

## Аналитический расчет величины прогиба решетчатой фермы

*Кирсанов Михаил Николаевич*

*НИУ «МЭИ»*

*Профессор*

*Пахомов Василий Александрович*

*НИУ «МЭИ»*

*Студент*

### Аннотация

Плоская статически определимая решетчатая ферма загружается в центральном узле. Выводится зависимость величины прогиба конструкции от числа панелей. Для решения задачи применяются операторы системы Maple, метод вырезания узлов и индуктивный метод для обобщения частных решений на произвольное число панелей. Для определения прогиба применяется интеграл Максвелла-Мора. Показано, что при некоторых значениях числа панелей ферма становится кинематически изменяемой.

**Ключевые слова:** ферма, интеграл Максвелла-Мора, прогиб, индукция, Maple

## Analytical calculation of the value of the deflection of the lattice truss

*Kirsanov Mikhail Nikolaevich*

*NRU «MPEI»*

*Professor*

*Pakhomov Vasiliy Aleksandrovich*

*NRU «MPEI»*

*Student*

### Abstract

A flat statically determinate trellis truss is loaded in the central node. The dependence of the size of the deflection of the structure on the number of panels is deduced. To solve the problem, operators of the Maple system, the method of cutting out nodes, and an inductive method are used to generalize particular solutions to an arbitrary number of panels. To determine the deflection, the Maxwell-Mohr's integral is used. It is shown that for some values of the number of panels the truss becomes kinematically variable.

**Keywords:** truss, Maxwell -Mohr's integral, deflection, induction, Maple

Решетка фермы высотой  $2h$  (рис 1) имеет раскосы разной длины:  $c = \sqrt{a^2 + h^2}$ ,  $2c$  и  $d = \sqrt{a^2 + 4h^2}$ . Нисходящие раскосы короче, восходящие длиннее. Ставится задача вывода зависимости прогиба такой конструкции от числа панелей. Для расчета усилий применим программу [1]. Ранее эта программа использовалась в некоторых аналитических расчетах арочных [2-5], внешне статически неопределимых [6-9] и пространственных ферм [10-11].

В рассматриваемой ферме с  $n$  панелями в половине пролета число стержней  $-N_s = 8n + 8$ , включая три стержня, моделирующие опоры. Эти стержни предполагаются недеформируемыми и в расчет прогиба не входят. Для узлов фермы составляются уравнения равновесия в проекциях на оси координат.

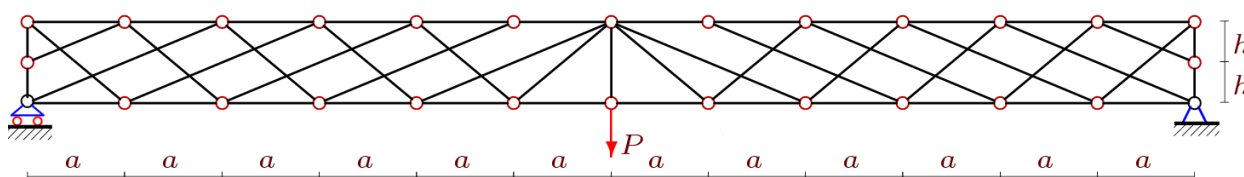


Рисунок 1 — Ферма при  $k=3$ ,  $n=6$

В программу необходимо ввести координаты узлов и порядок соединения узлов и стержней. Фрагмент программы ввода координат узлов нижнего пояса (начало координат в левой опоре) на языке системы Maple имеет вид

```
for i to 2*n+1 do x[i]:=a*i-a: y[i]:=0: od:
```

верхнего пояса:

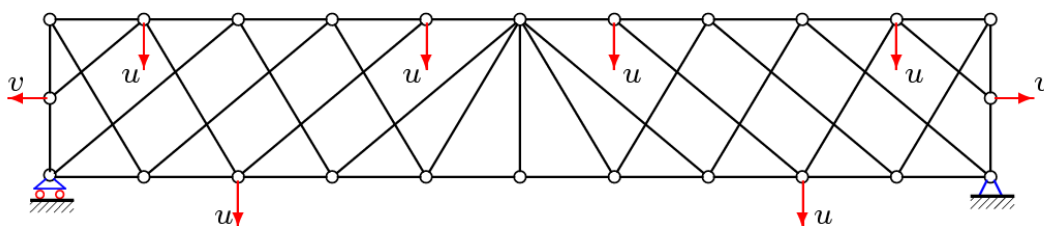
```
for i to 2*n+1 do x[i+2*n+2]:=x[i]:y[i+2*n+2]:=2*h:od:
```

Порядок соединений узлов и стержней вводится операторами специальными векторами, содержащими номера концов соответствующего стержня (по аналогии с заданием плоского графа в дискретной математике). Решение системы линейных уравнений в символьной форме (задействованы операторы системы символьной математики Maple [1]) дает выражения для усилий во всех стержнях. Для вычисления прогиба используется интеграл Мора в виде:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{N_s-3} S_i^{(P)} S_i^{(1)} l_i / (EF).$$

Здесь обозначено:  $S_i^{(P)}$  — усилия в стержнях фермы от заданной нагрузки,  $l_i$  — длины стержней,  $S_i^{(1)}$  — усилия от единичной силы, приложенной к среднему узлу нижнего пояса,  $EF$  — жесткость, одинаковая для всех стержней фермы. Для рассмотренной нагрузки  $S_i^{(P)} = PS_i^{(1)}$ .

Расчет показывает, что при некоторых значениях  $n$  ферма становится кинематически изменяемой (рис. 2).

Рисунок 2 — Схема возможных скоростей узлов при  $n=5$ ,  $va = uh$ 

Расчет проводится при  $n = (6k + 5 - (-1)^k) / 4$ ,  $k = 1, 2, 3$ . Индукция по 16 фермам дает формулу для прогиба вида

$$\Delta = (a^3 A_k + c^3 C_k + h^3 H_k + d^3 D_k) / (2h^2 EF). \quad (1)$$

При обнаружении общего члена последовательности коэффициентов при  $a^3$  потребовалось проанализировать 16 выражений прогиба и получить следующие натуральные числа: 150, 235, 495, 676, 1164, 1477, 2265, 2746, 3906, 4591, 6195, 7120, 9240, 10441, 13149, 14662. Найти общий член этой последовательности обычными методами затруднительно. Оператором `rgf_findrecur` пакета `genfunc` системы Maple для членов этой последовательности легко получить линейное однородное рекуррентное уравнение седьмого порядка

$$A_k = A_{k-1} + 3A_{k-2} - 3A_{k-3} - 3A_{k-4} + 3A_{k-5} + A_{k-6} - A_{k-7}.$$

Оператор `rsolve` находит решение рекуррентного уравнения, задающее искомую формулу для коэффициента при  $a^3$

$$A_k = (18k^3 + 9(5 - (-1)^k)k^2 + (51 - 15(-1)^k)k + 19 - 11(-1)^k) / 32.$$

Аналогично находим, что коэффициент  $C_k$  удовлетворяет однородному уравнению  $C_n = C_{n-1} + C_{n-2} - C_{n-3}$  и имеет вид  $C_k = (2k + 1 - (-1)^k) / 2$ . Для коэффициента  $H_k$  решение имеет вид  $H_k = 5 - (-1)^k$ , а для коэффициента  $D_k$  решение —  $D_k = (2k + 3 + (-1)^k) / 16$ .

Кривые на рисунке 2 построены по формуле (1) для безразмерного относительного прогиба  $\Delta' = \Delta EF / (LP)$  при длине пролета  $L=100$  м. Длина панели зависит от пролета:  $a=L/(2n)$ .

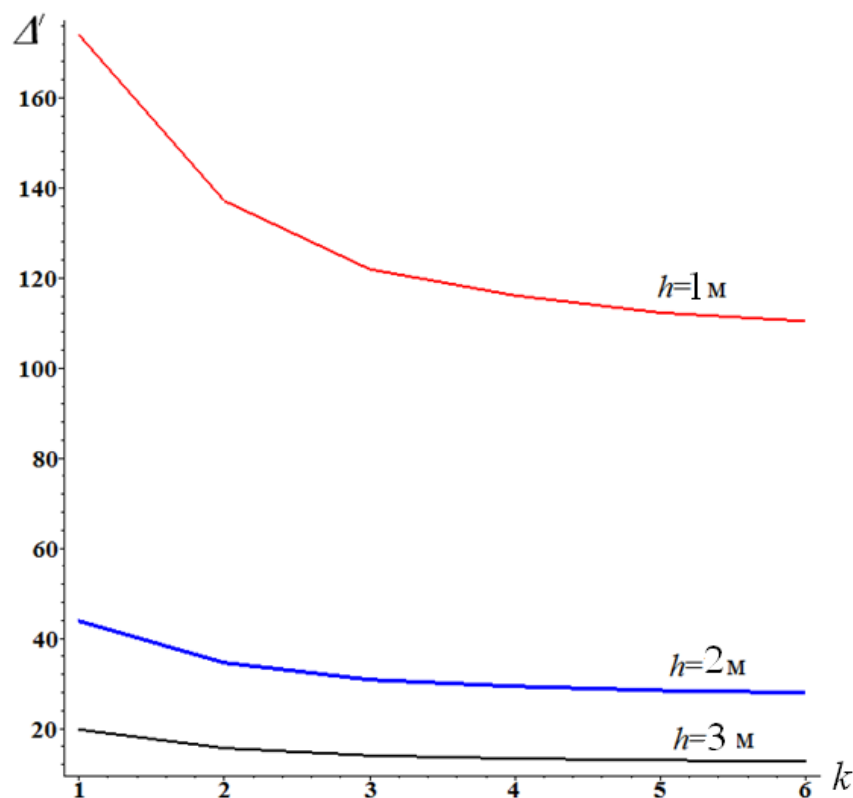


Рисунок 2 — Зависимость прогиба от числа панелей

При  $n > 5$  число панелей почти не влияет на величину прогиба в такой постановке. С увеличением высоты фермы прогиб резко уменьшается.

Обзор некоторых аналогичных работ, использующих программу [1] в задачах о прогибе плоских ферм, выполнен в [8].

### Библиографический список

1. Кирсанов М.Н. Maple и MapleT. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
2. Савиных А.С. Анализ прогиба арочной раскосой фермы, нагруженной по верхнему поясу. // Строительство и архитектура. 2017. Том 5. Выпуск 3 (6). С. 12-17.
3. Компанец К.А. Расчет смещения подвижной опоры плоской арочной раскосой фермы при нагрузке в середине пролета // Молодежь и наука. 2017. №4.
4. Рахматулина А.Р., Смирнова А.А. Вывод зависимости прогиба арочной фермы от числа панелей в системе Maple//Материалы Всероссийской научно-практической конференции «45 лет отрасли легких металлоконструкций: от модуля Кисловодск до модуля Пятигорск» Пятигорск: Издательство ПФ СКФУ, 2017. С.85–88.
5. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба арочной фермы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. № 5. С. 50–55
6. Кирсанов М.Н., Суворов А.П. Исследование деформаций плоской внешне статически неопределимой фермы // Вестник МГСУ. 2017. Т. 12, № 8

- (107). С. 869–875.
7. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба распорной фермы с произвольным числом панелей // Механизация строительства. 2017. № 3 (873). С. 26-29.
  8. Осадченко Н.В. Расчёт прогиба плоской неразрезной статически определимой фермы с двумя пролётами // Постулат. 2017. №12. URL: <http://e-postulat.ru/index.php/Postulat/article/view/958/984>
  9. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба решётчатой балочной фермы распорного типа // Инженерно-строительный журнал. 2015. № 5 (57). С. 58–65.
  10. Кирсанов М.Н., Андреевская Т.М. Анализ влияния упругих деформаций мачты на позиционирование антенного и радиолокационного оборудования // Инженерно-строительный журнал. 2013. № 5 (40). С. 52–58.
  11. Kirsanov M.N. Analysis of the buckling of spatial truss with cross lattice // Magazine of Civil Engineering. 2016. №. 4. С. 52–58. doi: 10.5862/MCE.64.5.