее нечеткое множество:

$$A' = \{0.7/x'_1 \leq \mu_A(x'_1) \leq 1.0/x'_1, \mu_A(x'_2) \leq 0.2/x'_2, \mu_A(x'_3) \leq 0.2/x'_3, \mu_A(x'_4) \leq 0.2/x'_4\}.$$

Наивысшую степень истинности имеет первая предпосылка.

Задача имеет множество решений. Очевидно, для проверки результатов решения необходимо провести прямой нечеткий вывод B' с использованием нечеткой импликации $A \rightarrow B$ и нечеткого условия « x' есть A' », по схеме:

$$B' = A' \cdot R = A'(A \rightarrow B).$$

При этом функцию принадлежности нечеткого множества B' можно представить в следующем виде:

$$\mu_{B'}(y) = \sup_x T(\mu_{A'}(x), \mu_R(x, y)) \forall y.$$

Для проверки возьмем следующие значения из полученного интервала решений:

$$A' = \{\mu_A(x'_1) = 0.9/x'_1, \mu_A(x'_2) = 0.1/x'_2, \mu_A(x'_3) = 0.1/x'_3, \mu_A(x'_4) = 0.1/x'_4\}$$

При используемых проверочных данных полученный результат прямого вывода приведен на рисунке 4 и свидетельствует о правильности решения обратной задачи для реляционных уравнений.

```
In[26]:= b1 = Max[Min[0.9, R[[1, 1]]], Min[0.1, R[[2, 1]]], Min[0.1, R[[3, 1]]],
           |-----| минимум           |-----| минимум           |-----| минимум
           Min[0.1, R[[4, 1]]]
           |-----| минимум
Out[26]= 0.7

In[27]:= b2 = Max[Min[0.9, R[[1, 2]]], Min[0.1, R[[2, 2]]], Min[0.1, R[[3, 2]]],
           |-----| минимум           |-----| минимум           |-----| минимум
           Min[0.1, R[[4, 2]]]
           |-----| минимум
Out[27]= 0.3

In[28]:= b3 = Max[Min[0.9, R[[1, 3]]], Min[0.1, R[[2, 3]]], Min[0.1, R[[3, 3]]],
           |-----| минимум           |-----| минимум           |-----| минимум
           Min[0.1, R[[4, 3]]]
           |-----| минимум
Out[28]= 0.2
```

Рис. 4 Результат проверки решения

Выводы

Проведенное исследование позволило довести до практической реализации в среде пакета компьютерной алгебры *Wolfram Mathematica* трудоемкую задачу решения обратной задачи для нечетких соответствий. Предложенное методологическое обеспечение решения проблемы служит основой для разработок нечетких диагностических систем, позволяющих

обрабатывать экспертные заключения о функционировании трудноформализуемых систем с элементами искусственного интеллекта.

Библиографический список

1. Малышев В.А., Баженов Р.И. Реализация простой нечеткой экспертной системы в SciLab // Постулат. 2017. №1(15). С.7
2. Осипов Г.С., Сазонов А.Е., Нечеткая экспертная система оценки уровня безопасности судоходных компаний / Fuzzy expert system of shipping companies safety assessment // European research. 2016. № 3(14). С. 10-11 DOI: 10.20861/2410-2873-2016-14-002
3. Вашакидзе Н.С., Осипов Г.С. Построение диагностических нечетких экспертных систем // Интернет-журнал СахГУ: Наука, образование, общество. 2010. Т. 2010-11. № 2. С. 106.
4. Sanchez E. Resolution of composite fuzzy relation equations // Inform. Contr. 1976. V. 30. P. 38-48.
5. Леоненков А.В. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzy TECH. СПб.: БХВ-Петербург, 2005. 736 с.