

## **Вывод зависимости прогиба плоской фермы с дополнительной боковой опорой от числа панелей в системе Maple**

*Доманов Евгений Викторович*

*НИУ «МЭИ»*

*Студент*

### **Аннотация**

Ферма внешне статически неопределима. Для расчета реакций опор и усилий в стержнях применяется метод составления равновесия всех узлов фермы в проекциях на оси координат. Все расчеты выполняются в символьной форме, что позволяет методом индукции по формуле Максвелла-Мора получить решение поставленной задачи. Рассмотрены случаи равномерного нагружения узлов верхнего и нижнего пояса. Для вывода коэффициентов формулы задействованы операторы системы компьютерной математики Maple. Строятся сравнительные графики полученной зависимости.

**Ключевые слова:** ферма, формула Максвелла - Мора, прогиб, индукция, Maple

### **The derivation of the dependence of the deflection of a flat truss with additional lateral support on the number of panels in the Maple system**

*Domanov Evgenii Viktorovich*

*NRU «MPEI»*

*Student*

### **Abstract**

The truss is externally statically indeterminate. To calculate the reactions of supports and forces in rods, the method of compiling the equilibrium of all nodes of the truss in projections on the axis of coordinates is applied. All calculations are performed in a symbolic form, which allows us to obtain a solution to the problem by the formula Maxwell-Mora and induction method. The cases of uniform loading of the nodes of the upper and lower belt are considered. Operators of the computer mathematics system Maple are used to derive coefficients of the formula. Comparative graphs of the obtained dependence are constructed.

**Keywords:** truss, Maxwell's–Mohra formula, deflection, induction, Maple

Ферма (рис. 1) имеет сдвоенные нисходящие раскосы. Дополнительная боковая опора создает ситуацию внешней статической неопределенности конструкции. Поставлена задача вывода зависимости прогиба фермы (вертикальное смещение среднего узла) от числа панелей. Для расчета величин усилий в стержнях и опорах применим программу [1]. Эта

программа ранее применялась в аналогичных задачах по аналитическому расчету плоских [2-12] и пространственных ферм [13-17]. Для обобщения решений на произвольное число панелей в этих работах использовался метод индукции с использованием операторов системы Maple [18-30].

В ферме с  $n$  панелями в половине пролета общее число стержней –  $n_s = 16n + 6$ , включая четыре опорные стержня. Для узлов фермы составляются уравнения равновесия в проекциях на оси координат.

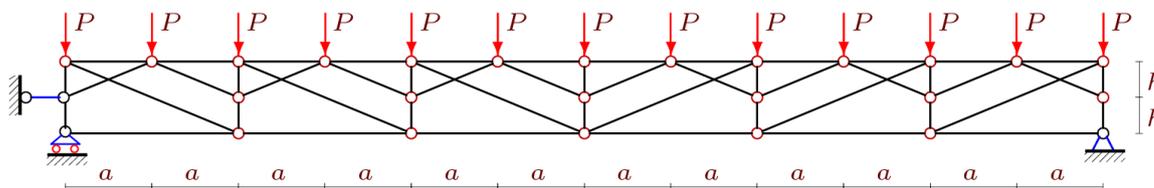


Рисунок 1— Ферма при нагрузке по узлам верхнего пояса,  $n=3$

В программу [1] вводятся координаты узлов и структура соединения стержней. Фрагмент программы ввода координат (начало координат в подвижной опоре) на языке Maple имеет вид

```

for i to 2*n+1 do
  x[i]:=2*a*i-2*a: y[i]:=0:
  x[i+2*n+1]:=2*a*i-2*a:y[i+2*n+1]:=h:
end:
for i to 4*n+1 do
  x[i+4*n+2]:=a*i-a:
  y[i+4*n+2]:=2*h:
end:

```

Порядок соединений узлов и стержней вводится операторами

```

for i to 2*n do
  N[i]:=[i,i+1];
  N[i+8*n]:=[i+2*n+1,2*i+4*n+2];
  N[i+10*n]:=[i+2*n+2,2*i+4*n+2];
end:
for i to 4*n do
  N[i+2*n]:=[i+4*n+2,i+4*n+3];
end:
for i to n do
  N[i+6*n]:=[i+1,2*i+4*n+1];
  N[i+7*n]:=[i+n,2*i+6*n+3];
end:
for i to 2*n+1 do
  N[i+12*n]:=[i,i+2*n+1];
  N[i+14*n+1]:=[2*i+4*n+1,i+2*n+1];
end;

```

Прогиб вычисляется по формуле Максвелла – Мора:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n_s-4} S_i^{(P)} S_i^{(1)} l_i / (EF).$$

Здесь:  $S_i^{(P)}$  — усилия в стержнях от заданной равномерной нагрузки,  $l_i$  — длины стержней,  $S_i^{(1)}$  — усилия от единичной вертикальной силы, приложенной к середине нижнего пояса (там, где определяется прогиб),  $EF$  — жесткость стержней, одинаковая для всех стержней. Расчет двенадцати ферм для нагрузки по верхнему поясу (рис. 1) показал, что формула для прогиба имеет один и тот же вид

$$\Delta = P(a^3 A_n + h^3 H_n + c^3 C_n) / (EFh^2). \quad (1)$$

Основная задача — получить выражения для коэффициентов. При обнаружении общего члена последовательности коэффициентов при  $a^3$  потребовалось проанализировать 12 выражений прогиба и получить следующие числа: 2, 27, 137, 430, 1048, 2169, 4015, 6844, 10958, 16695, 24437, 34602. С помощью оператора `rgf_findrecur` из пакета `genfunc` системы Maple для членов последовательности выведено линейное однородное рекуррентное уравнение шестого порядка

$$A_n = 4A_{n-1} - 5A_{n-2} + 5A_{n-4} - 4A_{n-5} + A_{n-6}.$$

Оператор `rsolve` дает решение рекуррентного уравнения, задающее искомую формулу для коэффициента при  $a^3$  в формуле (1)

$$A_n = (20n^4 - 3(-1)^n + 4n^2 + 3 - 6n) / 12. \quad (2)$$

Аналогично находим, что коэффициент  $H_n$  удовлетворяет более простому однородному уравнению  $H_n = 3H_{n-1} - 3H_{n-2} + H_{n-3}$  и имеет вид

$$H_n = (2n + 3)n. \quad (3)$$

Для коэффициента  $C_n$  решение имеет вид

$$C_n = (4n^2 + 1 - (-1)^n) / 2. \quad (4)$$

Аналогично, для нагрузки снизу (рис. 2) применительно к формуле (1) получаем коэффициенты  $A_n = (5n^2 + 1)n^2 / 6$ ,  $H_n = n^2$ ,  $C_n = n^2$ .

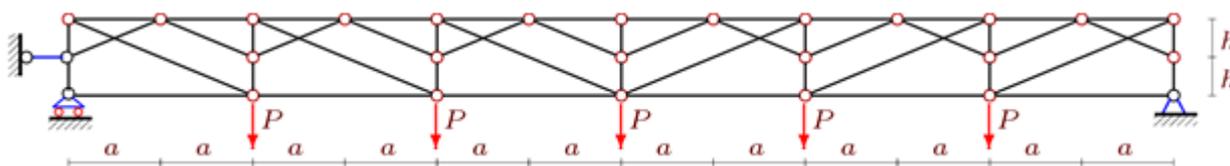


Рисунок 2 — Ферма с нагрузкой снизу,  $n=3$

Кривые на рисунке 3 построены для безразмерного относительного прогиба  $\Delta' = \Delta EF / (P_* L)$  при длине пролета  $L=100$  м и высоте  $h=10$  м и  $h=12$  м для нагрузки сверху и для нагрузки снизу. При этом нагрузка при загрузке верхнего пояса равна  $P = P_* / (4n + 1)$ , а при загрузке нижнего пояса равна  $P = P_* / (2n - 1)$ .

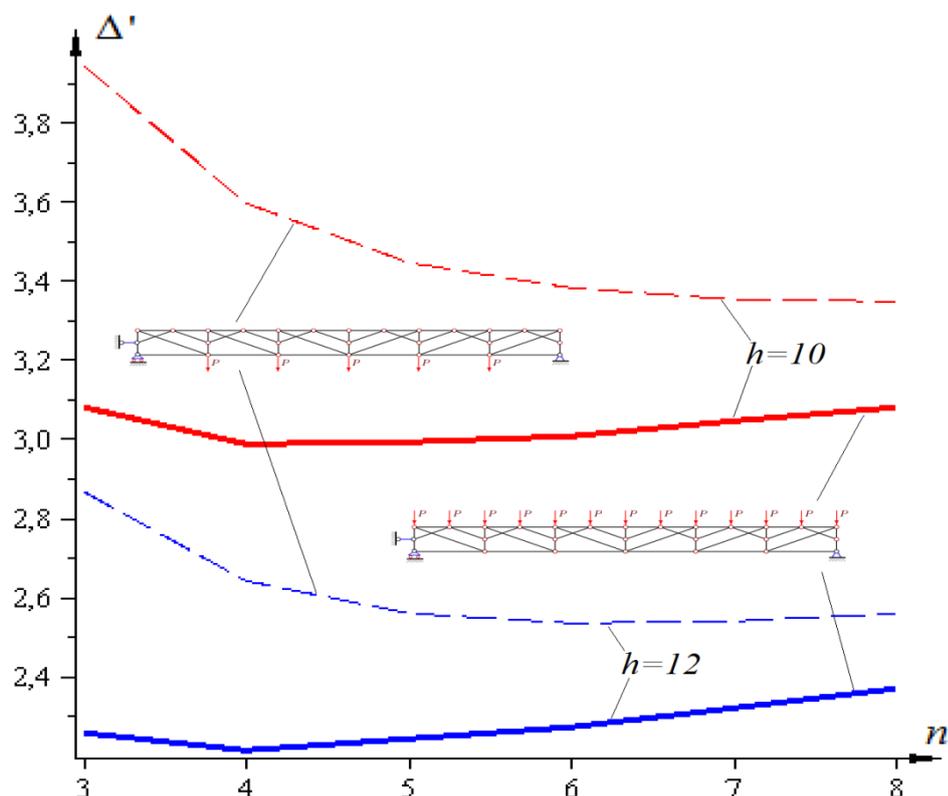


Рисунок 3 — Зависимость прогиба от числа панелей для двух случаев нагружения

Обзор аналитических решений, полученных по программе [1] в задачах о прогибе плоских ферм, выполнен в [30]. В [31] вместе с точным решением задачи о прогибе фермы дан алгоритм построения *монтажной схемы* фермы.

### Библиографический список

1. Кирсанов М. Н. Maple и MapleT. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
2. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба распорной фермы с произвольным числом панелей // Механизация строительства. 2017. №3. С. 26-29.
3. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба и усилий в решетчатой ферме // Механизация строительства. 2017. №4. С. 20-23.
4. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба двухпролетной плоской фермы // Механизация строительства. 2017. № 5. С. 35-38.
5. Кирсанов М.Н. Зависимость прогиба плоской решетчатой фермы от числа панелей // Механизация строительства. 2017. № 10. С. 24-27
6. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба решетчатой балочной фермы распорного типа // Инженерно-строительный журнал. 2015. № 5 (57). С. 58–65.
7. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет балочной фермы с решеткой типа «butterfly» // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 4 (267). С. 2–5.
8. Кирсанов М.Н. Расчет жесткости стержневой решетки // Вестник

- машиностроения. 2015. № 8. С. 48–51.
9. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет балочной фермы со сложной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 3 (260). С. 7–12.
  10. Кирсанов М.Н., Маслов А.Н. Формулы для расчета прогиба балочной многорешетчатой фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2017. № 2 (271). С. 6–10.
  11. Kirsanov M.N., Zaborskaya N.V. Deformations of the periodic truss with diagonal lattice. Magazine of Civil Engineering. 2017. No. 3. Pp. 61–67. doi: 10.18720/MCE.71.7.
  12. Kirsanov M. An inductive method of calculation of the deflection of the truss regular type // Architecture and Engineering. 2016. Т. 1. № 3. С. 14–17.
  13. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой регулярной структуры с плоской гранью // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 2 (259). С. 2–6.
  14. Кирсанов М.Н. Изгиб, кручение и асимптотический анализ пространственной стержневой консоли // Инженерно-строительный журнал. 2014. № 5 (49). С. 37–43.
  15. Кирсанов М.Н. Особенности аналитического расчета пространственных стержневых систем // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. № 5. С. 11–15.
  16. Кирсанов М.Н., Андреевская Т.М. Анализ влияния упругих деформаций мачты на позиционирование антенного и радиолокационного оборудования // Инженерно-строительный журнал. 2013. № 5 (40). С. 52–58.
  17. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и оптимизация пространственной балочной фермы // Вестник Московского энергетического института. 2012. № 5. С. 5–8.
  18. Кирсанов М.Н. Точное решение задачи о прогибе балочной фермы с произвольным числом панелей в системе Maple // Строительство: наука и образование. 2017. Том 7. Выпуск 1 (22).
  19. Belyankin N.A., Boyko A. Y., Kirsanov M.N. Inductive derivation of rod cladding structures deflection in the system Maple // Научный альманах. 2017. N 4-3(30). С.194-197.
  20. Кирсанов М.Н. Сравнительный анализ вариантов схем статически определимой фермы в системе Maple // Международный научный семинар «Нелинейные модели в механике, статистике, теории поля и космологии» -GRACOS-17. Казань: Изд-во Академии наук РТ, 2017. С. 100-105.
  21. Egorov S.S. The inductive method of solving the problem of deflection of the symmetric core structures of complex shape in the system Maple for arbitrary number of panels//Научный альманах. 2017. 3-3 (29). С. 254-257. DOI: 10.17117/na.2017.03.03.254
  22. Широков А. С. Индуктивный вывод зависимости прогиба и смещения опоры арочной фермы от числа панелей в системе Maple // Международный научный семинар «Нелинейные модели в механике,

- статистике, теории поля и космологии» -GRACOS-17. Казань: Изд-во Академии наук РТ, 2017. С. 267-272.
- 23.Воропай Р.А., Доманов Е.В. Индуктивный вывод зависимости прогиба плоской решетчатой фермы от числа панелей в системе Maple // Постулат. 2017. № 12. URL: <http://e-postulat.ru/index.php/Postulat/article/view/941/967>
  - 24.Грибова О. В. Расчет прогиба плоской фермы с нисходящими раскосами и стойками // Постулат. 2017. №12. URL: <http://e-postulat.ru/index.php/Postulat/article/view/974/1000>
  - 25.Грибова О. В. Расчет прогиба плоской внешне статически неопределимой стержневой рамы // Постулат. 2017. №12. URL: <http://e-postulat.ru/index.php/Postulat/article/view/1046/1073>
  - 26.Воропай Р.А., Доманов Е.В. Аналитический расчет деформации балочной фермы с усиленным верхним поясом // Постулат. 2017. №12. URL: <http://e-postulat.ru/index.php/Postulat/article/view/1026/1052>
  - 27.Комерзан Е.В., Свириденко О. В. Аналитический расчет прогиба балочной фермы с приподнятой панелью в нижнем поясе // Постулат. 2017. №12. URL: <http://e-postulat.ru/index.php/Postulat/article/view/1034/1060>
  - 28.Китаев С.С. Расчет регулярных стержневых систем в системе Maple на примере плоской внешне статически неопределимой фермы //Постулат. 2017. №12. URL: <http://e-postulat.ru/index.php/Postulat/article/view/1038/1064>
  - 29.Воропай Р.А. Вывод зависимости прогиба плоской шпренгельной фермы от числа панелей // Постулат. 2017. № 11. URL: <http://e-postulat.ru/index.php/Postulat/article/view/909/935>
  - 30.Осадченко Н.В. Расчёт прогиба плоской неразрезной статически определимой фермы с двумя пролётами // Постулат. 2017. № 12. URL: <http://e-postulat.ru/index.php/Postulat/article/view/958/984>
  - 31.Кирсанов М.Н. Статический анализ и монтажная схема плоской фермы // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2016. № 5 (39). С. 61–68.