УДК 512.5

Суммы квадратов матрицы

Попов Иван Николаевич
Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова
к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры математики

Аннотация
В статье представлены результаты по исследованию подматриц матрицы, названные квадратами матрицы. Вводится понятие суммы квадрата матрицы. Рассматривается матрица, элементами которой являются последовательные целые числа. Именно для этой матрицы формулируется и решается задача об возможных значениях суммы квадратов матрицы. Выясняются ряд свойств квадратов матрицы, связанных с суммой квадратов матрицы.
Ключевые слова: матрица, квадрат матрицы, последовательность.

The sum of the squares of the matrices

Popov Ivan Nikolaevich
Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov
Candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, associate professor of the Department of Mathematics

Abstract
The article presents the results of the study of the matrix submatrix, called the squares of the matrix. The notion of the sum of the square of the matrix is introduced. We consider a matrix whose elements are consecutive integers. It is for this matrix that the problem of possible values of the sum of squares of the matrix is formulated and solved. Turns out a number of properties of squares matrix associated with the sum of the squares of the matrix.
Keywords: matrix, square matrix, sequence.

Введение

Один из подходов в решении задач, в которых исследуется сама матрица или матрица в исследовании выступает в роли вспомогательного объекта, заключается в выделении в матрицах подматриц. Такой подход используется для вычисления ранга матрицы, для решения систем линейных уравнений, для построения минора, для исследования функций от нескольких переменных [1, 2]. И это далеко не полный список. В работе [3] подматрицы матриц используются для решения задачи о принадлежности матрицы из аддитивной матричной группы ее подгруппе.

Пусть m и n – натуральные числа, большие или равные 2. Будем рассматривать матрицы с числовыми элементами. Пусть матрица A размерности $m \times n$ имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} & \dots & a_{1t} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & & & & & \\ a_{i1} & \dots & a_{is} & \dots & a_{it} & \dots & a_{in} \\ \dots & & & & & & \\ a_{j1} & \dots & a_{js} & \dots & a_{jt} & \dots & a_{jn} \\ \dots & & & & & & \\ a_{m1} & \dots & a_{ms} & \dots & a_{mt} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Четыре элемента a_{is}, a_{it}, a_{js} и a_{jt}, где $i<j$, $s<t$, образуют подматрицу матрицы A, которую назовем квадратом и обозначим следующим образом:

$$A(i,s;\ i,t;\ j,s;\ j,t)=\begin{pmatrix} a_{is} & a_{it} \\ a_{js} & a_{jt} \end{pmatrix}.$$

Суммой квадрата $A(i,s;\ i,t;\ j,s;\ jt)=\begin{pmatrix} a_{is} & a_{it} \\ a_{js} & a_{jt} \end{pmatrix}$ матрицы A назовем число, обозначаемое $\mathrm{Sum}(A(i,s;\ i,t;\ j,s;\ j,t))$ и равное $(a_{is}+a_{jt}+a_{it}+a_{js})/2$.

Введем в рассмотрение матрицу R размерности $m\times n$, элементами которой являются целые последовательные числа от 0 до $mn-1$:

$$R=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & s & \dots & n-1 \\ n & n+1 & \dots & n+s & \dots & n+(n-1) \\ 2n & 2n+1 & \dots & 2n+s & \dots & 2n+(n-1) \\ \dots & & & & & \\ (i-1)n & (i-1)n+1 & \dots & (i-1)n+s & \dots & (i-1)n+(n-1) \\ \dots & & & & & \\ (m-1)n & (m-1)n+1 & \dots & (m-1)n+s & \dots & (m-1)n+(n-1) \end{pmatrix}.$$

Целью статьи является изложение результатов по исследованию сумм квадратов матрицы R с точки зрения их возможных значений и нахождения квадрата с заданной суммой.

1. Свойства квадратов матрицы

Элементы a_{is} и a_{jt} матрицы A размерности $m\times n$, так же как и a_{it} и a_{js}, где $1\le i\le m$, $1\le j\le m$, $1\le s\le n$, $1\le t\le n$, $i<j$ и $s<t$, назовем угловыми элементами квадрата $A(is;it;js;jt)$. Ясно, что для задания квадрата матрицы надо знать только номера строк и столбцов двух его угловых элемента.

Теорема. Количество различных квадратов в матрице A размерности $m\times n$ равно $mn(m-1)(n-1)/4$.

Для $(i;s+1)$-элемента матрицы R размерности $m\times n$ справедливо:

$$r_{i,s+1}=n\cdot(i-1)+s,$$

где $0 \le s \le n-1$. Тогда число s можно рассматривать как остаток от деления числа $r_{i,s+1}$ на число n, число $i-1$ – неполное частное. Тем самым можно определить, в какой строке и каком столбце находится выбранное число $r \in \{0;1;\ldots;mn-1\}$ в матрице R. Например, для определения номеров строки и столбца, в которых находится число 478 в матрице R размерности 30×50, делим 478 на 50 с остатком: $478 = 50 \cdot 9 + 28$; откуда $r_{10,29} = 478$.

Ряд свойств квадратов матрицы R рассмотрены в работах [3, 4].

Теорема. Для любого квадрата $R(i,s;\, i,t;\, j,s;\, j,t) = \begin{pmatrix} r_{is} & r_{it} \\ r_{js} & r_{jt} \end{pmatrix}$ матрицы R размерности $m \times n$, где $1 \le i \le m$, $1 \le j \le m$, $1 \le s \le n$, $1 \le t \le n$, $i < j$ и $s < t$, справедливо равенство: $r_{is} + r_{jt} = r_{it} + r_{js}$.

Доказательство

Используя формулу $r_{i,s+1} = n \cdot (i-1) + s$, верную для любого элемента матрицы R, получаем:

$$R(i,s;\, i,t;\, j,s;\, j,t) = \begin{pmatrix} r_{is} & r_{it} \\ r_{js} & r_{jt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \cdot (i-1) + s - 1 & n \cdot (i-1) + t - 1 \\ n \cdot (j-1) + s - 1 & n \cdot (j-1) + t - 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда суммы $r_{is} + r_{jt}$ и $r_{it} + r_{js}$ равны $n \cdot (i + j - 2) + s + t - 2$, следовательно, $r_{is} + r_{jt} = r_{it} + r_{js}$. ■

2. Сумма квадрата матрицы

Суммой квадрата $A(i,s;\, i,t;\, j,s;\, j,t)$ матрицы A размерности $m \times n$. назовем число $\mathrm{Sum}(A(i,s;\, i,t;\, j,s;\, j,t)$, для которого справедливо равенство:

$$\mathrm{Sum}(A(i,s;\, i,t;\, j,s;\, j,t)) = \frac{a_{is} + a_{jt} + a_{it} + a_{js}}{2}.$$

Сумма квадрата $R(i,s;\, i,t;\, j,s;\, j,t) = \begin{pmatrix} r_{is} & r_{it} \\ r_{js} & r_{jt} \end{pmatrix}$ матрицы R размерности $m \times n$

, вследствие того, что $r_{is} + r_{jt} = r_{it} + r_{js}$, равна $r_{is} + r_{jt}$. Тогда

$$\mathrm{Sum}(R(i,s;\, i,t;\, j,s;\, j,t)) = n \cdot (i + j - 2) + s + t - 2.$$

Наименьшее значение сумм квадратов матрицы R размерности $m \times n$ равно $n+1$, наибольшее – $(2mn - n - 3)$, то есть

$$n + 1 \le \mathrm{Sum}(R(i,s;\, i,t;\, j,s;\, j,t)) \le 2mn - n - 3.$$

Сформулируем следующую задачу: выясним, какие значения могут принимать суммы квадратов матрицы R размерности $m \times n$ из отрезка $[n+1;\ 2mn - n - 3]$?

3. Вспомогательные последовательности

Для решения задачи о возможных значениях сумм квадратов матрицы R, введем в рассмотрение числовые последовательности $(a_k)_{k=1}^{+\infty}$ и $(b_k)_{k=1}^{+\infty}$, обозначив символом $[x]$ целую часть действительного числа x – наибольшее целое число, не превосходящее x:

$$a_k = \left[\frac{k+1}{2}\right] - \frac{1+(-1)^k}{2} \text{ и } b_k = b + \left[\frac{k}{2}\right] + \frac{1+(-1)^k}{2},$$

где $k \in N$, b – некоторое фиксированное натуральное число. Первые семь значений элементов последовательностей $(a_k)_{k=1}^{+\infty}$ и $(b_k)_{k=1}^{+\infty}$ представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Элементы последовательностей a_k, b_k

k	1	2	3	4	5	6	7
a_k	1	0	2	1	3	2	4
b_k	b	$b+2$	$b+1$	$b+3$	$b+2$	$b+4$	$b+3$

Рассмотрим свойства последовательностей $(a_k)_{k=1}^{+\infty}$ и $(b_k)_{k=1}^{+\infty}$.

1. Числа a_k принимают целые значения, начиная с 0, числа b_k – целые значения, наименьшее из которых равно b, для всех $k \in N$.

2. $a_k + b_k = b + k$ для всех $k \in N$.

Доказательство

Заметим, что $a_k + b_k = b + \left[\frac{k+1}{2}\right] + \left[\frac{k}{2}\right]$.

Разделим число k на 2 с остатком: $k = 2q + r$, $q \in N \bigcup \{0\}$, $r = 0$ или $r = 1$. Если $r = 0$, то $k = 2q$ и

$$a_k + b_k = b + \left[\frac{2q+1}{2}\right] + \left[\frac{2q}{2}\right] = b + 2q = b + k;$$

если $r = 1$, то $k = 2q + 1$ и

$$a_k + b_k = b + \left[\frac{2q+2}{2}\right] + \left[\frac{2q+1}{2}\right] = b + 2q + 1 = b + k.$$

Видим, что в любом случае $a_k + b_k = b + k$. ■

Отсюда получаем, что сумма $a_k + b_k$ принимает все натуральные значения, начиная с числа $b+1$.

3. Для всех $k \in N$ справедливо: $b_k - a_k = \begin{cases} b-1, & k \not\vdots\, 2; \\ b+2, & k \vdots\, 2. \end{cases}$

Доказательство

Заметим, что $b_k - a_k = b + 1 + (-1)^k + \left[\frac{k}{2}\right] - \left[\frac{k+1}{2}\right]$.

Разделим число k на 2 с остатком: $k = 2q + r$, $q \in N \bigcup \{0\}$, $r = 0$ или $r = 1$. Если $r = 0$, то $k = 2q$ и

$$b_k - a_k = b + 2 + \left[\frac{2q}{2}\right] - \left[\frac{2q+1}{2}\right] = b + 2;$$

если $r = 1$, то $k = 2q + 1$ и

$$b_k - a_k = b + \left[\frac{2q+1}{2}\right] - \left[\frac{2q+2}{2}\right] = b - 1. \blacksquare$$

4. При $b > 1$ справедливо неравенство $a_k < b_k$ для всех $k \in N$.

4. Возможные значения сумм квадратов матрицы R

Используем для решения задачи о значениях сумм квадратов матрицы R последовательности $(a_k)_{k=1}^{+\infty}$ и $(b_k)_{k=1}^{+\infty}$, считая b равным n – количеству столбцов в матрице R.

Суммы $a_k + b_k$ могут принимать любые значения, большие n, значит, и значения от $n+1$ до $2mn - n - 3$. Так как наибольшее значение суммы квадрата матрицы R равно $2mn - n - 3$, то потребуем:

$$a_k + b_k = n + k \le 2mn - n - 3,\ k \le 2mn - 2n - 3.$$

Значит, следует рассматривать такие значения k, что

$$1 \le k \le 2mn - 2n - 3.$$

В связи с этим возникает вопрос о возможных значениях чисел a_k, b_k. Учитывая, что $a_k < b_k$, то определим область изменения чисел b_k. Так как $b_k = n + \left[\frac{k}{2}\right] + \frac{1+(-1)^k}{2}$, то при четных значениях k получаем:

$$b_k = n + \frac{k}{2} + 1 \le n + \frac{2mn - 2n - 3}{2} + 1 = mn - \frac{1}{2} < mn - 1;$$

при нечетных значениях k получаем:

$$b_k = n + \frac{k-1}{2} \le n + \frac{2mn - 2n - 4}{2} = mn - 2 < mn - 1.$$

Значит, числа a_k и b_k принимают значения от 0 до $mn - 1$ для всех значений k, изменяющихся от 1 до $2mn - 2n - 3$, значит, числа a_k и b_k есть элементы матрицы R размерности $m \times n$.

Теперь, выясним, могут ли числа a_k и b_k быть угловыми элементами квадрата матрицы R с заданным значением суммы квадрата? Числа a_k и b_k являются таковыми, если они находятся в разных столбцах матрицы R и разных ее строках.

Возникают следующие вопросы.

1. Могут ли числа a_k и b_k находится в одном столбце матрицы R?

Если это так, то $b_k - a_k \vdots n$ (числа, находящиеся в одном столбце матрицы R, при делении на число n дают одинаковые остатки). При нечетных значениях k разность $b_k - a_k$ равна $n-1$, что не позволяет выполняться условию $b_k - a_k \vdots n$.

При четных значениях k получаем: $n+2 \vdots n$. Это возможно, если $n=1$ или $n=2$. Случай $n=2$ рассмотрим отдельно. Сейчас же будем считать, что $n \geq 3$. Тогда числа a_k и b_k в одном столбце располагаться не могут.

2. Могут ли числа a_k и b_k находиться в одной строке матрицы R?

Это возможно, если $b_k - a_k \leq n-1$. При четных значениях k это неравенство не выполняется, так как в это случае справедливо равенство $b_k - a_k = n+2$. Поэтому будем рассматривать случай, когда k принимает нечетные значения. При этом $b_k - a_k = n-1$, значит, числа a_k и b_k находятся на противоположных концах одной строки. Тогда $a_k = nq$ и $b_k = nq + (n-1)$ для некоторого целого q, изменяющегося от 0 до $m-1$. Числа a_k и b_k находятся в $q+1$-й строке матрицы R.

Из того, что $a_k = nq$ и $b_k = nq + (n-1)$, получаем систему:

$$\begin{cases} \left[\dfrac{k+1}{2}\right] - \dfrac{1+(-1)^k}{2} = nq, \\ n + \left[\dfrac{k}{2}\right] + \dfrac{1+(-1)^k}{2} = nq + n - 1. \end{cases}$$

Так как k – нечетное, то

$$\begin{cases} \dfrac{k+1}{2} = nq, \\ \left[\dfrac{k}{2}\right] + 1 = nq, \end{cases} \qquad \begin{cases} k = 2nq - 1, \\ \left[\dfrac{k}{2}\right] + 1 = nq. \end{cases}$$

При $k = 2nq - 1$ (что равносильно тому, что $k+1 \vdots 2n$) второе уравнение системы превращается в верное равенство. Тогда если $k+1 \not\vdots 2n$, то числа a_k и b_k находятся в разных строках.

При $k = 2nq - 1$ справедливо равенство $a_k + b_k = 2nq + n - 1$. Так как

$$a_k + b_k \leq 2mn - n - 3,$$

то

$$2nq + n - 1 \leq 2mn - n - 3,\ nq \leq mn - n - 1,\ n(m-q-1) \geq 1.$$

Значит, $1 \leq q \leq m-2$, и $m \geq 3$. Это означает, что в матрице R, содержащей только две строки, числа a_k и b_k в одной строке располагаться не могут. Тогда в матрице R размерности $2 \times n$ ($m=2$) числа a_k и b_k находятся в разных ее строках и столбцах, и поэтому являются угловыми элементами квадратов матрицы R. Тогда все числа $1, 2, \ldots, 3(n-1)$ являются суммами квадратов матрицы R.

Можем сделать промежуточный вывод: если $m \geq 3$ и $k+1 \not\vdots 2n$, то числа a_k и b_k располагаются в разных строках и разных столбцах матрицы R размерности $m \times n$. Поэтому числа a_k и b_k являются угловыми элементами квадратов матрицы R. Тогда числа из ряда $1, 2, \ldots, 2mn - n - 3$, кроме чисел вида $2nq+n-1,\ q\in\{1;2;\ldots;m-2\}$, являются суммами квадратов матрицы R. Осталось выяснить, являются ли числа вида $2nq+n-1$, где $q\in\{1;2;\ldots;m-2\}$, суммами некоторых квадратов матрицы R?

Пусть $k=2nq-1$, где $1\le q\le m-2$, число $a_k=nq$ располагается в 1-м столбце и $q+1$-й строке матрицы R, число $b_k=nq+n-1$ находится в n-м столбце и в той же $q+1$-й строке. Так как $1\le q\le m-2$, то справедливо:

$$a_k+n=n(q+1)\in[0;\ mn-1],\qquad b_k-n=nq-1\in[0;\ mn-1],$$

то есть числа a_k+n и b_k-n являются элементами матрицы R. При этом $a_k+b_k=2nq+n-1$. Числа a_k+n и b_k-n находятся в разных строках и разных столбцах матрицы R, значит, являются угловыми элементами некоторого квадрата матрицы R.

Итак, все числа $n+1,\ 2,\ \ldots,\ 2mn-n-3$, где $n\ge 3$, являются суммами некоторых квадратов матрицы R размерности $m\times n$.

Пример. Рассмотрим матрицу R размерности 4×3: $R=\begin{pmatrix}0&1&2\\3&4&5\\6&7&8\\9&10&11\end{pmatrix}$.

Наибольшее значение сумм квадратов матрицы R равно 18. Так как $1\le k\le 2mn-2n-3$, то $1\le k\le 15$. Составим таблицу 2 значений чисел a_k, b_k и их сумм, которые совпадают со значениями сумм квадратов матрицы R.

Таблица 2 – Значения чисел a_k, b_k и их сумм при $m=4,\ n=3$

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a_k	1	0	2	1	3	2	4	3	5	4	6	5	7	6	8
b_k	3	5	4	6	5	7	6	8	7	9	8	10	9	11	10
a_k+b_k	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Так как $n=3$, то числа a_k и b_k, для которых $k+1\,\vdots\,6$, находятся в одной строке. Это – $a_5=3,\ b_5=5$ (расположенные во 2-й строке) и $a_{11}=6,\ b_{11}=8$ (расположенные в 3-й строке). Эти пары чисел угловыми элементами ни одного квадрата матрицы R не являются. Сумму $a_5+b_5=8$ заменим ей равной суммой $(a_5+3)+(b_5-3)=6+2=8$, сумму $a_{11}+b_{11}=14$ – на сумму $(a_{11}+3)+(b_{11}-3)=9+5=14$. Числа $a_5-3,\ b_5+3$, также как и числа $a_{11}-3,\ b_{11}+3$, находятся в разных строках, поэтому они являются угловыми элементами квадрата матрицы R. ■

Пример. Рассмотрим матрицу R размерности 2×7:

$$R=\begin{pmatrix}0&1&2&3&4&5&6\\7&8&9&10&11&12&13\end{pmatrix}.$$

Как отмечалось выше, в матрице R, содержащей только две строки, числа a_k, b_k в одной строке находиться не могут. Поэтому в данном случае числа a_k, b_k при k от 1 до 11 являются угловыми элементами некоторых квадратов матрицы R.

Составим таблицу 3 значений чисел a_k, b_k и их сумм, совпадающие со значениями сумм квадратов матрицы R, меняющихся от 8 до 18.

Таблица 3 – Значения чисел a_k, b_k и их сумм при $m=2,\ n=7$

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a_k	1	0	2	1	3	2	4	3	5	4	6
b_k	7	9	8	10	9	11	10	12	11	13	12
a_k+b_k	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Квадраты матрицы R с угловыми числами a_k, b_k имеют вид (внизу указаны суммы квадратов):

$$\underset{8}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}} \quad \underset{9}{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}} \quad \underset{10}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}} \quad \underset{11}{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}} \quad \underset{12}{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}} \quad \underset{13}{\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}}$$

$$\underset{14}{\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 10 & 11 \end{pmatrix}} \quad \underset{15}{\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}} \quad \underset{16}{\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}} \quad \underset{17}{\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 11 & 13 \end{pmatrix}} \quad \underset{18}{\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 12 & 13 \end{pmatrix}}$$

Заметим, возможны альтернативные квадраты матрицы R с заданными значениями сумм квадратов. ■

Рассмотрим случай $n=2$. В матрице R размерности $m\times 2$ в первом столбце находятся четные числа, во втором – нечетные. Квадраты в матрице R имеют вид:

$$R(i,1;\ i,2;\ j,1;\ j2)=\begin{pmatrix} r_{i1} & r_{i2} \\ r_{j1} & r_{j2} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\mathrm{Sum}(R(i,1;\ i,2;\ j,1;\ j2))=2(i+j)-3.$$

Видим, что суммы квадратов равны только нечетным числам, и изменяются от 3 до $4m-5$.

Покажем, что суммы квадратов матрицы R могут принимать любые нечетные значения от наименьшего до наибольшего значения, которое, как видно из формулы, является нечетным.

Выберем нечетное целое число $2x+1$ такое, что $3 \le 2x+1 \le 4m-5$. Тогда $1 \le x \le 2m-3$. Выясним, имеет ли уравнения $2(i+j)-3 = 2x+1$ решения при $i, j \in \{1;2;\ldots;m\}$ (i и j – номера строк матрицы R)?

Преобразуем уравнение: $i + j = x + 2$. Если $x+2$ – нечетное число, то положим:

$$i = \frac{x+1}{2} \text{ и } j = \frac{x+3}{2}.$$

Так как $x \le 2m-3$, то

$$i = \frac{x+1}{2} \le m-1 \text{ и } j = \frac{x+3}{2} \le m.$$

Значит, в этом случае $2(i+j)-3 = 2x+1$ разрешимо во множестве $\{1;2;\ldots;m\}$ относительно i и j.

Если $x+2$ – четное, то положим:

$$i = \frac{x+2}{2} - 1 = \frac{x}{2} \text{ и } j = \frac{x+2}{2} + 1 = \frac{x+4}{2}.$$

Так как $x \le 2m-3$, то

$$i = \frac{x}{2} \le m - \frac{3}{2} \text{ и } j = \frac{x+4}{2} \le m + \frac{1}{2}.$$

Получаем, что уравнение $2(i+j)-3 = 2x+1$ и в этом случае разрешимо во множестве $\{1;2;\ldots;m\}$ относительно i и j.

Итак, суммы квадратов матрицы R размерности $m \times 2$ принимают все нечетные значения в пределах от 3 до $4m-5$.

Пример. Для матрицы R размерности 4×2

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$

найдутся ее квадраты, суммы которых принимают значения 3, 5, 7 и 9. Такими квадратами являются (внизу указаны их суммы):

$$\underset{3}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}} \quad \underset{5}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}} \quad \underset{7}{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}} \quad \underset{9}{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}} \quad \underset{11}{\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}}$$

Из неравенства $n+1 \le \mathrm{Sum}(R(i,1;\ i,2;\ j,1;\ j2)) \le 2mn-n-3$ в данном случае суммы квадратов матрицы R размерности 4×2 изменяются от 3 до 11. ■

5. Определение квадрата матрицы R с заданной суммой

Пусть рассматривается матрица R размерности $m \times n$, и выбрано целое число sum из отрезка $[n+1;\ 2mn-n-3]$. Возникает вопрос об определении квадрата матрицы R с суммой, равной sum.

Пусть $n \geq 3$. Как было показано, в этом случае суммы квадратов матрицы R принимают все целые значения из отрезка $[n+1;\ 2mn-n-3]$. Для определения искомого квадрата применим равенство $a_k + b_k = n + k$, считая, что $a_k + b_k = \text{sum}$ и $a_k,\ b_k$ – угловые элементы. Тогда $k = \text{sum} - n$ – номер, по которому найдем сами числа $a_k,\ b_k$. По формуле $r_{i,s+1} = n \cdot (i-1) + s$, где $0 \leq s \leq n-1$, определим номера строк и столбцов этих чисел в матрице R, и, окончательно, определим два других числа требуемого квадрата.

Пример. Пусть матрица R имеет размерность 25×60 ($m = 25,\ n = 60$). Тогда суммы ее квадратов принимают значения из отрезка $[61;2937]$. Найдем квадрат, сумма которого равна 2018.

Так как $\text{sum} = 2018$, то $k = 2018 - 60 = 1958$, $a_{1958} = 978$ и $b_{1958} = 1040$. Делим найденные числа с остатком на 60: $978 = 60 \cdot 16 + 18$, $1040 = 60 \cdot 17 + 20$. Получаем, что $a_{1958} = r_{17,19}$ и $b_{1958} = r_{18,21}$. Видим, что числа $a_k,\ b_k$ находятся в разных строках и столбцах матрицы R, поэтому они являются угловыми элементами квадрата.

Так как $r_{17,21} = 60 \cdot 16 + 20 = 980$ и $r_{18,19} = 60 \cdot 17 + 18 = 1038$, то квадрат матрицы R, сумма которого равна 2018, имеет вид:

$$R(17{,}19;\ 17{,}21;\ 18{,}19;\ 18{,}2) = \begin{pmatrix} 978 & 980 \\ 1038 & 1040 \end{pmatrix}.$$

Найдем, теперь, квадрат матрицы R, сумма которого равна 2019.

В этом случае $k = 2019 - 60 = 959$, поэтому $a_{959} = 480 = 60 \cdot 8 + 0 = r_{9,1}$ и $b_{959} = 539 = 60 \cdot 8 + 59 = r_{9,60}$. Видим, что числа $a_{959},\ b_{959}$ принадлежат одной строке матрицы R, и угловыми элементами никакого квадрата не являются. Поэтому их «подправим»: рассмотрим числа

$$a_{959} + n = 540 = 60 \cdot 9 + 0 = r_{10,1}, \qquad b_{959} - n = 479 = 60 \cdot 7 + 59 = r_{8,60}.$$

Числа $a_{959} + n,\ b_{959} - n$ – угловые квадрата матрицы R. Два других числа искомого квадрата есть числа $r_{8,1} = 60 \cdot 7 + 0 = 420$ и $r_{10,60} = 60 \cdot 9 + 59$. Тогда искомый квадрат имеет вид:

$$R(8{,}1;\ 8{,}60;\ 10{,}1;\ 10{,}60) = \begin{pmatrix} 420 & 479 \\ 540 & 599 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что можно предложить и альтернативные квадраты, с наперед заданными суммами. ■

В случае, когда число столбцов в матрице R равно 2 ($n = 2$), для нахождения квадрата матрицы, сумма которого равна нечетному числу sum из отрезка $[3;4m-5]$, поступаем следующим образом.

Определяем номера i и j строк матрицы R, из которых берутся элементы для построения искомого квадрата:

- если $\dfrac{\text{sum}-1}{2}$ – нечетное число, то $i = \dfrac{\text{sum}+1}{4}$ и $j = \dfrac{\text{sum}+5}{4} = i+1$;

• если $\frac{\mathrm{sum}-1}{2}$ – четное число, то $i=\frac{\mathrm{sum}-1}{4}$ и $j=\frac{\mathrm{sum}+7}{4}=i+2$.

Используя формулу $r_{i,s+1}=n\cdot(i-1)+s$, где $0\le s\le n-1$, находим элементы в определенных строках.

Пример. Пусть R – матрица размерности 30×2. Найдем квадрат этой матрицы, сумма которого равна 51.

Пусть $\mathrm{sum}=51$. Так как $\frac{\mathrm{sum}-1}{2}=25$ – нечетное число, то $i=\frac{51+1}{4}=13$ и $j=\frac{51+5}{4}=14$. В 13-й и 14-й строках матрицы R располагаются числа:

$$r_{13,1}=2\cdot 12+0=24,\qquad r_{13,2}=25,$$
$$r_{14,1}=2\cdot 13+0=26,\qquad r_{13,2}=27.$$

Тогда искомый квадрат имеет вид:

$$R(13{,}1;\ 13{,}2;\ 14{,}1;\ 14{,}2)=\begin{pmatrix}24 & 25\\ 26 & 27\end{pmatrix}.$$

Как видим, для квадрата справедливо: $\mathrm{sum}=24+27=25+26=51$. ■

Пример. Пусть R – матрица размерности 30×2. Найдем квадрат этой матрицы, сумма которого равна 45.

Пусть $\mathrm{sum}=45$. Так как $\frac{\mathrm{sum}-1}{2}=22$ – четное число, то $i=\frac{45-1}{4}=11$ и $j=\frac{45+7}{4}=13$. В 11-й и 13-й строках матрицы R располагаются числа:

$$r_{11,1}=2\cdot 10+0=20,\qquad r_{11,2}=2\cdot 10+1=21,$$
$$r_{13,1}=2\cdot 12+0=24,\qquad r_{13,2}=2\cdot 12+1=25.$$

Тогда искомый квадрат имеет вид:

$$R(11{,}1;\ 11{,}2;\ 13{,}1;\ 13{,}2)=\begin{pmatrix}20 & 21\\ 24 & 25\end{pmatrix}.$$

Как видим, для квадрата справедливо: $\mathrm{sum}=20+25=21+24=45$. ■

6. Квадрат матрицы R с заданной суммой: случай $n\ge 3$

Рассмотрим случай, когда матрица R имеет размерность $m\times n$ и $n\ge 3$. Тогда квадраты с определенной суммой можно построить, используя числа a_k и b_k.

По определению

$$a_k=\left[\frac{k+1}{2}\right]-\frac{1+(-1)^k}{2}\ \text{ и }\ b_k=n+\left[\frac{k}{2}\right]+\frac{1+(-1)^k}{2},$$

где $k\in N$, n – некоторое фиксированное натуральное число. Тогда

• если k – нечетное число, то $a_k=\frac{k+1}{2}$ и $b_k=n+\frac{k-1}{2}$;

• если k – четное число, то $a_k=\frac{k}{2}-1$ и $b_k=n+1+\frac{k}{2}$.

Рассмотрим случай нечетного значения k из отрезка $[1;\ 2mn-2n-3]$.

Разделим $\dfrac{k-1}{2}$ с остатком на число n: $\dfrac{k-1}{2}=nq+s$, где $q\in N\bigcup\{0\}$, $0\le s\le n-1$, значит, $k=2nq+2s+1$. Тогда $a_k=nq+(s+1)$ и $b_k=n(q+1)+s$.

Числа q и s также обладают условиями: $1\le 2nq+2s+1\le 2mn-2n-3$, откуда $0\le nq+s\le mn-n-2$, $nq\le nq+s\le mn-n-2$, $q\le m-1-\dfrac{2}{n}<m-1$, то есть, $q<m-1$, и, окончательно, $0\le q\le m-2$. Заметим, что верхняя граница значений q достижима.

Возможны два случая.

1) Если $s, s+1\in\{0;1;\ldots;n-1\}$, то есть являются остатками при делении на число n, то числа a_k и b_k находятся в соседних строках и столбцах:

$$a_k=r_{q+1,s+2},\qquad b_k=r_{q+2,s+1},\qquad k=2nq+2s+1.$$

Получаем квадрат матрицы R:

$$R(q+1,s+1;\ q+1,s+2;\ q+2,s+1;\ q+2,s+2)=\begin{pmatrix} a_k-1 & a_k\\ b_k & b_k+1\end{pmatrix}$$

или

$$R(q+1,s+1;\ q+1,s+2;\ q+2,s+1;\ q+2,s+2)=\begin{pmatrix} nq+s & nq+s+1\\ n(q+1)+s & n(q+1)+s+1\end{pmatrix}.$$

При этом

$$\mathrm{Sum}(R(q+1,s+1;\ q+1,s+2;\ q+2,s+1;\ q+2,s+2))=n(2q+1)+2s+1.$$

Пример. В матрице R размерности 30×40 найдем квадрат с суммой, равной 241.

В данном случае $n=40$, $\mathrm{sum}=241$. Из равенства $a_k+b_k=n+k=\mathrm{sum}$ находим: $k=241-40=201$ – нечетное число. Разделим $\dfrac{k-1}{2}=\dfrac{201-1}{2}=100$ на 40 с остатком: $100=40\cdot 2+20$. Получили: $q=2$ и $s=20$. Так как числа $s=20$ и $s+1=21$ – остатки от деления на число 40, то искомый квадрат имеет вид:

$$R(3,21;\ 3,22;\ 4,21;\ 4,22)=\begin{pmatrix} 40\cdot 2+20 & 40\cdot 2+20+1\\ 40\cdot 3+20 & 40\cdot 3+20+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 100 & 101\\ 140 & 141\end{pmatrix}.$$

Вычисляем сумму квадрата по формуле: $40\cdot(2\cdot 2+1)+2\cdot 20+1=241$. Как видим, результат совпадает с данным в условии. ■

2) Если $s+1=n$, то числа $a_k=n(q+1)$ и $b_k=n(q+1)+(n-1)$ находятся в матрице R в одной строке. Тогда угловыми элементами квадрата являются «исправленные» числа $a_k+n=n(q+2)=r_{q+3,1}$ и $b_k-n=nq+(n-1)=r_{q+1,n}$. В этом случае $k=2n(q+1)-1$. Квадрат имеет вид:

$$R(q+1,1;\ q+1,n;\ q+3,1;\ q+3,n)=\begin{pmatrix} b_k-2n+1 & b_k-n\\ a_k+n & a_k+2n-1\end{pmatrix}$$

или

$$R(q+1,1;\ q+1,n;\ q+3,1;\ q+3,n)=\begin{pmatrix} nq & n(q+1)-1 \\ n(q+2) & n(q+3)-1 \end{pmatrix}.$$

При этом

$$\mathrm{Sum}(R(q+1,1;\ q+1,n;\ q+3,1;\ q+2,n))=n(2q+3)-1.$$

Пример. В матрице R размерности 30×40 найдем квадрат с суммой, равной 359.

В данном случае $n=40$, $\mathrm{sum}=359$. Из равенства $a_k+b_k=n+k=\mathrm{sum}$ находим: $k=359-40=319$ – нечетное число. Разделим $\dfrac{k-1}{2}=\dfrac{359-1}{2}=159$ на 40 с остатком: $359=40\cdot 3+39$. Получили: $q=3$ и $s=39$. Так как число $s+1=40$, то искомый квадрат имеет вид:

$$R(4,1;\ 4,40;\ 6,1;\ 6,40)=\begin{pmatrix} 40\cdot 30 & 40\cdot 4-1 \\ 40\cdot 5 & 40\cdot 6-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 120 & 159 \\ 200 & 239 \end{pmatrix}.$$

Видим, что сумма квадрата равна $40\cdot(2\cdot 3+3)-1=359$. ■

Рассмотрим случай четного значения k из отрезка $[1;\ 2mn-2n-3]$.

Разделим $\dfrac{k}{2}$ с остатком на число n: $\dfrac{k}{2}=nq+s$, $q\in N\bigcup\{0\}$, $0\le s\le n-1$, значит, $k=2nq+2s$. Тогда $a_k=nq+(s-1)$ и $b_k=n(q+1)+(s+1)$.

Числа q и s также обладают условиями: $1\le 2nq+2s\le 2mn-2n-3$, откуда $2nq\le 2nq+2s\le 2mn-2n-3$, $q\le m-1-\dfrac{3}{2n}<m-1$, $q<m-1$, поэтому $0\le q\le m-2$. Заметим, что верхняя граница значений q достижима.

Возможны три случая.

1) Если $s-1=-1$, то $s=0$. Тогда $k=2nq$, откуда $q\ge 1$. Для чисел a_k и b_k справедливо: $a_k=n(q-1)+(n-1)=r_{q,n}$ и $b_k=n(q+1)+1=r_{q+2,2}$ – числа в разных строках и столбцам матрицы R. Квадрат имеет вид:

$$R(q,2;\ q,n;\ q+2,2;\ q+2,n)=\begin{pmatrix} a_k-n+2 & a_k \\ b_k & b_k+n-2 \end{pmatrix}$$

или

$$R(q,2;\ q,n;\ q+2,2;\ q+2,n)=\begin{pmatrix} n(q-1)+1 & nq-1 \\ n(q+1)+1 & n(q+2)-1 \end{pmatrix}.$$

При этом

$$\mathrm{Sum}(R(q,2;\ q,n;\ q+2,2;\ q+2,n))=n(2q+1).$$

Пример. В матрице R размерности 30×40 найдем квадрат с суммой, равной 120.

В данном случае $n=40$, $\mathrm{sum}=120$. Из равенства $a_k+b_k=n+k=\mathrm{sum}$ находим: $k=120-40=80$ – четное число. Разделим $\frac{k}{2}=40$ на 40 с остатком: $40=40\cdot 1+0$. Получили, что $q=1$ и $s=0$. Тогда искомый квадрат имеет вид:

$$R(1{,}2;\ 1{,}40;\ 3{,}2;\ 3{,}40)=\begin{pmatrix}40\cdot 0+1 & 40\cdot 1-1\\ 40\cdot 2+1 & 40\cdot 3-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 39\\ 81 & 119\end{pmatrix}.$$

Видим, что сумма квадрата равна $40\cdot(2\cdot 1+1)=120$. ■

2) Если $s-1, s+1\in\{0;1;\ldots;n-1\}$, то $s-1$ и $s+1$ – остатки при делении на число n. При этом $k=2nq+2s$ и справедливо: $a_k=nq+(s-1)=r_{q+1,s}$ и $b_k=n(q+1)+(s+1)=r_{q+2,s+2}$ – числа в разных строка и столбцах матрицы R. Получаем квадрат матрицы R:

$$R(q+1,s;\ q+1,s+2;\ q+2,s;\ q+2,s+2)=\begin{pmatrix}a_k & a_k+2\\ b_k-2 & b_k\end{pmatrix}$$

или

$$R(q+1,s;\ q+1,s+2;\ q+2,s;\ q+2,s+2)=\begin{pmatrix}nq+s-1 & nq+s+1\\ n(q+1)+s-1 & n(q+1)+s+1\end{pmatrix}.$$

При этом

$$\mathrm{Sum}(R(q+1,s;\ q+1,s+2;\ q+2,s;\ q+2,s+2))=n(2q+1)+2s.$$

Пример. В матрице R размерности 30×40 найдем квадрат с суммой, равной 830.

В данном случае $n=40$, $\mathrm{sum}=830$. Из равенства $a_k+b_k=n+k=\mathrm{sum}$ находим: $k=830-40=790$ – четное число. Делим $\frac{k}{2}=395$ на 40 с остатком: $395=40\cdot 9+35$. Получили, что $q=9$ и $s=35$. Так как числа $s-1=34$ и $s+1=36$ – остатки от деления на число 40, то искомый квадрат имеет вид:

$$R(10{,}35;\ 10{,}37;\ 11{,}35;\ 11{,}37)=\begin{pmatrix}40\cdot 9+35-1 & 40\cdot 9+35+1\\ 40\cdot 10+35-1 & 40\cdot 9+35+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}394 & 396\\ 434 & 436\end{pmatrix}.$$

Видим, сумма квадрата равна $40\cdot(2\cdot 9+1)+2\cdot 35=830$. ■

3) Если $s+1=n$, то $s=n-1$. Тогда $k=2n(q+1)-2$. Для чисел a_k и b_k верно: $a_k=nq+(n-2)=r_{q+1,n-1}$ и $b_k=n(q+2)=r_{q+3,1}$ – числа из разных строк и столбов матрицы R. Квадрат имеет вид:

$$R(q+1{,}1;\ q+1,n-1;\ q+3{,}1;\ q+3,n-1)=\begin{pmatrix}a_k-n+2 & a_k\\ b_k & b_k+n-2\end{pmatrix}$$

или

$$R(q+1{,}1;\ q+1,n-1;\ q+3{,}1;\ q+3,n-1)=\begin{pmatrix}nq & n(q+1)-2\\ n(q+2) & n(q+3)-2\end{pmatrix}.$$

При этом

$$\mathrm{Sum}(R(q+1{,}1;\ q+1,n-1;\ q+3{,}1;\ q+3,n-1))=n(2q+3)-2.$$

Пример. В матрице R размерности 30×40 найдем квадрат с суммой, равной 198.

В данном случае $n=40$, $\mathrm{sum}=198$. Из равенства $a_k+b_k=n+k=\mathrm{sum}$ находим: $k=198-40=158$ – четное число. Делим $\frac{k}{2}=79$ на 40 с остатком: $79=40\cdot 1+39$. Получили $q=1$, $s=39$. Так как $s+1=40$, то искомый квадрат имеет вид:

$$R(2,1;\ 2,39;\ 4,1;\ 4,39)=\begin{pmatrix}40\cdot 1 & 40\cdot 2-2\\ 40\cdot 3 & 40\cdot 4-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}40 & 78\\ 120 & 158\end{pmatrix}.$$

Видим, сумма квадрата равна $40\cdot(2\cdot 1+3)-2=198$. ■

7. Квадрат матрицы R с заданной суммой: случай $n=2$

Рассмотрим матрицу R размерности $m\times 2$, где $m\geq 2$.

Как уже отмечалось, в данном случае для построения квадрата, сумма которого равна нечетному числу $\mathrm{sum}\in[3;4m-5]$, следует рассматривать два случая в зависимости от четности числа $\frac{\mathrm{sum}-1}{2}$. Напомним, что

$$\mathrm{Sum}(R(i,1;\ i,2;\ j,1;\ j,2))=2(i+j)-3.$$

1) Если $\frac{\mathrm{sum}-1}{2}$ – нечетное число, то $\frac{\mathrm{sum}-1}{2}=2q+1$, где $q\in N\bigcup\{0\}$, откуда $\mathrm{sum}=4q+3$. Так как $\mathrm{sum}\in[3;4m-5]$, то $0\leq q\leq m-2$. Заметим, что верхняя граница значений q достижима.

Квадраты в матрице R имеют вид:

$$R(i,1;\ i,2;\ j,1;\ j,2)=\begin{pmatrix}r_{i1} & r_{i2}\\ r_{j1} & r_{j2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot(i-1) & 2\cdot(i-1)+1\\ 2\cdot(j-1) & 2\cdot(j-1)+1\end{pmatrix}.$$

Так как в этом случае $i=\frac{\mathrm{sum}+1}{4}$ и $j=\frac{\mathrm{sum}+5}{4}=i+1$, то $i=q+1$ и $j=q+2$. Поэтому

$$R(q+1,1;\ q+1,2;\ q+2,1;\ q+2,2)=\begin{pmatrix}2q & 2q+1\\ 2q+2 & 2q+3\end{pmatrix}.$$

При этом

$$\mathrm{Sum}(R(q+1,1;\ q+1,2;\ q+2,1;\ q+2,2))=4q+3.$$

Пример. Рассмотрим матрицу R размерности 30×2. Определим в этой матрице квадрат, сумма которого равна 23.

По условию $\mathrm{sum}=23$ – нечетное число. Так как $\frac{\mathrm{sum}-1}{2}=11=2\cdot 5+1$ – нечетное число, то, определив $q=5$, получаем искомый квадрат матрицы R:

$$R(6,1;\ 6,2;\ 7,1;\ 7,2)=\begin{pmatrix}10 & 11\\ 12 & 13\end{pmatrix}.$$

По формуле получаем: $4\cdot 5+3=23$, что совпадает с числом sum. ■

2) Если $\frac{\mathrm{sum}-1}{2}$ – четное число, то $\frac{\mathrm{sum}-1}{2}=2q$, где $q\in N\bigcup\{0\}$, откуда $\mathrm{sum}=4q+1$. Так как $\mathrm{sum}\in[3;4m-5]$, то $0\le q\le m-2$. Заметим, что верхняя граница значений q достижима. Так как $i=\frac{\mathrm{sum}-1}{4}$ и $j=\frac{\mathrm{sum}+7}{4}=i+2$, то $i=q$ и $j=q+2$. Тогда

$$R(q{,}1;\ q{,}2;\ q+2{,}1;\ q+2{,}2)=\begin{pmatrix}2q-2 & 2q-1\\ 2q+2 & 2q+3\end{pmatrix}.$$

При этом

$$\mathrm{Sum}(R(q{,}1;\ q{,}2;\ q+2{,}1;\ q+2{,}2))=4q+1.$$

Пример. Рассмотрим матрицу R размерности 30×2. Определим в этой матрице квадрат, сумма которого равна 93.

По условию $\mathrm{sum}=93$ – нечетное число. Так как $\frac{\mathrm{sum}-1}{2}=46=2\cdot 23$ – четное число, то, определив $q=23$, получаем искомый квадрат матрицы R:

$$R(23{,}1;\ 23{,}2;\ 25{,}1;\ 25{,}2)=\begin{pmatrix}44 & 45\\ 48 & 49\end{pmatrix}.$$

По формуле получаем: $4\cdot 23+1=93$, что совпадает с числом sum. ■

Заключение

Рассмотренные в статье вопросы о свойствах квадратов матрицы R, об определении значений сумм ее квадратов и способов нахождения квадратов с заданной суммой могут касаться и других матриц. В тривиальных случаях, например, как для нулевой матрицы, получаются и тривиальные решения. Для матрицы, аналогичной матрице R, в которой четные числа берутся со знаком плюс, а нечетные – со знаком минус, полагаем, могут быть получены интересные результаты с нетривиальными и красивыми доказательствами.

Библиографический список

1. Беллман Р. Введению в теорию матриц. М.: Наука, 1969. 368 с.
2. Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука, 1973. 280 с.
3. Попов И.Н. Группы RC и RCD: монография. Архангельск: КИРА, 2014. 192 с.
4. Попов И.Н. Квадраты матриц // Научно-исследовательская деятельность школьников в области математики, прикладной математики и информатики: материалы Шестой региональной научно-практической конференции. Часть II / сост. С.Н. Котова; отв. ред. М.В. Шабанова; Сев. (Арктич.) федер. ун-т им. М.В. Ломоносова. Архангельск: САФУ, 2014. С. 119-127.