

Математическая модель связи лазерного дальномера с типом лазерного излучателя

Курдюмова Татьяна Игоревна

*Комсомольский-на-Амуре государственный университет
студент*

Григорьева Анна Леонидовна

Комсомольский-на-Амуре государственный университет

Кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой

Аннотация

В статье рассматривается построение математической зависимости расположения лазерного дальномера от различных характеристик, задаваемых пользователем.

Ключевые слова: дальномер, измерение расстояния, камера

Mathematical model of coupling of a laser range finder with the type of a laser emitter

Kurdyumova Tatiana Igorevna

*Komsomolsk-on-Amur State University
Student*

Grigorieva Anna Leonidovna

Komsomolsk-on-Amur State University

Candidate of physical and mathematical Sciences, associate Professor

Abstract

In the article devoted to the mathematical dependence of the location of the laser rangefinder on various characteristics set by the user.

Keywords: rangefinder, distance measurement, camera

Основной задачей является получение функции, с помощью которой пользователь сможет определять расстояние от камеры до объекта. Задача машинного зрения реализуется с помощью лазерного дальномера, созданного на основе лазерной указки, сопряженного с камерой.

На лазерную указку прикрепляется цилиндр, рассеивающий луч в прямую линию, параллельную поверхности пола. Камера и указка фиксируются на расстоянии h друг от друга так, чтобы ось луча была параллельна оптической оси камеры (рисунок 1).

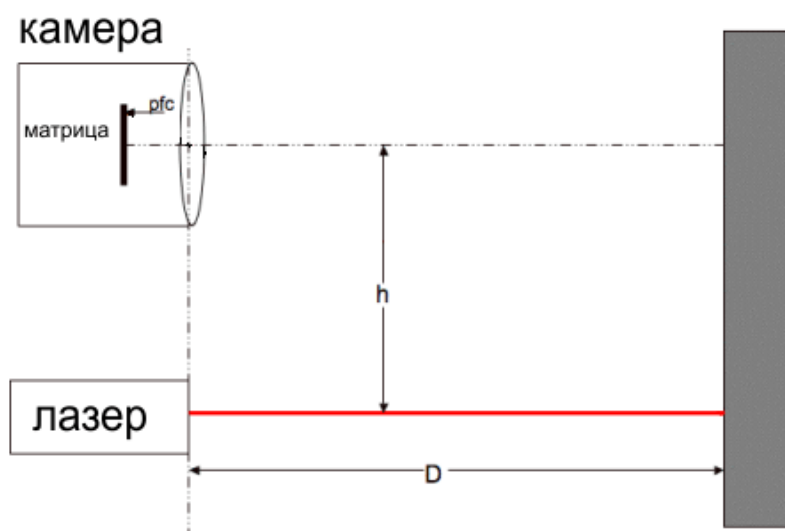


Рисунок 1 – Схема расположения лазерной указки и камеры относительно друг друга



Рисунок 2 – Расположения лазерной указки и камеры относительно друг друга

Для того, чтобы выбрать на каком расстоянии располагать камеру от лазерной указки, необходимо создать математическую модель регрессионной зависимости этого расстояния.

Для создания математической модели было проделано 50 экспериментов. Объект размещался от камеры таким образом, чтобы луч, проецируемый указкой попадал в одно и тоже место на объекте, измерялось расстояние D (рисунок 3). При этом лазерная указка отодвигалась от камеры с шагом $\Delta h = 0,5$ см.

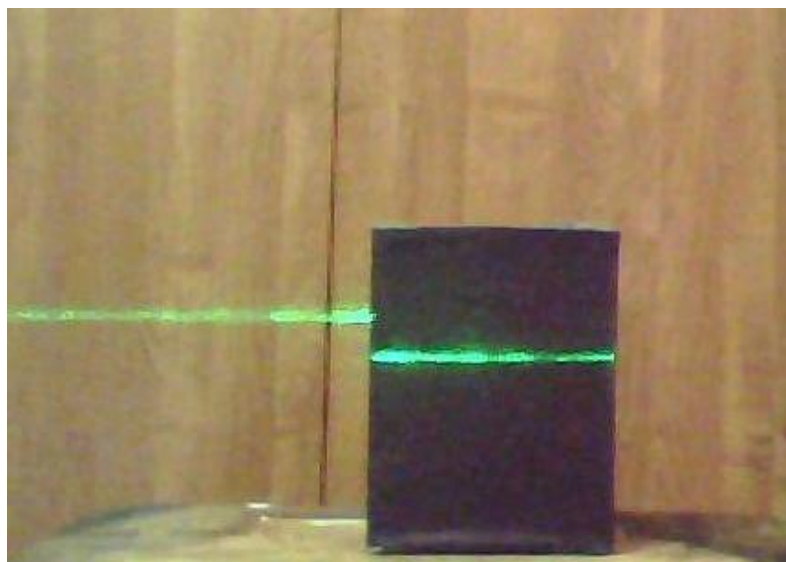


Рисунок 3 – Проецирование луча лазера на объект

Полученные замеры представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Замеры

x	y
131	3
130	3,5
128	4
127	4,5
126	5
125	5,5
125,5	6
124	6,5
123,5	7
122	7,5
121,5	8
120	8,5
119	9
118,5	9,5
118,5	10
117,5	10,5
117	11
116	11,5
115	12
112	12,5
111,5	13
110	13,5
110	14
107,5	14,5
105	15
105,5	15,5
104	16
102	16,5

100	17
99	17,5
97	18
95	18,5
94,5	19
94	19,5
92	20
92	20,5
91	21
90	21,5
88	22
87,5	22,5
86	23
84	23,5
81	24
80	24,5
75	25
70	25,5
66	26
60	26,5
55	27
51	27,5

График зависимости расстояния от камеры до лазера и расстояния от камеры до объекта представлен на рисунке 4.

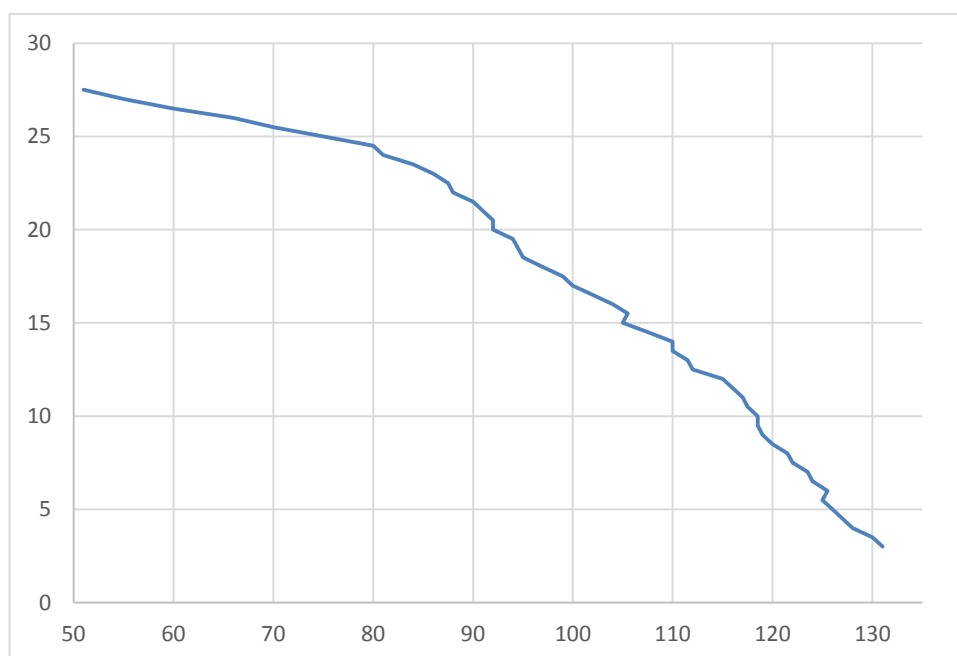


Рисунок 4 – График зависимости расстояния от камеры до лазера и расстояния от камеры до объекта

Был проведен сравнительный анализ нескольких уравнений, он показал, что самое подходящее для данного случая линейное уравнение регрессии. Используя данные таблицы 1, определяем средние значения величин и находим коэффициенты:

$$y = a_1 \cdot x + a_0$$

$$\bar{x} = 102,41$$

$$\bar{y} = 15,25$$

$$\overline{x^2} = 10905,195$$

$$\overline{xy} = 1418,745$$

$$\begin{cases} a_0 + a_1 \bar{x} = \bar{y} \\ a_0 \bar{x} + a_1 \overline{x^2} = \overline{xy} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 + a_1 \cdot 102,41 = 15,25 \\ a_0 \cdot 102,41 + a_1 \cdot 10905,195 = 1418,745 \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{\Delta a_0}{\Delta}, a_1 = \frac{\Delta a_1}{\Delta}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 102,41 \\ 102,41 & 10905,195 \end{vmatrix} = 10905,195 - 102,41^2 = 417,3869$$

$$\Delta a_0 = \begin{vmatrix} 15,25 & 102,41 \\ 1418,745 & 10905,195 \end{vmatrix} = 15,25 \cdot 10905,195 - 102,41 \cdot 1418,745 =$$

$$166304,22375 - 145293,67545 = 21010,5483$$

$$\Delta a_1 = \begin{vmatrix} 1 & 15,25 \\ 102,41 & 1418,745 \end{vmatrix} = 1418,745 - 15,25 \cdot 102,41 = -143,0075$$

$$a_0 = \frac{21010,5483}{417,3869} = 50,3383$$

$$a_1 = \frac{-143,0075}{417,3869} = -0,34263$$

Тогда уравнение имеет вид:

$$y = 50,3383 - 0,34263 \cdot x$$

На рисунке 5 показан график зависимости X от Y, где синяя линия – теоретическая зависимость, а зелёная – практическая.

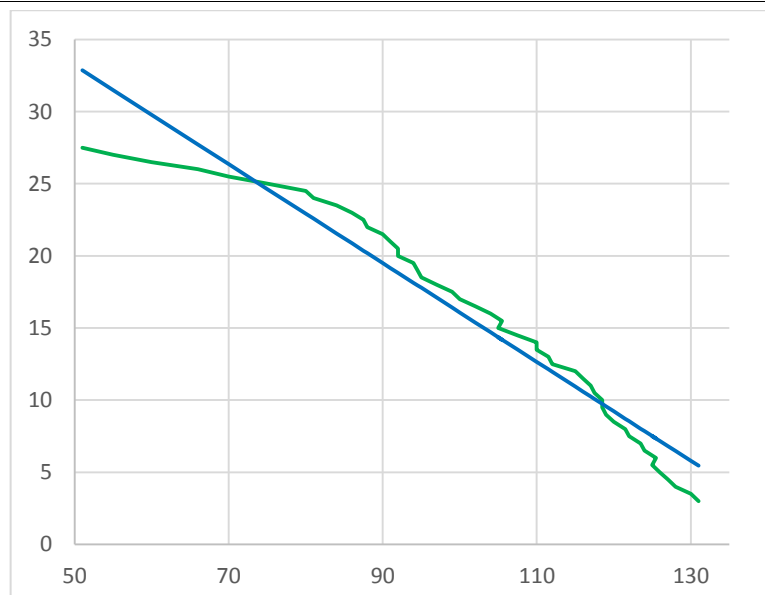


Рисунок 5 – Теоретическая и практическая зависимости

Вычислим коэффициент корреляции между переменными x и y в уравнении логарифмической регрессии. Используем формулы:

$$r_{yx^*} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

$$\sigma_x = \sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2}$$

$$\sigma_y = \sqrt{\overline{y^2} - \bar{y}^2}$$

Подставляем значения в формулы, получаем:

$$\sigma_x = \sqrt{10905,195 - 102,41^2} = \sqrt{10905,195 - 10487,8081} = \sqrt{417,3869} = 20,43$$

$$\sigma_y = \sqrt{284,625 - 15,25^2} = \sqrt{248,625 - 232,5625} = \sqrt{16,0625} = 4,01$$

$$r_{yx} = \frac{1418,745 - 102,41 \cdot 15,25}{20,43 \cdot 4,01} = \frac{-143,0075}{82,9242} = -0,97$$

Оценим связь между двумя факторами. Так как $r_{yx} = -0,97$, то связь между расстоянием от камеры до лазерной указки и расстоянием от камеры до объекта сильная (таблица 2).

Таблица 2 – Коэффициент корреляции

Факторы	y	x
y	1	
x	-0,97	1

Полученную функцию пользователь может использовать для расчета расстояния h , на котором ему будет необходимо расположить камеру от лазерной указки.

Пример: Пользователю хочет установить объект на расстоянии 130 см от камеры, чтобы камера определила объект и лазерный луч попал на него ему нужно знать, на каком расстоянии располагать камеру и указку

относительно друг друга, для это ему необходимо воспользоваться формулой, полученной ранее.

$$y = 50,3383 - 0,34263 \cdot x$$

Вместо x подставляем значение 130 и получаем:

$$y = 50,3383 - 0,34263 \cdot 130 = 50,3383 - 44,5419 = 5,7964.$$

Следовательно, расстояние между камерой и лазером будет равно примерно 5,8 см.

Для того чтобы пользователь смог узнать на каком расстоянии от камеры находится объект, необходимо создать математическую модель регрессионной зависимости расстояния от камеры до объекта.

Объект устанавливается на расстоянии D от камеры, расстояние h между камерой и указкой фиксируется. Делается фотография объекта с отраженным на нем лучом и подсчитывается количество пикселей k между лучом на объекте и нижним краем фотографии (рисунок 6).

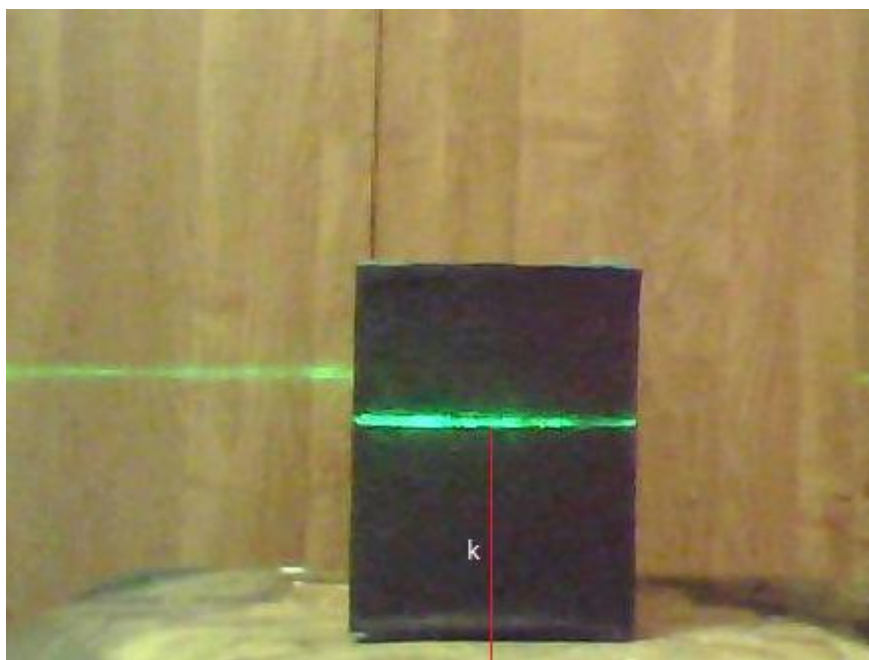


Рисунок 6 – Расстояние k

Для создания математической модели было проделано 50 экспериментов. Лазерная указка была установлена на расстоянии 10 см от камеры. Полученные замеры представлены в таблице 3.

Таблица 3 – Замеры

x	y
170	100
167	95
162	90
161	85
155	80
156	75
149	70

145	65
141	63
142	60
141	59
136	58
137	57
136	56
136	55
135	54
130	53
126	52
125	51
128	50
126	49
124	48
129	47
126	46
125	45
123	44
124	43
120	42
121	41
118	40
116	39
112	38
109	37
111	36
108	35
110	34
115	33
112	32
110	31
106	30
108	29
101	28
94	27
96	26
94	25
90	24
86	23
84	22
72	21
65	20

График зависимости расстояния от камеры до объекта представлен на рисунке 7.

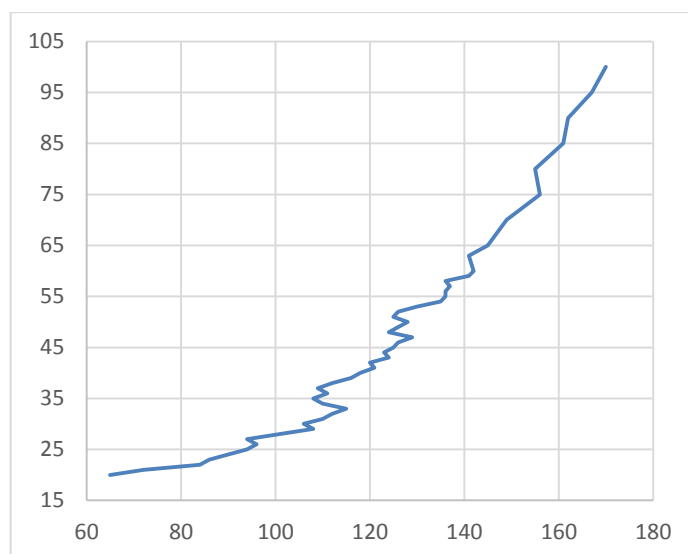


Рисунок 7 – График зависимости расстояния от камеры до объекта

Уравнение показательной регрессии имеет вид:

$$y = b \cdot a^x.$$

Прологарифмируем уравнение, получим:

$$\ln y = \ln(b \cdot a^x).$$

Преобразуем последнее выражение по свойствам логарифма:

$$\ln y = \ln b + \ln a^x;$$

$$\ln y = \ln b + x \cdot \ln a.$$

Сделаем замену:

$$y^* = \ln y; \quad b^* = \ln b; \quad a^* = \ln a.$$

Запишем уравнение с учетом замены:

$$y^* = b^* + x \cdot a^*.$$

Запишем коэффициенты для уравнения показательной регрессии, путем следующей замены:

$$y = y^*; \quad b = b^*; \quad a = a^*,$$

Получим формулы:

$$a^* = \frac{\overline{xy^*} - \bar{x}\bar{y}^*}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}; \quad b^* = \bar{y}^* - a^*\bar{x}; \quad a = e^{a^*}; \quad b = e^{b^*}.$$

Используя данные таблицы 3, определяем средние значения величин и находим коэффициенты степенной регрессии.

$$\bar{x} = 122,26$$

$$\overline{x^2} = 15487,66$$

$$\bar{y}^* = 3,773106585$$

$$\overline{xy^*} = 470,6310165$$

$$a^* = \frac{470,6310165 - 122,26 \cdot 3,773106585}{15487,66 - 122,26^2} = \frac{9,3310054179}{540,1524} = 0,0173$$

$$b^* = 3,773106585 - 0,0173 \cdot 122,26 = 1,658$$

$$a = 2,71828182846^{0,0173} = 1,0175$$

$$b = 2,71828182846^{1,658} = 5,2488$$

Тогда уравнение имеет вид:

$$y = 5,2488 \cdot 1,0175^x$$

На рисунке 8 показан график зависимости X от Y, где синяя линия – теоретическая зависимость, а зелёная – практическая.

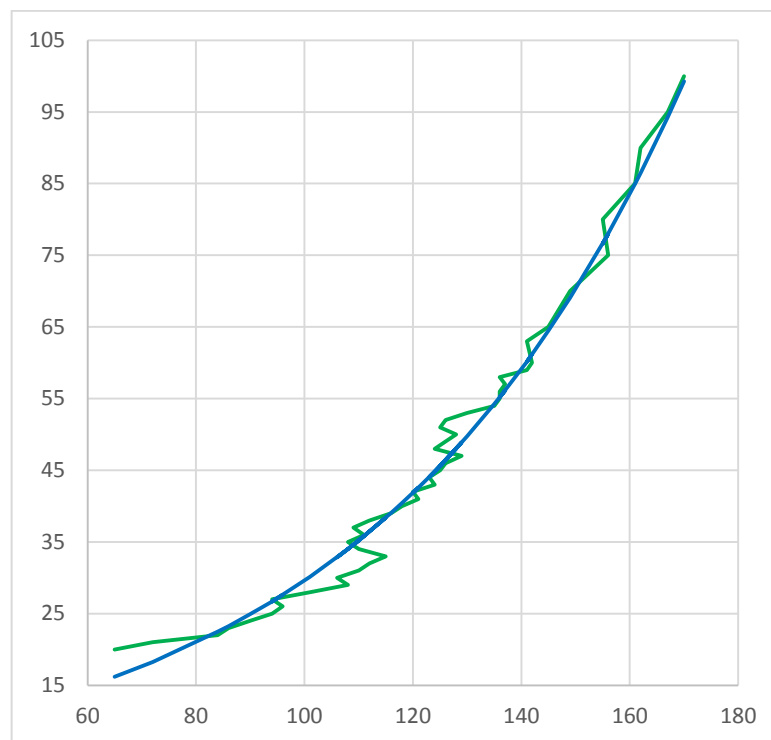


Рисунок 8 – Теоретическая и практическая зависимости

При линеаризации показательного и степенного уравнений регрессии появляются погрешности, которые могут привести к смещению адекватного значения результирующего фактора. Для того чтобы избежать данного расхождения, используют для оценки тесноты связи не коэффициент корреляции, а индекс корреляции, который вычисляется по формуле:

$$\rho_{xy} = \sqrt{1 - \frac{\sigma_e^2}{\sigma_{y^*}^2}},$$

где

$$\sigma_{y^*}^2 = \overline{y^{*2}} - \overline{y^*}^2, \quad \sigma_e^2 = \overline{e^2} - \bar{e}^2.$$

Величины $\overline{e^2}$ и \bar{e} вычисляются по формулам:

$$\bar{e} = \frac{\sum(y^* - \hat{y}_{\text{пок}}^*)}{n}; \quad \overline{e^2} = \frac{\sum(y^* - \hat{y}_{\text{пок}}^*)^2}{n},$$

где $\hat{y}_{\text{пок}}^*$ – логарифмирование столбца $\hat{y}_{\text{пок}}$, n – количество экспериментов.

$$\sigma_{y^*}^2 = 14,40218132 - 3,773106585 = 10,629074735$$

$$\bar{e} = 2,451097108$$

$$\overline{e^2} = 6,097048086$$

$$\sigma_e^2 = 6,097048086 - 2,451097108 = 3,645950978$$

$$\rho_{xy} = \sqrt{1 - \frac{3,645950978}{10,629074735}} = \sqrt{1 - 0,343} = \sqrt{0,657} = 0,8106$$

Оценим связь между двумя факторами. Так как $r_{yx} = 0,8106$, то связь между расстоянием от камеры до лазерной указки и расстоянием от камеры до объекта сильная (таблица 4).

Таблица 4 – Индекс корреляции

факторы	у	х
у	1	
х	0,8106	1

Полученную функцию пользователь может использовать для расчета расстояния D на котором находится объект.

Пример: Пользователю установил некоторый объект на расстоянии D от камеры. Луч, спроецированный на объект был сфотографирован и выяснилось, что он находится на расстоянии 140 пикселей от края фотографии. Чтобы определить расстояние D для необходимо воспользоваться формулой, полученной ранее.

$$y = 5,2488 \cdot 1,0175^x$$

Вместо x подставляем значение 140 и получаем:

$$y = 5,2488 \cdot 1,0175^{140} = 5,2488 \cdot 11,345 = 59,547636.$$

Следовательно, расстояние между объектом и камерой составляет примерно 59,5 см.

Библиографический список

1. Григорьева А.Л., Григорьев Я.Ю. Эконометрика для экономистов // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2011. № 7. С. 134-135.
2. Григорьева А.Л., Григорьев Я.Ю. Информатика и математика (учебное пособие) // Успехи современного естествознания. 2010. № 9. С. 76-77.
3. Григорьева А.Л., Григорьев Я.Ю. Оптимизация выполнения строительно-монтажных работ при неблагоприятных климатических условиях // В сборнике: Технические науки: проблемы и перспективы. Материалы Международной научной конференции. 2011. С. 34-37.
4. Федосенко В.Б., Григорьев Я.Ю., Григорьева А.Л. Системный анализ климатических факторов по характеру и уровню агрессивности к технологическим процессам в строительстве // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. 2010. Т. 1. № 4. С. 125-131.

5. Сарилова О.А., Григорьева А.Л., Григорьев Я.Ю. Факторная модель как метод оценки вклада нематериальных активов в стоимость организации // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. 2012. Т. 2. № 11. С. 107-112.
6. Коновалова Н.С., Пустовалов Д.А., Мокрицкий Б.Я., Коннова Г.В., Григорьева А.Л. Сравнительная оценка свойств инструментальных материалов по площади следа индентирования при маятниковом скрайбировании // Вопросы материаловедения. 2015. № 3 (83). С. 54-62.
7. Григорьев Я.Ю., Максимов С.Б., Григорьева А.Л. Разработка модульных динамических структур сопровождения деятельности организации // Мир науки, культуры, образования. 2014. № 3. С. 30.