

## **Вывод аналитической зависимости прогиба плоской многораскосной фермы от числа панелей**

*Бирбасов Арсений Алексеевич*  
*НИУ "МЭИ"*  
*Студент*

*Фролов Михаил Алексеевич*  
*НИУ "МЭИ"*  
*Студент*

### **Аннотация**

Статически определимая балочная ферма с параллельными поясами загружается по верхнему или нижнему поясу. Усилия в стержнях фермы находятся в символьной форме методом вырезания узлов в системе компьютерной математики Maple. Для определения прогиба используется формула Максвелла - Мора. Обобщение решения для отдельных ферм на произвольное число панелей производится методом индукции.

**Ключевые слова:** ферма, формула Максвелла - Мора, прогиб, индукция, Maple

## **The derivation of the analytical dependence of the deflection of a flat multi-russet truss on the number of panels**

*Birbasov Arseniy Alekseevich*  
*NRU "MPEI"*  
*Student*

*Frolov Mikhail Alekseevich*  
*NRU "MPEI"*  
*Student*

### **Abstract**

Statically defined beam trusses with parallel belts are loaded on the upper or lower belt. Forces in the rods of the truss are obtained in symbolic form by cutting out nodes in the system of computer mathematics Maple. To determine the deflection, the Maxwell-Mora formula is used. A generalization of the solution for individual trusses to an arbitrary number of panels is done by induction

**Keywords:** truss, Maxwell's formula - Mora, deflection, induction, Maple

Расчет ферм обычно производится либо вручную (если ферма несложная), либо с помощью численных методов и программ на основе метода конечных элементов. Появление систем компьютерной математики

позволило получать точные решения в символьной форме. Метод индукции, развитый Кирсановым М.Н. [1-6] и его учениками [7-10] применительно к плоским и пространственным [11-20] фермам, позволяет распространять результаты на произвольное число панелей (стержней) фермы регулярного типа (с периодической решеткой). Симметричная ферма (рис. 1) статически определима и имеет почти периодическую структуру. Два восходящие раскоса по краям фермы не позволяют ферме относиться в полной степени к периодическим структурам. В ферме с  $n$  панелями в половине пролета число стержней  $n_s = 8n + 12$ , включая три опорные стержня.

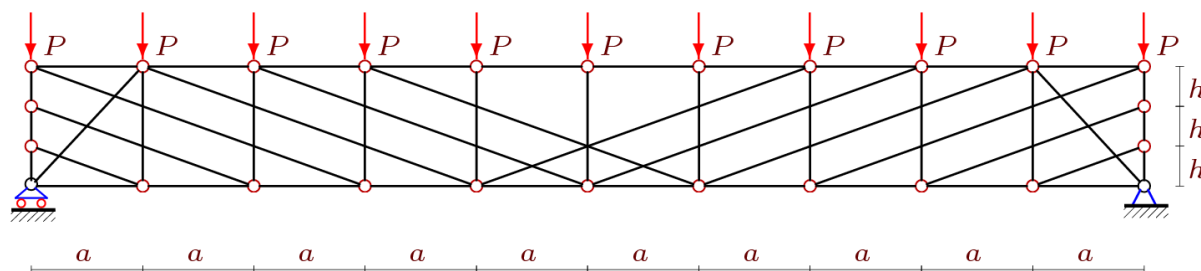


Рисунок 1 — Ферма при нагрузке по верхнему поясу,  $n=5$

Расчет прогиба начинается с определения усилий в стержнях. В программу [1] вводятся координаты узлов. Соответствующий фрагмент программы (на языке системы Maple) имеет вид

```

for i to 2*n+1 do
  x[i]:=a*(i-1); y[i]:=0;
  x[i+2*n+3]:=x[i]; y[i+2*n+3]:=3*h;
od:
for i to 2 do
  x[i+2*n+1]:=0; y[i+2*n+1]:=h*i;
  x[i+4*n+4]:=x[2*n+1]; y[i+4*n+4]:=3*h-h*i;
od:

```

Структура соединений узлов и стержней (номер узла в начале стержня и номер в конце) вводится заданием специальных векторов -стержней с номерами концов стержней

```

for i to 2*n do N[i]:= [i,i+1]; od:
for i to 2*n+4 do
  N[i+2*n]:= [i+2*n+1,i+2*n+2]; od:
  N[4*n+5]:= [1,2*n+2]; N[4*n+6]:= [2*n+1,4*n+6];
for i to n+1 do
  N[i+4*n+6]:= [i+1,i+2*n+1];
  N[i+5*n+7]:= [i+n-1,i+3*n+5];
od:

```

```

N[6*n+9]:=[1,2*n+5];
for i to 2*n-1 do
  N[i+6*n+9]:=[i+2*n+4,i+1];
od:
N[8*n+9]:=[2*n+1,4*n+3];

```

Система линейных уравнений составляется по данным координат узлов и порядку соединения стержней и решается в символьной форме методом обратной матрицы. Для расчета прогиба используется формула Максвелла – Мора в виде:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n_s-3} S_i^{(P)} S_i^{(1)} l_i / (EF).$$

Здесь обозначено:  $S_i^{(P)}$  — усилия в стержнях от заданной нагрузки (равномерно распределенной по верхнему или нижнему поясу),  $l_i$  — длины стержней,  $S_i^{(1)}$  — усилия от единичной силы, приложенной к середине нижнего пояса где определяется прогиб,  $EF$  — жесткость стержней (одинаковая для всех стержней). Расчет десяти ферм с числом панелей от 1 до 10 для нагрузки по верхнему поясу (рис. 1) показал, что формула для прогиба имеет один и тот же вид

$$\Delta = P(a^3 A_n + h^3 H_n + c^3 C_n + d^3 D_n) / (18h^2 EF). \quad (1)$$

Обозначено:  $c = \sqrt{a^2 + h^2}$ ,  $d = \sqrt{a^2 + 9h^2}$ . Замечено, что система линейных уравнений вырождается при  $n=2, 5, 8, 11\dots$ . При  $n = (5 - (-1)^k + 6k) / 4$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$  определитель отличен от нуля. Индукция с использованием операторов Maple из пакета genfunc дает следующие закономерности для коэффициентов

$$\begin{aligned}
A_n &= \left( 270k^4 + \left( 900 - 180(-1)^k \right) k^3 + \left( 1386 - 450(-1)^k \right) k^2 + \right. \\
&\quad \left. + \left( 548 - 1156(-1)^k \right) n - 307(-1)^k + 371 \right) / 64, \\
H_n &= \left( 54k^2 + 162 \left( 1 - (-1)^k \right) k - 243(-1)^k + 27 \right) / 8, \\
C_n &= \left( 54k^2 + 54 \left( 1 - (-1)^k \right) k - 27(-1)^k + 27 \right) / 8, \\
D_n &= \left( (-1)^k + 1 \right) (k + 1) / 2.
\end{aligned}$$

Аналогично, для нагрузки снизу (рис. 2) применительно к формуле (1) получаем коэффициенты

$$\begin{aligned}
A_n &= \left( 270k^4 + \left( 900 - 180(-1)^k \right) k^3 + \left( 1386 - 450(-1)^k \right) k^2 + \right. \\
&\quad \left. + \left( 548 - 1156(-1)^k \right) k - 307(-1)^k + 371 \right) / 64,
\end{aligned}$$

$$H_n = \left( 54k^2 - 54(3(-1)^k + 1)k + 81(-1)^k + 135 \right) / 8 ,$$

$$C_n = \left( 54k^2 + 54(1 - (-1)^k)k - 27(-1)^k + 27 \right) / 8 ,$$

$$D_n = \left( (-1)^k + 1 \right) (k + 1) / 2 .$$

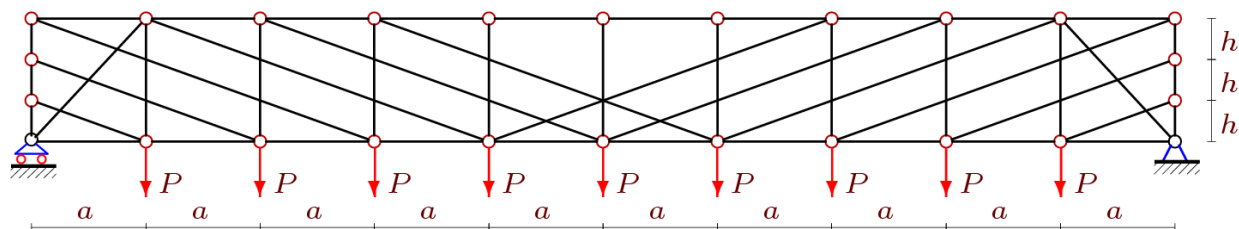


Рисунок 2 — Ферма при нагружении нижней панели,  $n=5$

Зависимость безразмерного прогиба  $\tilde{\Delta} = \Delta EF / (PL)$  от числа панелей для случая нагружения фермы по верху (рис. 1) представлена на рисунке 5. Размеры указаны в метрах,  $L = ak$  м.

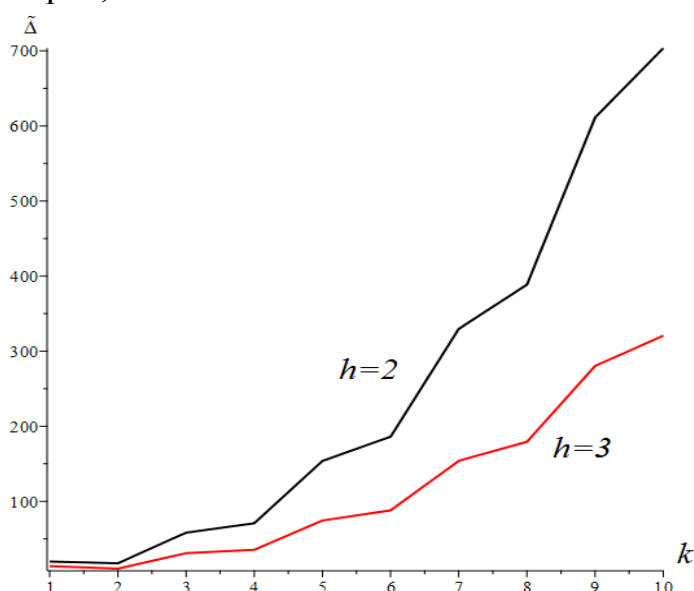


Рисунок 3 — Зависимость прогиба от числа панелей.  
Высота  $h$  в метрах,  $a=3$ м

В [21,22] даны обзоры некоторых точных решений аналогичных задач для плоских ферм.

### Библиографический список

1. Кирсанов М. Н. Maple и MapleT. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
2. Кирсанов М.Н. Вывод формулы для прогиба решетчатой фермы, имеющей случаи кинематической изменяемости // Строительная механика и конструкции. 2017. № 1 (14). С. 27–30.

3. Kirsanov M.N., Zaborskaya N.V. Deformations of the periodic truss with diagonal lattice. Magazine of Civil Engineering. 2017. No. 3. Pp. 61–67. doi: 10.18720/MCE.71.7.
4. Кирсанов М.Н., Маслов А.Н. Формулы для расчета прогиба балочной многорешетчатой фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2017. 2(271). С. 4–10.
5. Kirsanov M. An inductive method of calculation of the deflection of the truss regular type // Architecture and Engineering. 2016. Т. 1. № 3. С. 14-17.
6. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба решетчатой балочной фермы распорного типа // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 58–65. doi: 10.5862/MCE.57.5
7. Бирбасов А.А., Шаров И.Ю. Формула для горизонтального смещения опоры арочной фермы от действия нагрузки по нижнему поясу// Вестник научных конференций. 2016. № 2-6(6). Наука, образование, общество: по материалам международной научно-практической конференции 29 февраля 2016 г. Часть 6. С.11-12.
8. Бирбасов А.А. Аналитический расчет прогиба плоской арочной фермы, нагруженной по верхнему поясу//Научный альманах. 2016. №6-2 (19). С. 198-201.
9. Гранкин М. В., Фролов М.А. Прогиб составной статически определимой фермы под действием равномерной нагрузки//Научный альманах. 2016. N 5-3(19). С. 197-200.
- 10.Фролов М. А. Формула для горизонтального смещения подвижной опоры шпренгельной фермы, нагруженной по верхнему поясу//Научный альманах. 2016. №6-2 (19). С. 302-304.
- 11.Кирсанов М.Н., Андреевская Т.М. Анализ влияния упругих деформаций мачты на позиционирование антенного и радиолокационного оборудования . Инженерно-строительный журнал. 2013. №5(40). С. 52–58
- 12.Кирсанов М.Н. Анализ прогиба фермы прямоугольного пространственного покрытия // Инженерно-строительный журнал. 2015. №1(53). С. 32–38.
- 13.Кирсанов М.Н. Аналитический расчет балочной фермы с увеличенным подферменным пространством// Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 5. С. 21-25.
- 14.Кирсанов М.Н. Напряженное состояние и деформации прямоугольного пространственного стержневого покрытия // Научный вестник ВГАСУ. Строительство и архитектура. 2016. №1(41). С. 93-100.
- 15.Kirsanov M. N. Analysis of the buckling of spatial truss with cross lattice // Magazine of Civil Engineering. 2016. No. 4. Pp. 52-58. DOI: 10.5862/MCE.64.5
- 16.Кирсанов М.Н. Оценка прогиба и устойчивости пространственной балочной фермы// Строительная механика и расчет сооружений. 2016. 5(268). С.19-22.
- 17.Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование жесткости пространственной статически определимой фермы// Вестник МГСУ. 2017. Т. 12. Вып. 2

- (101). С. 165–171
18. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба фермы пространственного покрытия с крестообразной решеткой // Инженерно-строительный журнал. 2016. № 4 (64). С. 52-58.
19. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой регулярной структуры с плоской гранью // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 2. С. 2-6.
20. Кирсанов М.Н. Изгиб, кручение и асимптотический анализ пространственной стержневой консоли // Инженерно-строительный журнал. 2014. №5(49). С. 37–43. doi: 10.5862/МСЕ.49.4
21. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 66–73.
22. Осадченко Н.В. Расчёт прогиба плоской неразрезной статически определимой фермы с двумя пролётами // Постулат. 2017. № 12.