УДК 519.61

Основы решения линейных диофантовых уравнений с двумя неизвестными

Осипов Геннадий Сергеевич
Сахалинский государственный университет
д.т.н., заведующий кафедрой Информатики

Вашакидзе Нателла Семеновна
Сахалинский государственный университет
доцент кафедры Информатики

Филиппова Галина Викторовна
Сахалинский государственный университет
доцент кафедры Информатики

Аннотация
Изложены основные теоретические аспекты решения линейных диофантовых уравнений с двумя неизвестными. В качестве основного метода решения выбрано использование алгоритма Евклида. Показано применение функции Эйлера для получения последовательности явных решений уравнений. Практическая апробация исследования выполнена в среде *Wolfram Mathematica,* которая является одной из наиболее мощных пакетов символьной математики и компьютерной алгебры.
Ключевые слова: линейные диофантовы уравнения, компьютерная алгебра

Fundamentals of solving linear Diophantine equations with two unknowns

Osipov Gennadij Sergeevich
Sakhalin State University
Doctor of technical Sciences, Head of the Department of Computer Science

Vashakidze Natella Semenovna
Sakhalin State University
Associate Professor, Department of Computer Science

Filippova Galina Viktorovna
Sakhalin State University
Associate Professor, Department of Computer Science

Abstract
The main theoretical aspects of the solution of linear Diophantine equations with two unknowns are presented. The use of the Euclidean algorithm was chosen as the main decision method. The application of the Euler function to obtain a sequence

of explicit solutions of equations is shown. Practical approbation of the research was carried out in the Wolfram Mathematica environment, which is one of the most powerful packages of symbolic mathematics and computer algebra.
Keywords: linear Diophantine equations, computer algebra

Введение

Исследованию диофантовых уравнений посвящено много публикаций в различные периоды времени [1, 2]. Причем в современных работах, например, [3] диофантовым уравнениям, как основе одного из разделов теории чисел, отводится роль интегратора связей математического образования.

Несмотря на широкий спектр публикаций и до настоящего времени нет однозначно определенного универсального метода исследования и решения такого рода уравнений. С появлением современных средств символьных вычислений на базе пакетов компьютерной математики в целом и алгебры, в частности, эффективность исследований в этом направлении благодаря мощности вычислительной техники, резко возросла и интерес к такого рода фундаментальным и прикладным исследованиям вырос.

Настоящая работа посвящена основам математического обеспечения решения простейших диофантовых уравнений с практической реализацией теоретических положений в среде современного средства компьютерной алгебры – *Wolfram Mathematica*.

Математические основы

Известно [1], что Диофа́нтово (неопределенные) уравнение – это уравнение вида:

$$P(x_1, x_2, ..., x_m) = 0\left(x_i \in \mathbb{Z}\left(i = \overline{1, m}\right)\right)$$

где P – целочисленная функция (например, полином с целыми коэффициентами).

Общий вид линейного уравнения с двумя неизвестными:

$$ax + by = c \;\; (a, b, c, x, y \in \mathbb{Z})$$

Утверждение. Если $\text{НОД}(a,b) \mid c$, то уравнение разрешимо в целых числах.

Рекомендация. Если $\text{НОД}(a,b) \neq 1 \left(\text{НОД}(a,b) \mid c\right)$, то следует разделить на него все коэффициенты уравнения.

Пример 1.

Решить уравнение:

$$5x + 7y = 19 \qquad (1)$$

в целых числах.

Решение.

Очевидно $\text{НОД}(a,b) = 1 \mid 19$, частное решение уравнения $(x_0, y_0) = (1, 2)$. Тогда:

$$\begin{cases} 5\cdot x+7\cdot y=19 \\ 5\cdot 1+7\cdot 2=19 \end{cases} \Rightarrow x-1=\frac{7(2-y)}{5}$$

Для того, чтобы x был целым, необходимо, чтобы $(2-y)\vdots 5 \Rightarrow y=2-5C\ (C\in\mathbb{Z})$. Тогда $x=1+7C$.

Ответ: $\begin{cases} x=1+7C \\ y=2-5C \end{cases} (C\in\mathbb{Z})$ – общее решение уравнения.

Утверждение. Если известно частное решение (x_0, y_0) уравнения $ax+by=c$, то его общее решение определяется по формулам:

$$\begin{cases} x=x_0 \pm \dfrac{b}{\text{НОД}(a,b)}C \\ y=y_0 \mp \dfrac{a}{\text{НОД}(a,b)}C \end{cases} (C\in\mathbb{Z}).$$

Если частное решение исходного уравнения подобрать сложно, то его можно получить по следующему алгоритму:

1. строится вспомогательное уравнение $a\cdot u+b\cdot v=1$;
2. находится частное решение данного уравнения (u_0, v_0);
3. записывается частное решение исходного уравнения:

$$x_0=c\cdot u_0;\ y_0=c\cdot v_0.$$

Пример 2.

Дано уравнение (1), требуется построить его частное решение.

Решение:

1. записываем вспомогательное уравнение $5u+7v=1$;
2. находим его частное решение

$$\left[\begin{array}{l} 7=5\cdot 1+2 \\ 5=2\cdot 2+1 \end{array}\right. \Rightarrow 1=5-2\cdot 2=5-2(7-5\cdot 1)=\underline{3}\cdot 5+(\underline{-2})\cdot 7, \text{ т.е. } (u_0, v_0)=(3,-2)$$

3. $(x_0, y_0)=(57,-38)$

Ответ $(x_0, y_0)=(57,-38)$ – частное решение исходного уравнения.

Замечание. В данном случае общее решение может быть записано в виде:

$$\begin{cases} x=57+7C \\ y=-38-5C \end{cases} (C\in\mathbb{Z}).$$

Очевидно, положив C=-8 данное решение приводится к ранее полученному (см. пример 1)

$$\begin{cases} x=1+7C \\ y=2-5C \end{cases} (C\in\mathbb{Z}).$$

Пример 3.

Для перевозки большого количества ящиков по 170 кг и по 190 кг выделены трехтонные машины. Можно ли ими загружать машины полностью?

Решение:

Пусть x и y количество контейнеров по 170 и 190 кг соответственно, тогда имеем уравнение $170x+190y=3000$.

После сокращения на 10 уравнение примет вид:

$$17x+19y=300 \tag{2}$$

Находим частное решение уравнения $17u+19v=1$.

$$\left[\begin{array}{l}19=17\cdot 1+2\\ 17=8\cdot 2+1\end{array}\right. \Rightarrow 1=17-8\cdot 2=17-8(19-17\cdot 1)=\underline{9}\cdot 17+(-8)\cdot 19;$$

тогда $(u_0,v_0)=(9,-8)\Rightarrow(x_0,y_0)=(2700,-2400)$.

Значит, общее решение исходного уравнения задается формулой

$$\begin{cases} x=2700+19c\\ y=-2400-17c\end{cases}$$

Откуда получаем:

$$-\frac{2700}{19}\le C\le-\frac{2400}{17}\Rightarrow C=-142$$

Ответ $\begin{cases} x=2\\ y=14\end{cases}$.

Использование функции Эйлера

Функция Эйлера $\varphi(n)$ показывает количество натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с ним. При этом полагают по определению, что число 1 взаимно просто со всеми натуральными числами, и $\varphi(1)=1$.

Например, для числа 24 существует 8 меньших его и взаимно простых с ним чисел (1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23), поэтому $\varphi(24)=8$.

Утверждение. Явная формула для нахождения серии решений линейного уравнения $ax+by=c$ имеет вид:

$$\begin{cases} x(t)=ca^{\varphi(b)-1}+bt\\ y(t)=c\dfrac{1-a^{\varphi(b)}}{b}-at\end{cases},$$

где t – произвольный целый параметр.

Пример 4.

Найти значение параметра t при котором решение, полученное с использованием функции Эйлера совпадает с частным решением уравнения (1): $(x_0,y_0)=(1,2)$.

Решение.

$$x(t) = ca^{\varphi(b)-1} + bt \Rightarrow t = \frac{1-19\cdot 5^5}{7} = -8482$$

Ответ. При параметре t=-8482 решение совпадает с частным решением $(x_0, y_0) = (1, 2)$.

Практическая реализация в *Wolfram Mathematica*

На рисунке 1 представлен возможный вариант задания в среде *Wolfram Mathematica* уравнения вида (1), нахождение его решения с помощью процедур *Solve* (решить уравнение), *Reduce* (привести) и получение частного решения с помощью подстановки, задающей значение постоянной.

```
Уравнение = a x + b y == c;
{a, b, c} = {5, 7, 19};

Reduce[Уравнение, {x, y}, Integers]
привести              множество ц
C[1] ∈ Integers && x == 1 + 7 C[1] && y == 2 - 5 C[1]

Solve[Уравнение, {x, y}, Integers]
решить уравнения          множество ı
{{x → ConditionalExpression[1 + 7 C[1], C[1] ∈ Integers],
  y → ConditionalExpression[2 - 5 C[1], C[1] ∈ Integers]}}

ЧастноеРешение = Reduce[Уравнение, {x, y}, Integers] /. C[1] → 0
                 привести                 множество ц···  генерируе
x == 1 && y == 2
```

Рис.1 Нахождение решения уравнения (1)

Для получения решения уравнения (2) необходимо дополнительно задать условие неотрицательности переменных (рисунок 2). Здесь же приведено решение примера 4 с помощью процедуры *Roots* (корни многочлена), возможно также использование процедур *Solve* или *Reduce*.

```
{a, b, c} = {17, 19, 300};
Reduce[Уравнение && x ≥ 0 && y ≥ 0, {x, y}, Integers]
привести                                    множество ц
x == 2 && y == 14

Roots[c a^(EulerPhi[b]-1) + b t == 1, t]
корни многочлена
t == -8482
```

Рис. 2 Решение задач из примеров 2 и 3

Выводы

Проведенное исследование позволило связать воедино теоретические аспекты решения линейных диофантовых уравнений на базе алгоритма Евклида и функции Эйлера с практической реализацией задачи в среде пакета компьютерной алгебры, что позволяет сформировать у обучающегося целостную системную картину единого восприятия сложной математической проблемы и современного эффективного пути ее решения.

Библиографический список

1. Башмакова И.Г. Диофант и диофантовы уравнения. М.: Наука, 1972. 68 с.
2. Степанов С. А. Диофантовы уравнения // Тр. МИАН СССР. 1984. Т.168 С.31–45
3. Жмурова И. Ю., Ленивова А. В. Диофантовы уравнения: от древности до наших дней // Молодой ученый. 2014. №9. С. 1-5. URL: https://moluch.ru/archive/68/11503/ (дата обращения: 15.02.2018).