УДК 512.5

Квадраты матрицы определенной суммы

Попов Иван Николаевич
Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова
к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры математики

Аннотация
В статье представлены формулы для вычисления числа квадратов матрицы, элементами которой являются последовательные целые числа, имеющие определенную сумму. Изложены результаты исследования, касающиеся свойств количества квадратов матрицы с заданной суммой.
Ключевые слова: матрица, подматрица, квадрат матрицы.

Squares of the matrix of a certain sum

Popov Ivan Nikolaevich
Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov
Candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, associate professor of the Department of Mathematics

Abstract
The article presents formulas for calculating the number of squares of the matrix, the elements of which are consecutive integers having a certain sum. The results of the study concerning the properties of the number of squares of the matrix with a given sum are presented
Keywords: matrix, submatrix, square matrix.

Введение

Статья является продолжением работ [1, 2, 3], в которых представлены результаты исследования квадратов матрицы с последовательными целыми элементами.

Пусть R – матрица размерности $m \times n$, элементами которой являются целые последовательные числа от 0 до $mn-1$:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & s & \ldots & n-1 \\ n & n+1 & \ldots & n+s & \ldots & n+(n-1) \\ 2n & 2n+1 & \ldots & 2n+s & \ldots & 2n+(n-1) \\ \ldots & & & & & \\ (i-1)n & (i-1)n+1 & \ldots & (i-1)n+s & \ldots & (i-1)n+(n-1) \\ \ldots & & & & & \\ (m-1)n & (m-1)n+1 & \ldots & (m-1)n+s & \ldots & (m-1)n+(n-1) \end{pmatrix}.$$

Четыре элемента r_{is}, r_{it}, r_{js} и r_{jt}, где $1 \le i \le m$, $1 \le j \le m$, $1 \le s \le n$, $1 \le t \le n$, $i < j$, $s < t$, образуют подматрицу $\begin{pmatrix} r_{is} & r_{it} \\ r_{js} & r_{jt} \end{pmatrix}$ матрицы R, которая называется квадратом и обозначается $R(i,s;\ i,t;\ j,s;\ j,t)$. Число квадратов матрицы R вычисляется по формуле $mn(m-1)(n-1)/4$.

Сумма квадрата $R(is;it;js;jt)$ обозначается $\mathrm{Sum}(R(i,s;\ i,t;\ j,s;\ j,t))$ и равна $r_{is} + r_{jt} = r_{it} + r_{js}$. Верно: $n+1 \le \mathrm{Sum}(R(i,s;\ i,t;\ j,s;\ j,t)) \le 2mn - n - 3$.

Для $(q+1;s+1)$-элемент матрицы R справедливо: $r_{q+1,s+1} = n \cdot q + s$, где $0 \le s \le n-1$ и $0 \le q \le m-1$.

Цель статьи – изложение результатов по определению формул для вычисления числа квадратов матрицы R определенной суммы и его свойств.

1. Прямоугольники и центр матрицы

Пусть A – произвольная матрица размерности $m \times n$, где $m \ge 2$ и $n \ge 2$.

Выбирем натуральные числа i, j, s и t такие, что $1 \le i \le m$, $1 \le j \le m$, $1 \le s \le n$, $1 \le t \le n$, $i < j$, $s < t$. Подматрицу $P_A(i,s;\ j,t)$ матрицы A вида

$$\begin{pmatrix} a_{i,s} & a_{i,s+1} & \cdots & a_{i,t} \\ a_{i+1,s} & a_{i+1,s+1} & \cdots & a_{i+1,t} \\ \cdots & & & \\ a_{j,s} & a_{j,s+1} & \cdots & a_{j,t} \end{pmatrix}$$

назовем прямоугольником матрицы A. Прямоугольник состоит из частей идущих друг за другом, рядом стоящих, строк и столбцов, и имеет размерность $(j-i+1) \times (t-s+1)$. В частности, $P_A(1,1;\ m,n) = A$.

Матрица – это прямоугольная таблица, в которой центр определяется как точка пересечения диагоналей. В матрице центром может либо являться некоторый ее элемент, либо находиться между двумя рядом стоящими (в столбце или строке) ее элементами. Например, в матрице

0	1	2
3	4	5
6	7	8
9	10	11

центр находится между числами 4 и 7, стоящими рядом в одном столбце.

Если из контекста понятно, о какой матрице идет речь, то вместо обозначения $P_A(i,s;\ j,t)$ будем писать $P(i,s;\ j,t)$.

2. Количество квадратов матрицы R определенной суммы

Целую часть действительного числа x (равную наибольшему целому числу, не превосходящему x) будем обозначать $[x]$.

Сумма квадратов sum матрицы R размерности $m \times n$ может изменяться в пределах от $n+1$ до $2mn-n-3$ (рассматривая и случаи, в которых sum принимает и значения 0). Количество возможных значений sum равно $(2mn-n-3)-(n+1)+1 = 2mn-2n-3$. Как видим, это количество всегда является нечетным.

Пусть $\mathrm{sum} \in [n+1; 2mn-n-3]$. Число квадратов матрицы R, сумма которых равна sum, обозначим $v(\mathrm{sum})$. Естественно считать, что если sum не принадлежит данному отрезку, то $v(\mathrm{sum}) = 0$. Возможно, что $v(\mathrm{sum}) = 0$ для некоторых значений sum из отрезка $[n+1; 2mn-n-3]$, например, если матрица R содержит два столбца и sum принимает четные значения, большие 3.

Так как каждый квадрат матрицы R имеет определенную сумму, то сумма $v(n+1)+v(n+2)+\ldots+v(2mn-n-3)$ равна количеству всех квадратов матрицы R, тогда

$$\sum_{\mathrm{sum}=n+1}^{2mn-n-3} v(\mathrm{sum}) = \frac{mn(m-1)(n-1)}{4}.$$

Определим формулу для подсчета количества квадратов матрицы R размерности $m \times n$ определенной суммы.

Так как $\dfrac{(n+1)+(2mn-n-3)}{2} = \dfrac{2mn-2}{2} = mn-1$, то $mn-1$ – середина отрезка $[n+1; 2mn-n-3]$, которая совпадает с элементом r_{mn} матрицы R. Поэтому рассмотрим два случая: $\mathrm{sum} \le mn-1$ и $\mathrm{sum} > mn-1$.

А. Пусть $n+1 \le \mathrm{sum} \le mn-1$.

Пусть $R(is;\ it;\ js;\ jt) = \begin{pmatrix} r_{is} & r_{it} \\ r_{js} & r_{jt} \end{pmatrix}$, где $1 \le i \le m$, $1 \le j \le m$, $1 \le s \le n$, $1 \le t \le n$, $i < j$, $s < t$, – квадрат матрицы R, сумма которого равна sum. Тогда $r_{is} + r_{jt} = \mathrm{sum}$. Так как $r_{is} < r_{jt}$, то $r_{jt} \le \mathrm{sum}$ и $r_{is} \ge 0$. Наибольшее значение r_{jt} равняется sum. Это говорит о том, что числа $\mathrm{sum}+1, \mathrm{sum}+2, \ldots, mn-1$ не могут быть правыми нижними углами никакого квадрата матрицы R, сумма которого равна sum.

Разделим sum на n с остатком: $\mathrm{sum} = nq + s$, $0 \le s \le n-1$, $0 \le q \le m-1$. Так как $n+1 \le \mathrm{sum} \le mn-1$, то sum – элемент матрицы R, равный $r_{q+1,s+1}$. Из неравенства $n+1 \le \mathrm{sum}$ следует, что sum находится, по крайней мере, во второй строке матрицы R.

Разберем случай, когда элемент $r_{q+1,s+1}$ не принадлежит ни первому, ни последнему столбцам матрицы R.

В матрице R выделим два прямоугольника $P_1 = P(1,1;\ q+1, s+1)$ и $P_2 = P(1, s+2;\ q, n)$, разделив каждый прямоугольник на четыре равные части, проведя горизонтальные и вертикальные линии через центры этих прямоугольников (рис. 1).

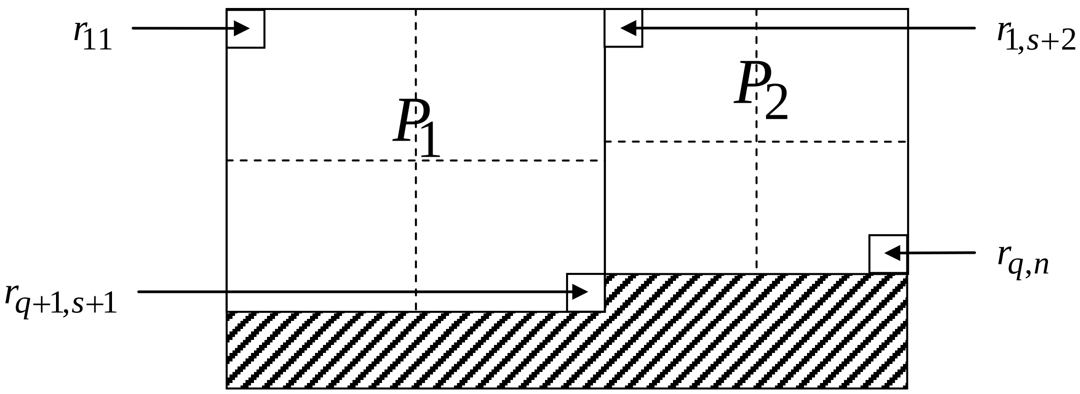

Рисунок 1 – Прямоугольники $P_1 = P(1,1;\ q+1, s+1)$ и $P_2 = P(1, s+2;\ q, n)$

Для угловых элементов прямоугольников P_1 и P_2 справедливо:

$$r_{11} + r_{q+1,s+1} = 0 + \mathrm{sum} = \mathrm{sum},$$

$$r_{1,s+2} + r_{q,n} = s + 1 + n(q-1) + (n-1) = nq + s = r_{q+1,s+1} = \mathrm{sum}.$$

Если построим квадрат матрицы R, беря четыре элемента прямоугольника (P_1 или P_2), два из которых симметричны относительно его центра, то сумма этого квадрата будет равна sum.

Прямоугольник P_1 имеет размерность $(q+1)\times(s+1)$. Симметрическими элементами в прямоугольнике P_1 относительно его центра являются числа $r_{11} + x + ny$ и $r_{q+1,s+1} - x - ny$ (иллюстрация на рис. 2), где

$$0 \le x \le \left[\frac{s+1}{2}\right],\ 0 \le y \le \left[\frac{q+1}{2}\right],\ x, y \in N \bigcup \{0\}.$$

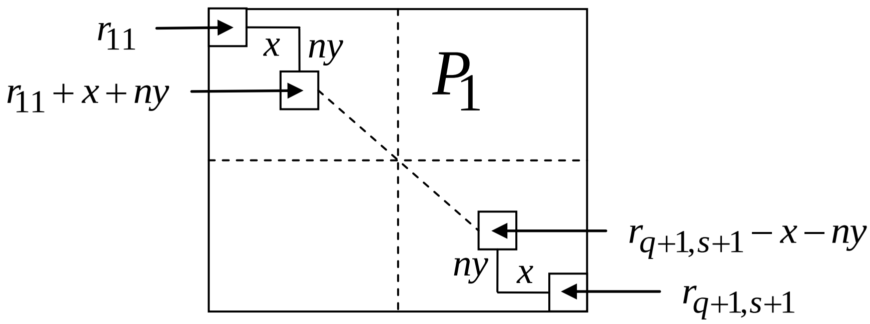

Рисунок 2 – Симметрические элементы прямоугольника P_1

С помощью элементов одной четверти прямоугольника P_1 образуется $\left[\frac{q+1}{2}\right]\cdot\left[\frac{s+1}{2}\right]$ квадратов матрицы R, сумма каждого из которых равна sum.

Проводя аналогичные рассуждения для прямоугольника P_2, имеющего размерность $q\times(n-s-1)$, получаем $\left[\frac{q}{2}\right]\cdot\left[\frac{n-s-1}{2}\right]$ квадратов матрицы R, сумма каждого из которых равна sum.

Любое число от $n+1$ до sum принадлежит либо прямоугольнику P_1, либо прямоугольнику P_2. Отсюда получаем, что общее число квадратов матрицы R с суммой $\mathrm{sum}\in[n+1;mn-1]$ равно

$$v(\mathrm{sum})=\left[\frac{q+1}{2}\right]\cdot\left[\frac{s+1}{2}\right]+\left[\frac{q}{2}\right]\cdot\left[\frac{n-s-1}{2}\right],$$

где $\mathrm{sum}=nq+s$, $0\le s\le n-1$, $0\le q\le m-1$.

Полученная формула для вычисления $v(\mathrm{sum})$ справедлива и в случаях, в которых элемент $r_{q+1,s+1}$ (равный sum) находится в первом или последнем столбце матрицы R.

Пример. Пусть R – матрица размерности 5×9. Определим квадраты матрицы R, сумма каждого из которых равна $\mathrm{sum}=32$.

В данном случае $m=5$ и $n=9$.

Матрица R с прямоугольниками $P_1=P(1,1;\ 4,6)$ и $P_2=P(1,7;\ 3,9)$, каждый из которых разделен на равные четверти, имеет вид:

$$R=\begin{array}{|ccc|ccc|ccc|}\hline 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\\ 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17\\ \hline 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26\\ 27 & 28 & 29 & 30 & 31 & 32 & 33 & 34 & 35\\ \hline 36 & 37 & 38 & 39 & 40 & 41 & 42 & 43 & 44\\ \hline\end{array}$$

Так как $32\le mn-1=44$, то число $\mathrm{sum}=32$ делим на $n=9$ с остатком: $32=9\cdot 3+5$. Отсюда $q=3$ и $s=5$. Тогда

$$v(32)=\left[\frac{3+1}{2}\right]\cdot\left[\frac{5+1}{2}\right]+\left[\frac{3}{2}\right]\cdot\left[\frac{9-5-1}{2}\right]=2\cdot 3+1\cdot 1=7.$$

Тот же результат получаем, подсчитывая число элементов в четвертях прямоугольников P_1 и P_2: в одной четверти – 6 элементов, в другой – 1; итого – 7 элементов. Квадраты матрицы R с суммой 32 имеют вид:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 5\\ \hline 27 & 32\\ \hline\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 4\\ \hline 28 & 31\\ \hline\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3\\ \hline 29 & 30\\ \hline\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 9 & 14\\ \hline 18 & 23\\ \hline\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 10 & 13\\ \hline 19 & 22\\ \hline\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 11 & 12\\ \hline 20 & 21\\ \hline\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 6 & 8\\ \hline 24 & 26\\ \hline\end{array}$$

Числа от 33 до 44 больше 32 и поэтому не могут быть угловыми элементами никаких квадратов матрицы R. Числа 7, 16 и 25, также как и числа 15, 16 и 17, находятся на вертикальных и горизонтальных линиях соответственно, проходящих через центры прямоугольников P_1 и P_2. ■

Пример. Пусть R – матрица размерности 5×9. Найдем значение $v(17)$.

В данном случае $m=5$ и $n=9$.

Так как $17 \le mn-1=44$, то числа от 18 до 44 не могут быть угловыми элементами квадратов матрицы R, суммы которых равнялись бы 17.

Матрица R в этом случае представляется в следующем виде:

$R =$

0	1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42	43	44

В данном случае прямоугольник $P_1 = P(1,1;\ 2,9)$ и имеет размерность 2×9, прямоугольник P_2 является пустым. Из представления матрицы R, найдя центр прямоугольника P_1, получаем, что $v(17)=4$.

Такой же получаем результат, используя формулу. Разделив 17 на 9 с остатком, получаем: $17=9\cdot 1+8$. Тогда $q=1$ и $s=8$. Поэтому

$$v(17)=\left[\frac{1+1}{2}\right]\cdot\left[\frac{8+1}{2}\right]+\left[\frac{1}{2}\right]\cdot\left[\frac{9-8-1}{2}\right]=1\cdot 4+0\cdot 0=4. \blacksquare$$

Пример. В матрице R размерности 5×9 найдем количество квадратов, сумма каждого из которых равна 27.

Матрица R разбивается на прямоугольники следующим образом:

$R =$

0	1	2	3	4	5	6	7	8
9	~~10~~	~~11~~	~~12~~	~~13~~	~~14~~	~~15~~	~~16~~	~~17~~
18	19	20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42	43	44

В данном случае прямоугольник $P_1 = P(1,1;\ 4,1)$ и имеет размерность 4×1, прямоугольник $P_2 = P(1,2;\ 3,9)$ и имеет размерность 3×8. Прямоугольник P_1 не порождает ни одного квадрата матрицы R с суммой 27. Из представления видно, что $v(27)=4$.

Разделив 27 на 9 с остатком $27=9\cdot 3+0$, и, определив $q=3$ и $s=0$, по формуле получаем:

$$v(27)=\left[\frac{3+1}{2}\right]\cdot\left[\frac{0+1}{2}\right]+\left[\frac{3}{2}\right]\cdot\left[\frac{9-0-1}{2}\right]=2\cdot 0+1\cdot 4=4. \blacksquare$$

Формула является единственным выходом для вычисления количества квадратов матрицы R с определенной суммой, если размерности матрицы R принимают большие значения, не допускающие наглядного представления. Например, пусть матрица R имеет размерность 20×30, и найдем число квадратов этой матрицы, сумма каждого из которых равна 444. Так как

$444 \le 20 \cdot 30 - 1 = 559$, то делим 444 на 30 с остатком: $444 = 30 \cdot 14 + 24$, тогда $q = 14$ и $s = 24$, поэтому искомое число равно

$$v(444) = \left[\frac{14+1}{2}\right] \cdot \left[\frac{24+1}{2}\right] + \left[\frac{14}{2}\right] \cdot \left[\frac{30-24-1}{2}\right] = 7 \cdot 12 + 7 \cdot 2 = 98.$$

Б. Пусть $mn - 1 < \mathrm{sum} \le 2mn - n - 3$.

Пусть $R(is;\ it;\ js;\ jt) = \begin{pmatrix} r_{is} & r_{it} \\ r_{js} & r_{jt} \end{pmatrix}$, где $1 \le i \le m$, $1 \le j \le m$, $1 \le s \le n$, $1 \le t \le n$, $i < j$, $s < t$, – квадрат матрицы R, сумма которого равна sum. Тогда $r_{is} + r_{jt} = \mathrm{sum}$. Так как $r_{jt} \le mn - 1$, то $\mathrm{sum} = r_{is} + r_{jt} \le r_{is} + mn - 1$, поэтому наименьшее значение r_{is} равняется $\mathrm{sum} - mn + 1$, и числа $0, 1, \ldots, \mathrm{sum} - mn$ не могут быть левыми верхними углами квадратов матрицы R с суммой sum.

Так как $mn - 1 \le \mathrm{sum} \le 2mn - n - 3$, то $0 \le \mathrm{sum} - mn + 1 \le mn - n - 2$ или $0 \le \mathrm{sum} - mn + 1 \le (mn - 1) - (n + 1)$, отсюда, $\mathrm{sum} - mn + 1$ – элемент матрицы R, не принадлежащий ее последней строке.

Разделим $\mathrm{sum} - mn + 1$ на n с остатком: $\mathrm{sum} - mn + 1 = nq + s$, $0 \le s \le n - 1$, $0 \le q \le m - 1$; $r_{q+1,s+1} = \mathrm{sum} - mn + 1$, и $\mathrm{sum} = n(m + q) + s - 1$.

Разберем случай, когда элемент $r_{q+1,s+1}$ не принадлежит ни первому, ни последнему столбцам матрицы R.

В матрице R выделим два прямоугольника $P_1 = P(q+1, s+1;\ m, n)$ и $P_2 = P(q+2, s+2;\ m, s)$. Разделим прямоугольники на четыре равные части, проведя горизонтальные и вертикальные линии через их центры (рис. 3).

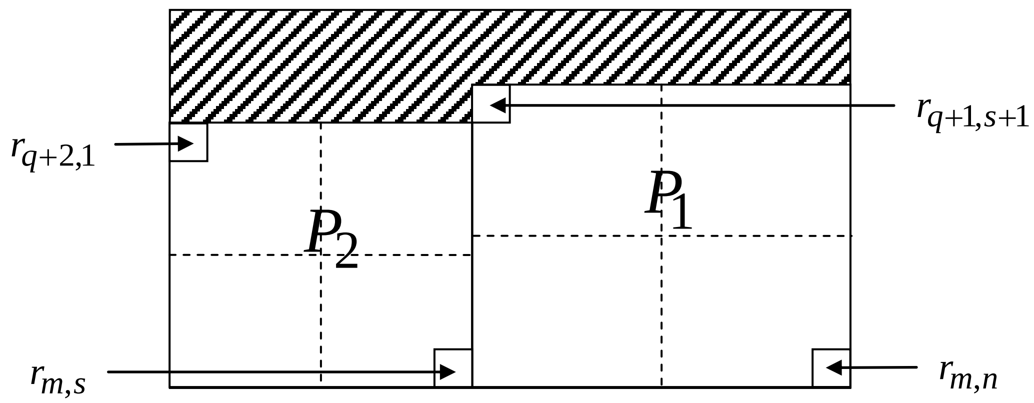

Рисунок 3 – Прямоугольники $P_1 = P(q+1, s+1;\ m, n)$ и $P_2 = P(q+2, s+2;\ m, s)$

Для угловых элементов прямоугольников P_1 и P_2 справедливо:

$$r_{q+2,1} + r_{m,s} = n(q+1) + n(m-1) + s - 1 = n(m+q) + s - 1 = \mathrm{sum},$$

$$r_{q+1,s+1} + r_{mn} = nq + s + mn - 1 = n(m+q) + s - 1 = \mathrm{sum}.$$

Если построим квадрат матрицы R, беря четыре элемента прямоугольника (P_1 или P_2), два из которых симметричны относительно его центра, то сумма этого квадрата будет равна sum.

Прямоугольник P_1 имеет размерность $(m-q)\times(n-s)$. Относительно его центра симметрическими элементами являются числа $r_{q+1,s+1}+x+ny$ и $r_{mn}-x-ny$, где

$$0 \le x \le \left[\frac{n-s}{2}\right],\ 0 \le y \le \left[\frac{m-q}{2}\right],\ x, y \in N \bigcup \{0\}.$$

С помощью элементов прямоугольника P_1 «порождается» $\left[\frac{m-q}{2}\right]\cdot\left[\frac{n-s}{2}\right]$ квадратов матрицы R, сумма каждого из которых равна sum.

Проводя аналогичные рассуждения для прямоугольника P_2, имеющего размерность $(m-q-1)\times s$, получаем $\left[\frac{m-q-1}{2}\right]\cdot\left[\frac{s}{2}\right]$ квадратов матрицы R, сумма каждого из которых равна sum.

Любое число в пределах от $\mathrm{sum}-mn+1$ до $mn-1$ принадлежит либо прямоугольнику P_1, либо прямоугольнику P_2. Отсюда получаем, что общее число квадратов матрицы R с суммой $\mathrm{sum} \in (mn-1; 2mn-n-3]$ равно

$$v(\mathrm{sum}) = \left[\frac{m-q}{2}\right]\cdot\left[\frac{n-s}{2}\right] + \left[\frac{m-q-1}{2}\right]\cdot\left[\frac{s}{2}\right],$$

где $\mathrm{sum}-mn+1 = nq+s$, $q, s \in N \bigcup \{0\}$, $0 \le s \le n-1$, $0 \le q \le m-1$.

Полученная формула для вычисления $v(\mathrm{sum})$ справедлива и в случаях, в которых элемент $r_{q+1,s+1}$ (равный $\mathrm{sum}-mn+1 = nq+s$) находится в первом или последнем столбце матрицы R.

Пример. Пусть матрица R имеет размерность 5×9. Определим число квадратов матрицы R, сумма каждого из которых равна 57.

Так как $57 > 5\cdot 9 - 1 = 44$ и $57-44=13$, то матрица R представляется в виде, где прямоугольники $P_1 = P(2{,}5;\ 5{,}9)$ и $P_2 = P(3{,}1;\ 5{,}4)$:

$$R = \begin{array}{|cc|cc|ccccc|}
\hline
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\
\hline
9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \\
\hline
18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 \\
\cancel{27} & \cancel{28} & \cancel{29} & \cancel{30} & 31 & 32 & 33 & 34 & 35 \\
36 & 37 & 38 & 39 & 40 & 41 & 42 & 43 & 44 \\
\hline
\end{array}$$

Из такого представления матрицы R видно, что число требуемых квадратов равно 6. Эти квадраты имеют вид:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 18 & 21 \\ \hline 36 & 39 \\ \hline\end{array}\quad
\begin{array}{|c|c|}\hline 19 & 20 \\ \hline 37 & 38 \\ \hline\end{array}\quad
\begin{array}{|c|c|}\hline 13 & 17 \\ \hline 40 & 44 \\ \hline\end{array}\quad
\begin{array}{|c|c|}\hline 14 & 16 \\ \hline 41 & 43 \\ \hline\end{array}\quad
\begin{array}{|c|c|}\hline 22 & 26 \\ \hline 31 & 35 \\ \hline\end{array}\quad
\begin{array}{|c|c|}\hline 23 & 25 \\ \hline 32 & 34 \\ \hline\end{array}$$

Проведем расчеты по формуле. Делим число 13 на 9 с остатком: $13 = 9\cdot 1 + 4$, откуда $q=1$ и $s=4$. Тогда

$$v(57)=\left[\frac{5-1}{2}\right]\cdot\left[\frac{9-4}{2}\right]+\left[\frac{5-1-1}{2}\right]\cdot\left[\frac{4}{2}\right]=2\cdot 2+1\cdot 2=6. \blacksquare$$

Пример. Вычислим $v(777)$ для матрицы R размерности 20×30.

Так как $777>20\cdot 30-1=559$, то делим число $777-559=178$ на 30 с остатком: $178=30\cdot 5+28$, откуда $q=5$ и $s=28$. По формуле получаем:

$$v(777)=\left[\frac{20-5}{2}\right]\cdot\left[\frac{30-28}{2}\right]+\left[\frac{20-5-1}{2}\right]\cdot\left[\frac{28}{2}\right]=7\cdot 1+7\cdot 14=105. \blacksquare$$

3. Число квадратов матрицы R с 2 столбцами определенной суммы

Отдельно обратим внимание на случай, в котором матрица R содержит 2 столбца. В первом столбце матрицы R содержатся только четные числа, во втором – нечетные.

А. Пусть $3\le \mathrm{sum}\le 2m-1$.

В этом случае число sum делим на 2 с остатком. По формуле для вычисления $v(\mathrm{sum})$, где $3\le \mathrm{sum}\le 2m-1$, получаем:

• при четных $\mathrm{sum}=2q+s$: $s=0$ и

$$v(\mathrm{sum})=\left[\frac{q+1}{2}\right]\cdot\left[\frac{0+1}{2}\right]+\left[\frac{q}{2}\right]\cdot\left[\frac{2-0-1}{2}\right]=\left[\frac{q+1}{2}\right]\cdot 0+\left[\frac{q}{2}\right]\cdot 0=0;$$

• при нечетных $\mathrm{sum}=2q+1$: $s=1$ и

$$v(\mathrm{sum})=\left[\frac{q+1}{2}\right]\cdot\left[\frac{1+1}{2}\right]+\left[\frac{q}{2}\right]\cdot\left[\frac{2-1-1}{2}\right]=\left[\frac{q+1}{2}\right]\cdot 1+\left[\frac{q}{2}\right]\cdot 0=\left[\frac{q+1}{2}\right].$$

Например, для матрицы R размерности 6×2 при $\mathrm{sum}=9=2\cdot 4+1$ получаем: $q=4$ и $v(\mathrm{sum})=v(9)=\left[\frac{4+1}{2}\right]=2$. Матрицы R следующий вид:

$R=$

0	1
2	3
4	5
6	7
8	9
10	11

Видим, что количество квадратов с суммой 9 равно 2.

Б. Пусть $2m-1<\mathrm{sum}\le 4m-5$.

Разделим $\mathrm{sum}-2m+1$ на 2 с остатком: $\mathrm{sum}-2m+1=2q+s$, $0\le s\le 1$, $0\le q\le m-1$. Получаем: $\mathrm{sum}=2q+2m+s-1$ и

• если $s=0$, то $\mathrm{sum}=2q+2m-1$ – нечетное число и

$$v(\mathrm{sum})=\left[\frac{m-q}{2}\right]\cdot\left[\frac{2-0}{2}\right]+\left[\frac{m-q-1}{2}\right]\cdot\left[\frac{0}{2}\right]=\left[\frac{m-q}{2}\right];$$

• если $s=1$, то $\mathrm{sum}=2q+2m$ – четное число и

$$v(\mathrm{sum})=\left[\frac{m-q}{2}\right]\cdot\left[\frac{2-1}{2}\right]+\left[\frac{m-q-1}{2}\right]\cdot\left[\frac{1}{2}\right]=0.$$

Например, для матрицы R размерности 6×2 при $\mathrm{sum}=15$ получаем: $\mathrm{sum}-2m+1=15-11=4=2\cdot 2$, $q=2$ и $v(2)=v(2)=\left[\dfrac{6-1}{2}\right]=2$. Матрица R имеет вид:

$$R=\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 1\\ 2 & 3\\ \hline 4 & 5\\ 6 & 7\\ \hline 8 & 9\\ 10 & 11\\ \hline\end{array}$$

Количество квадратов с суммой 15 равно 2.

Если рассматривается матрица R размерности $m\times 2$, то суммы ее квадратов принимают только значения из отрезка $[3;4m-5]$.

4. Симметрические суммы квадратов матрицы R

Элементы r_{is} и r_{jt} матрицы R размерности $m\times n$, $1\le i\le m$, $1\le j\le m$, $1\le s\le n$, $1\le t\le n$, $i\ne j$ и $s\ne t$, назовем симметричными относительно числа $mn-1$, если $r_{is}+r_{jt}=mn-1$.

Элементы r_{qs} и $r_{m-q+1,n-s+1}$ матрицы R, $1\le q\le m$ и $1\le s\le n$, образуют пару симметричных элементов относительно числа $mn-1$. Действительно,

$$r_{qs}+r_{m-q+1,n-s+1}=(n(q-1)+(s-1))+(n(m-q)+(n-s))=mn-1.$$

Отсюда получаем, что для каждого элемента матрицы R симметрический ему элемент определен однозначно.

Пусть sum_1 и sum_2 – суммы двух квадратов матрицы R размерности $m\times n$. Пусть $\dfrac{\mathrm{sum}_1+\mathrm{sum}_2}{2}=mn-1$. Можем считать, что $n+1\le \mathrm{sum}_1\le mn-1$ и $mn-1\le \mathrm{sum}_2\le 2mn-n-3$. В этом случае суммы sum_1 и sum_2 будем называть симметрическими относительно числа $mn-1$. Название связано с тем, что $mn-1$ – середина отрезка $[n+1;2mn-n-3]$. Заметим, что число $mn-1$ является симметричным для самого себя.

Числа $v(\mathrm{sum}_1)$ и $v(\mathrm{sum}_2)$ вычисляются по формулам:

- $\mathrm{sum}_1=nq_1+s_1$, $0\le s_1\le n-1$, $0\le q_1\le m-1$,

$$v(\mathrm{sum}_1)=\left[\frac{q_1+1}{2}\right]\cdot\left[\frac{s_1+1}{2}\right]+\left[\frac{q_1}{2}\right]\cdot\left[\frac{n-s_1-1}{2}\right],$$

- $\mathrm{sum}_2-mn+1=nq_2+s_2$, $0\le s_2\le n-1$, $0\le q_2\le m-1$,

$$v(\mathrm{sum}_2)=\left[\frac{m-q_2}{2}\right]\cdot\left[\frac{n-s_2}{2}\right]+\left[\frac{m-q_2-1}{2}\right]\cdot\left[\frac{s_2}{2}\right].$$

В частности, при $\mathrm{sum}_1 = \mathrm{sum}_2 = mn-1$ формулы дают один и тот же результат. Действительно,

- $\mathrm{sum}_1 = mn-1 = n(m-1)+(n-1),\ q_1 = m-1,\ s_1 = n-1$ и

$$v(\mathrm{sum}_1) = v(mn-1) = \left[\frac{(m-1)+1}{2}\right]\cdot\left[\frac{(n-1)+1}{2}\right]+\left[\frac{m-1}{2}\right]\cdot\left[\frac{n-(n-1)-1}{2}\right]=$$
$$=\left[\frac{m}{2}\right]\cdot\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{m-1}{2}\right]\cdot\left[\frac{0}{2}\right]=\left[\frac{m}{2}\right]\cdot\left[\frac{n}{2}\right];$$

- $\mathrm{sum}_2 - mn+1 = (mn-1)-mn+1 = 0 = n\cdot 0+0,\ q_2 = 0,\ s_2 = 0$ и

$$v(\mathrm{sum}_2) = v(mn-1) = \left[\frac{m-0}{2}\right]\cdot\left[\frac{n-0}{2}\right]+\left[\frac{m-0-1}{2}\right]\cdot\left[\frac{0}{2}\right]=\left[\frac{m}{2}\right]\cdot\left[\frac{n}{2}\right].$$

В любом случае $v(mn-1) = \left[\frac{m}{2}\right]\cdot\left[\frac{n}{2}\right]$.

Рассмотрим общий случай.

Так как числа sum_1 и $\mathrm{sum}_2 - mn+1$ являются элементами матрицы R, то $\mathrm{sum}_1 = r_{q_1+1,s_1+1}$ и $\mathrm{sum}_2 - mn+1 = r_{q_2+1,s_2+1}$. Так как $\frac{\mathrm{sum}_1+\mathrm{sum}_2}{2} = mn-1$, то $r_{q_1+1,s_1+1} + r_{q_2+1,s_2+1} = mn-1$, значит, r_{q_1+1,s_1+1} и r_{q_2+1,s_2+1} симметричны относительно $mn-1$, тогда $q_2+1 = m-(q_1+1)+1$ и $s_2+1 = n-(s_1+1)+1$, то есть $q_2 = m-q_1-1$ и $s_2 = n-s_1-1$. Следовательно,

$$v(\mathrm{sum}_2) = \left[\frac{m-(m-q_1-1)}{2}\right]\cdot\left[\frac{n-(n-s_1-1)}{2}\right]+\left[\frac{m-(m-q_1-1)-1}{2}\right]\cdot\left[\frac{n-s_1-1}{2}\right]=$$
$$=\left[\frac{q_1+1}{2}\right]\cdot\left[\frac{s_1+1}{2}\right]+\left[\frac{q_1}{2}\right]\cdot\left[\frac{n-s_1-1}{2}\right]=v(\mathrm{sum}_1).$$

Итак, если верно равенство $\frac{\mathrm{sum}_1+\mathrm{sum}_2}{2} = mn-1,\ n+1 \le \mathrm{sum}_1 \le mn-1$ и $mn-1 \le \mathrm{sum}_2 \le 2mn-n-3$, то и верно равенство $v(\mathrm{sum}_1) = v(\mathrm{sum}_2)$. Другими словами, если $\mathrm{sum} \in [n+1; mn-1]$, то $v(\mathrm{sum}) = v(2mn-2-\mathrm{sum})$. Поэтому исследования величины $v(\mathrm{sum})$ можно проводить при $\mathrm{sum} \in [n+1; mn-1]$.

Числа sum и $2mn-2-\mathrm{sum}$, $\mathrm{sum} \in [n+1; mn-1]$, как уже отмечалось, в ряду натуральных чисел $n+1, n+2, \ldots, 2mn-n-3$ симметрично расположены относительно его середины – числа $mn-1$.

Из доказанного следует, что для матрицы R размерности $m\times n$ верно равенство

$$mn-1+2\cdot\sum_{\mathrm{sum}=n+1}^{mn-2} v(\mathrm{sum}) = \frac{mn(m-1)(n-1)}{4}.$$

Пример. Рассмотрим матрицу R размерности 5×9.

Так как $mn-1 = 44$, то справедливо равенство $v(\mathrm{sum}) = v(88-\mathrm{sum})$ для всех $\mathrm{sum} \in [10;44]$. Если $\mathrm{sum} = 30$, то $v(30) = v(58)$.

Для подсчета количества квадратов матрицы R, суммы которых равны 30 и 58, воспользуемся разбиением матрицы R на прямоугольники (рис. 4).

$\mathrm{sum} = 30$

0	1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42	43	44

$\mathrm{sum} = 58$

0	1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42	43	44

Рисунок 4 – Разбиение матрицы R на прямоугольники

Видим, что $v(30) = v(58) = 6$.

Можем заметить, что разбиения матрицы R на прямоугольники для случаев $\mathrm{sum} = 30$ и $\mathrm{sum} = 58$ симметричны относительно центра матрицы R.

0	1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42	43	44

Рисунок 5 – Центр матрицы R размерности 5×9

Центр матрицы R совпадает с элемент $r_{35} = 22$. ■

Рассмотрим примеры для разной четности размерностей матрицы R.

Пример. Рассмотрим матрицу R размерности 5×4,

$R =$

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15
16	17	18	19

В этой матрице можно выделить 60 квадратов, суммы которых принадлежат отрезку $[5;33]$, поэтому общее число значений сумм равно $33 - 5 + 1 = 29$.

Так как $mn - 1 = 19$, то справедливо равенство $v(\mathrm{sum}) = v(38 - \mathrm{sum})$ для всех $\mathrm{sum} \in [5;33]$.

В таблице 1 представлены данные по суммам квадратов sum матрицы R и количестве квадратов с данной суммой $v(\mathrm{sum})$.

Таблица 1 – Суммы квадратов и число квадратов с данной суммой (5×4)

sum	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$v(\mathrm{sum})$	1	1	2	1	2	1	2	1	3	2	4	2	4	2	4
sum	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19
$v(\mathrm{sum})$	1	1	2	1	2	1	2	1	3	2	4	2	4	2	4

Представляя графически данные таблицы 1, получаем изображение на рисунке 6, соединив для наглядности точки $(\text{sum};v(\text{sum}))$.

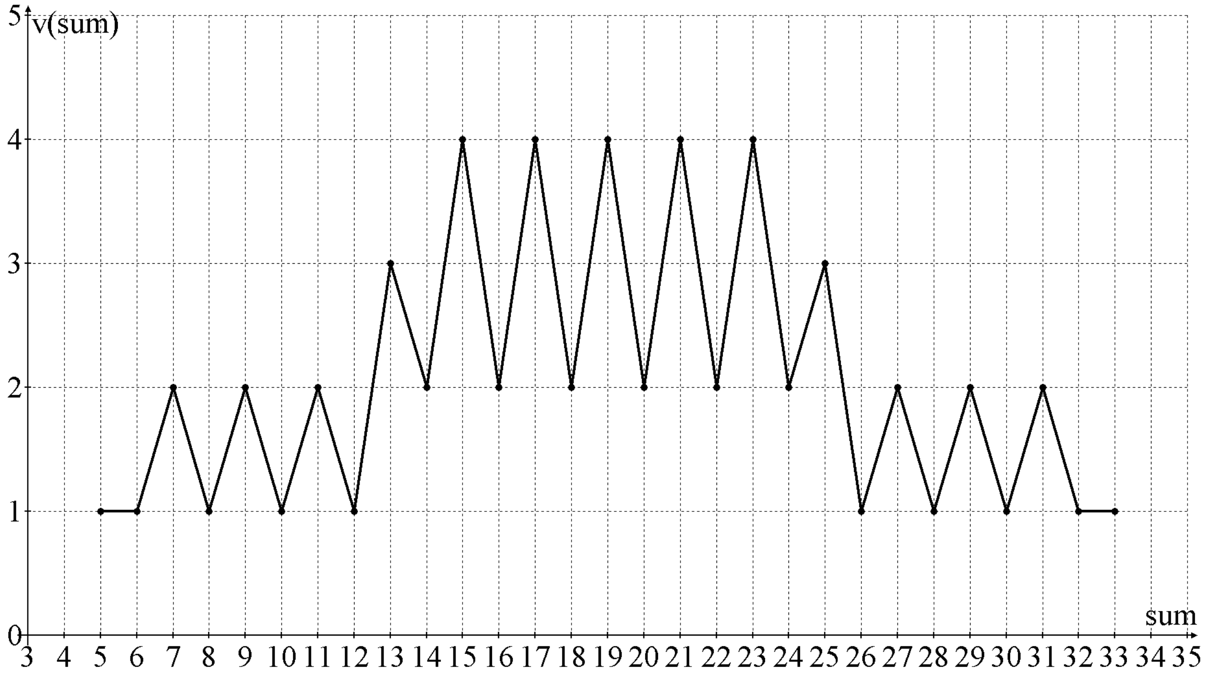

Рисунок 6 – Графическое представление данных таблицы 1

Ожидаемо, что изображение на рисунке 6 симметрично относительно прямой $\text{sum}=19$. ■

Пример. Рассмотрим матрицу R размерности 4×5,

$$R=\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 2 & 3 & 4\\ \hline 5 & 6 & 7 & 8 & 9\\ \hline 10 & 11 & 12 & 13 & 14\\ \hline 15 & 16 & 17 & 18 & 19\\ \hline\end{array}$$

В этой матрице можно выделить 60 квадратов, суммы которых принадлежат отрезку $[6;32]$, поэтому общее количество значений сумм равно 27. Верно равенство $v(\text{sum})=v(38-\text{sum})$ для всех $\text{sum}\in[6;32]$.

В таблице 2 представлены данные по суммам квадратов sum матрицы R и количестве квадратов с данной суммой $v(\text{sum})$.

Таблица 2 – Суммы квадратов и число квадратов с данной суммой (4×5)

sum	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
v(sum)	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	4	4
sum	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19
v(sum)	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	4	4

Представляя графически данные таблицы 2, получаем рисунок 7.

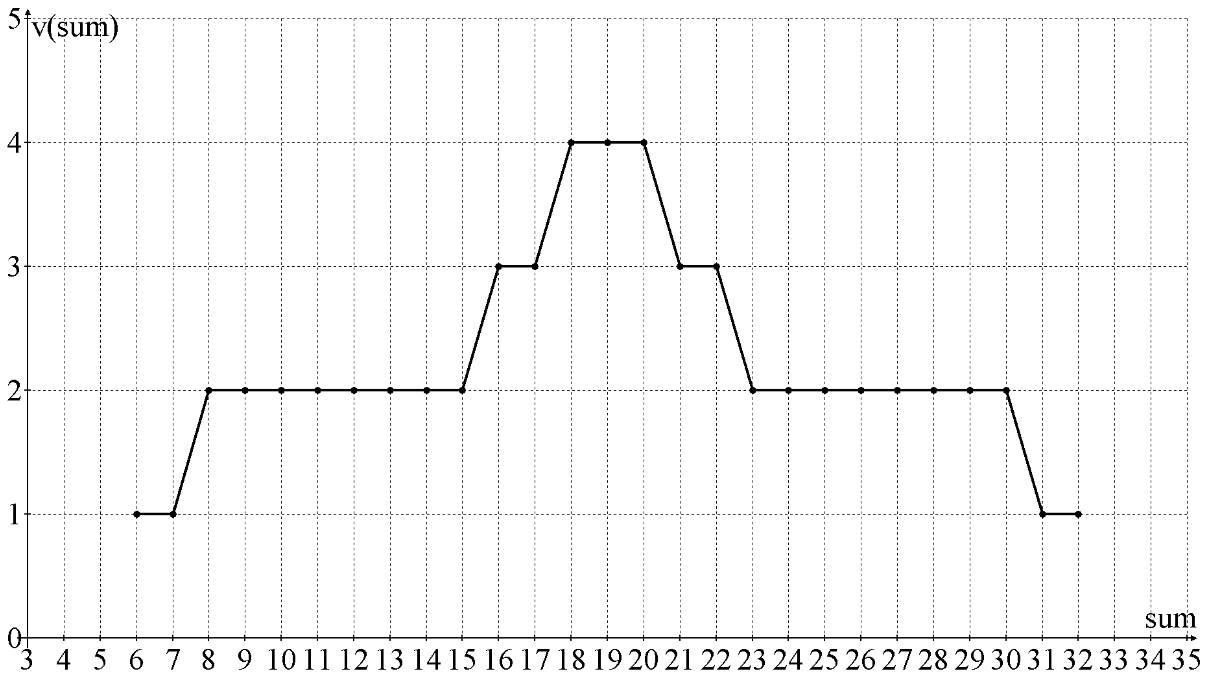

Рисунок 7 – Графическое представление данных таблицы 2

Изображение симметрично относительно прямой $\mathrm{sum}=19$. ■

Пример. Рассмотрим матрицу R размерности 4×6,

$$R=\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ \hline 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \\ \hline 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 \\ \hline\end{array}$$

В этой матрице можно выделить 90 квадратов, суммы которых принадлежат отрезку $[7;39]$, поэтому общее количество значений сумм равно 33. Верно равенство $v(\mathrm{sum})=v(46-\mathrm{sum})$ для всех $\mathrm{sum}\in[7;39]$.

В таблице 2 представлены данные по суммам квадратов sum матрицы R и количестве квадратов с данной суммой $v(\mathrm{sum})$.

Таблица 3 – Суммы квадратов и число квадратов с данной суммой (4×6)

sum	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
v(sum)	1	1	2	2	3	2	3	2	3	2	3	2	4	3	5	4	6
sum	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23
v(sum)	1	1	2	2	3	2	3	2	3	2	3	2	4	3	5	4	6

Представляя графически данные таблицы 3, получаем рисунок 8.

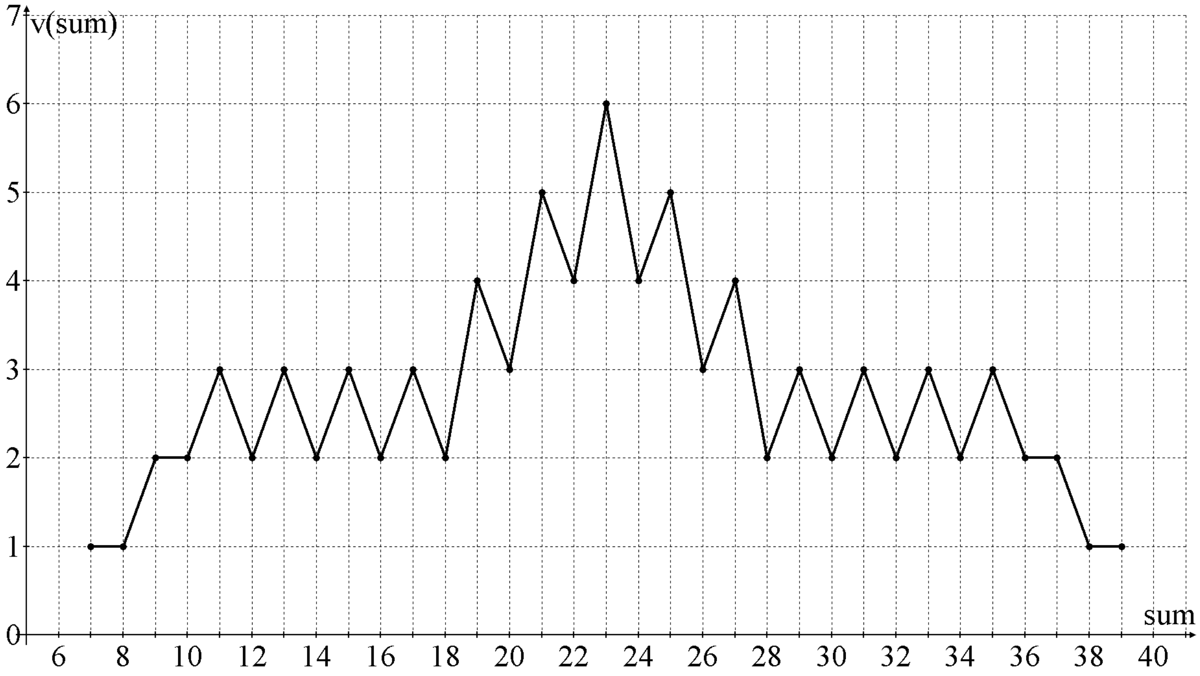

Рисунок 8 – Графическое представление данных таблицы 3

Ось симметрии графика – прямая $\mathrm{sum} = 23$. ■

Пример. Рассмотрим матрицу R размерности 5×5,

$$R = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ \hline 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \\ \hline 20 & 21 & 22 & 23 & 24 \\ \hline \end{array}$$

В этой матрице можно выделить 100 квадратов, суммы которых принадлежат отрезку $[6;42]$, поэтому общее число значений сумм равно 37. Верно равенство $v(\mathrm{sum}) = v(48 - \mathrm{sum})$ для всех $\mathrm{sum} \in [6;42]$.

В таблице 4 представлены данные по суммам квадратов sum матрицы R и количестве квадратов с данной суммой $v(\mathrm{sum})$.

Таблица 4 – Суммы квадратов и число квадратов с данной суммой (5×5)

sum	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
v(sum)	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	4	4	4	4	4	4	4
sum	42	41	40	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24
v(sum)	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	4	4	4	4	4	4	4

Графическое представление данных таблицы 4 представлены на рис. 9.

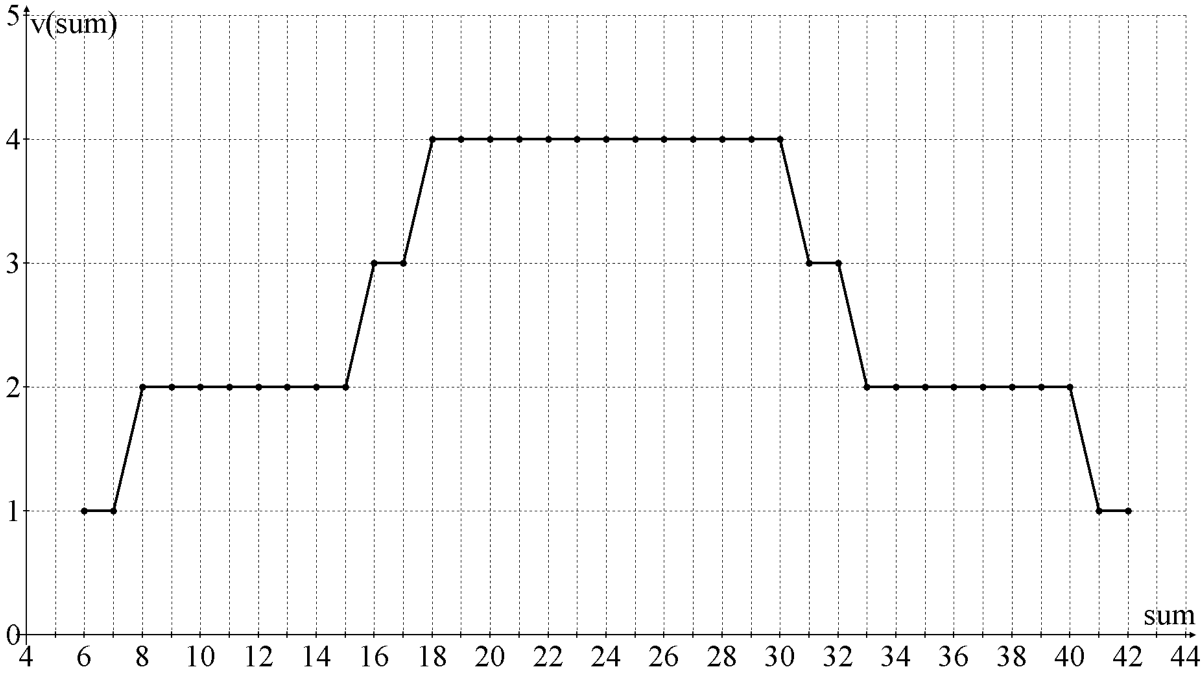

Рисунок 9 – Графическое представление данных таблицы 4

Ось симметрии графика – прямая $\mathrm{sum} = 24$. ■

Как известно, если матрица R содержит два столбца, то при четных значениях sum верно равенство $v(\mathrm{sum}) = 0$.

Пример. Рассмотрим матрицу R размерности 6×2,

$$R = \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 \\ \hline 6 & 7 \\ \hline 8 & 9 \\ \hline 10 & 11 \\ \hline \end{array}$$

В этой матрице можно выделить 15 квадратов, суммы которых принадлежат отрезку $[3;19]$, поэтому общее число значений сумм равно 17. Справедливо равенство $v(\mathrm{sum}) = v(22 - \mathrm{sum})$ для всех $\mathrm{sum} \in [3;19]$.

В таблице 5 представлены данные по суммам квадратов sum матрицы R и количестве квадратов с данной суммой $v(\mathrm{sum})$.

Таблица 5 – Суммы квадратов и число квадратов с данной суммой (6×2)

sum	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$v(\mathrm{sum})$	1	0	1	0	2	0	2	0	3
sum	19	18	17	16	15	14	13	12	11
$v(\mathrm{sum})$	1	0	1	0	2	0	2	0	3

Представляя графически данные таблицы 5, получаем рисунок 10.

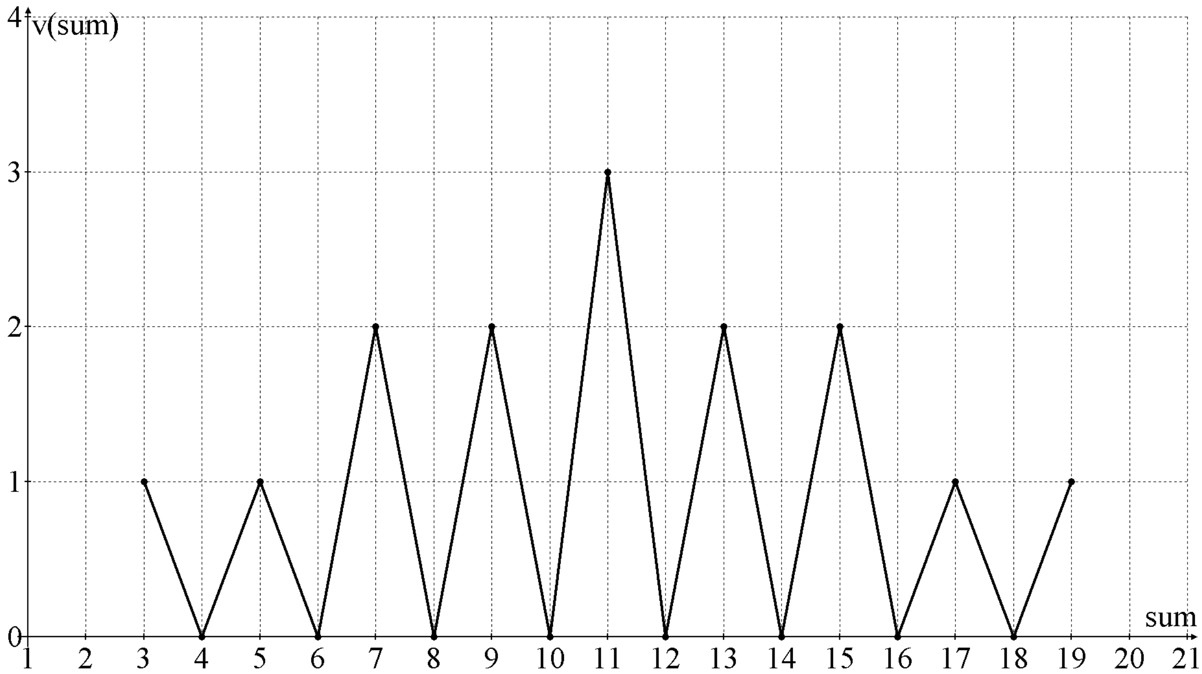

Рисунок 10 – Графическое представление данных таблицы 5

Изображение симметрично относительно прямой $\mathrm{sum}=11$. ■

5. Наибольшее значение количество квадратов заданной суммы

Рассмотрим вопрос о наибольшем значении $v(\mathrm{sum})$ для матрицы R размерности $m\times n$, где sum – сумма квадрата матрицы R.

Как уже отмечалось, что исследования величины $v(\mathrm{sum})$ для матрицы R можно проводить при $\mathrm{sum}\in[n+1;mn-1]$.

Формула для вычисления $v(\mathrm{sum})$ при $\mathrm{sum}\in[n+1;mn-1]$ имеет вид:

$$v(\mathrm{sum})=\left[\frac{q+1}{2}\right]\cdot\left[\frac{s+1}{2}\right]+\left[\frac{q}{2}\right]\cdot\left[\frac{n-s-1}{2}\right],$$

где $\mathrm{sum}=nq+s$, $0\le s\le n-1$, $0\le q\le m-1$ зависит от целой части числа. Покажем справедливость следующих неравенств, содержащие целые части числа, используя тот факт, что для любого целого числа k и произвольного действительного числа a справедливо равенство $[k+a]=k+[a]$.

1. $\left[\dfrac{\ell-1}{2}\right]\le\left[\dfrac{\ell}{2}\right]$ для любого целого ℓ.

Если ℓ – нечетное число, то

$$\left[\frac{\ell}{2}\right]=\left[\frac{\ell-1}{2}+\frac{1}{2}\right]=\frac{\ell-1}{2}+\left[\frac{1}{2}\right]=\frac{\ell-1}{2}+0=\left[\frac{\ell-1}{2}\right].$$

Если ℓ – четное число, то

$$\left[\frac{\ell-1}{2}\right]=\left[\frac{\ell}{2}-\frac{1}{2}\right]=\frac{\ell}{2}+\left[-\frac{1}{2}\right]=\frac{\ell}{2}-1<\frac{\ell}{2}=\left[\frac{\ell}{2}\right].$$

2. $\left[\frac{k}{2}\right]+\left[\frac{\ell-k}{2}\right]\le\left[\frac{\ell}{2}\right]$ для любых целых k и ℓ.

Если k – четное и ℓ – нечетное или четное, то

$$\left[\frac{k}{2}\right]+\left[\frac{\ell-k}{2}\right]=\frac{k}{2}+\left[\frac{\ell}{2}-\frac{k}{2}\right]=\frac{k}{2}+\left[\frac{\ell}{2}\right]-\frac{k}{2}=\left[\frac{\ell}{2}\right].$$

Если k – нечетное и ℓ – нечетное или четное, то

$$\left[\frac{k}{2}\right]+\left[\frac{\ell-k}{2}\right]=\left[\frac{k-1}{2}+\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{\ell-1}{2}-\frac{k-1}{2}\right]=$$

$$=\frac{k-1}{2}+\left[\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{\ell-1}{2}\right]-\frac{k-1}{2}=\left[\frac{\ell-1}{2}\right]\le\left[\frac{\ell}{2}\right].$$

Теперь покажем, что $v(\mathrm{sum})\le v(mn-1)$ для любого $\mathrm{sum}\in[n+1;mn-1]$.

Так как $\mathrm{sum}\in[n+1;mn-1]$ и $\mathrm{sum}=nq+s$, $0\le s\le n-1$ и $0\le q\le m-1$, то наибольшее значение q равно $m-1$. Тогда

$$v(\mathrm{sum})=\left[\frac{q+1}{2}\right]\cdot\left[\frac{s+1}{2}\right]+\left[\frac{q}{2}\right]\cdot\left[\frac{n-s-1}{2}\right]\le$$

$$\le\left[\frac{(m-1)+1}{2}\right]\cdot\left[\frac{s+1}{2}\right]+\left[\frac{m-1}{2}\right]\cdot\left[\frac{n-s-1}{2}\right]=\left[\frac{m}{2}\right]\cdot\left[\frac{s+1}{2}\right]+\left[\frac{m-1}{2}\right]\cdot\left[\frac{n-s-1}{2}\right]\le$$

$$\le\left[\frac{m}{2}\right]\cdot\left[\frac{s+1}{2}\right]+\left[\frac{m}{2}\right]\cdot\left[\frac{n-s-1}{2}\right]\le\left[\frac{m}{2}\right]\cdot\left(\left[\frac{s+1}{2}\right]+\left[\frac{n-s-1}{2}\right]\right)\le$$

$$\le\left[\frac{m}{2}\right]\cdot\left[\frac{n}{2}\right]=v(mn-1).$$

Итак, наибольшее значение величины $v(\mathrm{sum})$ при $\mathrm{sum}\in[n+1;mn-1]$ (значит, и при $\mathrm{sum}\in[n+1;2mn-n-3]$) равно $v(mn-1)=\left[\frac{m}{2}\right]\cdot\left[\frac{n}{2}\right]$, которое зависит от величин размерностей матрицы R. Поэтому

$$0\le v(\mathrm{sum})\le\left[\frac{m}{2}\right]\cdot\left[\frac{n}{2}\right],\ \text{где } \mathrm{sum}\in[n+1;2mn-n-3].$$

Равенство нулю может быть при четных значениях sum для матрицы R с двумя столбцами.

Заключение

Рассматривая квадраты матрицы R, естественно было определить величину $v(\mathrm{sum})$, равную количеству квадратов матрицы, сумма каждого из которых равна sum. В статье представлена формула для подсчета значений этой величины. Показано, что ее значения симметричны относительно числа, равного середине возможных значений сумм квадратов. Благодаря этому свойству график величины $v(\mathrm{sum})$ обладает свойством симметричности, что проиллюстрировано примерами. Определено наибольшее значение величины $v(\mathrm{sum})$.

Библиографический список

1. Попов И.Н. Группы RC и RCD: монография. Архангельск: КИРА, 2014. 192 с.
2. Попов И.Н. Квадраты матриц // Научно-исследовательская деятельность школьников в области математики, прикладной математики и информатики: материалы Шестой региональной научно-практической конференции. Часть II / сост. С.Н. Котова; отв. ред. М.В. Шабанова; Сев. (Арктич.) федер. ун-т им. М.В. Ломоносова. Архангельск: САФУ, 2014. С. 119-127.
3. Попов И.Н. Суммы квадратов матрицы // Постулат. 2018. № 4. URL: http://e-postulat.ru/index.php/Postulat/article/view/1367/1398