

УДК 517.9

Динамические режимы сообщества хищник – жертва (ресурс-потребитель), в случае, когда жертва описывается логистическим уравнением

Широкова Надежда Алексеевна

*Приамурский государственный университет имени Шолом-Алейхем
студент*

Фрисман Ефим Яковлевич

*Институт комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН
д.б.н., профессор, директор*

Аннотация

В статье проводится анализ модели динамики сообщества двух популяций, взаимодействующих по типу хищник – жертва или ресурс – потребитель. Предполагается, что скорость роста ресурса линейно падает с увеличением его численности и численности потребителя, а скорость роста численность потребителя лимитирована только количеством доступного ресурса и линейно растет при его увеличении. Построен параметрический портрет модели, выделен треугольник устойчивости нетривиального равновесия и области значений параметров, при которых изменения численности популяций жертвы и хищника носят характер регулярных и квазипериодических колебаний.

Ключевые слова: динамические режимы, модель типа хищник-жертва, треугольник устойчивости.

Dynamic Community regimes predator - prey (resource consuming) when the victim is described by the logistic equation

Shirokova Nadezhda Alekseevna

*Sholom-Aleichem Priamursky State University
Student*

Frisman Efim Yakovlevich

*Institute for Complex Analysis of Regional Problems, Far Eastern Branch of RAS
Doctor of Biological Sciences , Professor, Director*

Abstract

The article analyzes the dynamics of the community model of two populations, inter-acting by type predator - prey or resource - the consumer. It is assumed that the resource growth rate decreases linearly with the increase in its size and consumer laziness, and the number of user growth rate is limited only by the amount of available resources and increases linearly with the increase it. In

parametric portrait slim model, isolated triangle of stability of non-trivial equilibrium and the region of parameter values for which the change in the number of populations and victims of predator have the character of regular and quasiperiodic oscillations.

Keywords: dynamic mode, the model predator-prey, triangular-nick stability.

В первой половине XX века были опубликованы результаты ряда исследований по математической биологии [1-3], которые надолго определили последующее развитие теоретической экологии. Математической базой этих работ были изящные модели, построенные на основе систем дифференциальных уравнений и удачно описывающие многие популяционные феномены, наблюдающие в природных биологических сообществах: колебания численностей, конкурентное вытеснение, устойчивое разнообразие видов и многое другое.

В начале 70-х годов, в основном благодаря базовым работам Р. Мэя [4, 5] и А.П. Шапиро [6, 7], математическая популяционная биология пополнилась достаточно простыми, но весьма эффектными моделями, основанными на рекуррентных уравнениях. С одной стороны эти модели представлялись более адекватными при описании динамики видов, характеризующихся сезонным периодом размножения. С другой – рекуррентные уравнения легко анализировались численно, благодаря использованию быстро развивающейся вычислительной техники. Неожиданно оказалось, что эти «простенькие» модели, обладают колоссальным разнообразием возможных динамических режимов, весьма сложно эволюционирующих при изменении параметров модели.

В данном исследовании рассматривается система рекуррентных уравнений, соответствующая модели динамики сообщества двух популяций, взаимодействующих по типу хищник – жертва или ресурс – потребитель. По-видимому, это наиболее интересный тип взаимодействия и с точки зрения экологии и с точки зрения математики. Будем полагать, что скорость роста ресурса, линейно падает с увеличением его численности и численности потребителя, а рост численность потребителя лимитирована только количеством доступного ресурса и линейно растет при его увеличении. В итоге по аналогии с моделями Ферхюльста, Лотки и Вольтера приходим к следующей модели:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= ax_n(1 \pm y_n - cx_n) \\ y_{n+1} &= by_n(1 \pm x_n)\end{aligned}\tag{1}$$

Эта система имеет три стационарные точки:

- 1) $\bar{x}_1 = 0, \bar{y}_1 = 0$ тривиальная точка, соответствующая отсутствию (вымиранию) ресурса и потребителя;
- 2) $\bar{x}_2 = (a - 1)/a, \bar{y}_2 = 0$ – полутривиальная точка, соответствующая отсутствию хищника и равновесному существованию потребителя;

3) $\bar{x}_3 = (1 - b)/b$, $\bar{y}_3 = (a - 1)/a - c(1 - b)/b$ – нетривиальная точка, соответствующая устойчивому существованию сообщества ресурс-потребитель.

Условие существования решения в нетривиальной точке следующее

$$\frac{1 - b}{b} < \frac{a - 1}{a\rho} \quad (2)$$

Для последней стационарной точки построим матрицу Якоби:

$$\left\| \begin{array}{cc} 1 - \frac{a\rho(1 - b)}{b} & -\frac{a(1 - b)}{b} \\ b - \frac{b}{a} - \rho(1 - b) & 1 \end{array} \right\| \quad (3)$$

Соответственно, характеристическое уравнение имеет вид:

$$\lambda^2 - \left(2 - \frac{a\rho(1 - b)}{b}\right)\lambda + 1 + (a - 1)(1 - b) - \frac{a\rho(1 - b)(2 - b)}{b} = 0 \quad (4)$$

Введем новое обозначение параметров (4)

$$a\rho = c$$

Тогда уравнение (4) будет выглядеть следующим образом:

$$\lambda^2 - \left(2 - \frac{c(1 - b)}{b}\right)\lambda + 1 + (a - 1)(1 - b) - \frac{c(1 - b)(2 - b)}{b} = 0 \quad (5)$$

Построим треугольники устойчивости нетривиальной стационарной точки в пространстве параметров (a, c) при разных значениях параметра b :

Начнем с $b = 1/2$

При данном значении b , характеристическое уравнение (5) будет следующим:

$$\lambda^2 - (2 - c)\lambda + 1 + \frac{a - 1}{2} - \frac{3c}{2} = 0 \quad (6)$$

Граница области устойчивости задается условиями $\lambda = +1$ и $\lambda = -1$ для действительных мультипликаторов, и $|\lambda| = 1$ – для комплексных. Если все три условия выполнены и в результате пересечения полученных прямых образовался треугольник, то можно говорить о существовании устойчивости системы внутри данного треугольника.

- 1) $a = c + 1$ – граница области устойчивости для $\lambda = +1$.
- 2) $a = 5c - 7$ – граница области устойчивости для $\lambda = -1$.
- 3) $a = 3c + 1$ – граница области устойчивости для $|\lambda| = 1$.

Построим график всех трех линий и получим треугольник устойчивости (рис. 1 а). Поступая аналогично, легко построить треугольник устойчивости при $b = 2/3$ (рис. 1 б) и $b = 2/3$ (рис. 1 в).

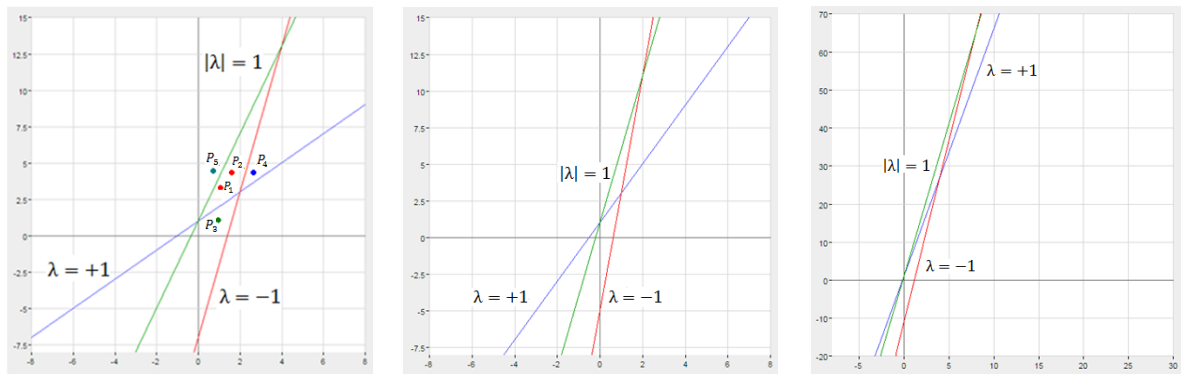


Рисунок 1. Треугольник устойчивости
 а) $b = 1/2$, б) $b = 1/3$, в) $b = 2/3$

Проведенные построения позволяют визуально заключить, что в рассмотренных примерах наибольшая площадь треугольника устойчивости наблюдаются при $b = 0,5$; уменьшение и увеличение этого параметра приводит к заметной деформации треугольника и уменьшению его площади.

Проследим изменение характера динамики сообщества ресурс потребитель в разных областях параметрического пространства. Проиллюстрируем различные типы динамического поведения системы для случая $b = 0,5$.

Если параметры модели лежат внутри треугольника устойчивости (точки P_1 и P_2 на рис. 1а), то численности жертвы и хищника с течением времени выходят на стационарный режим (рис. 2(а,б)).

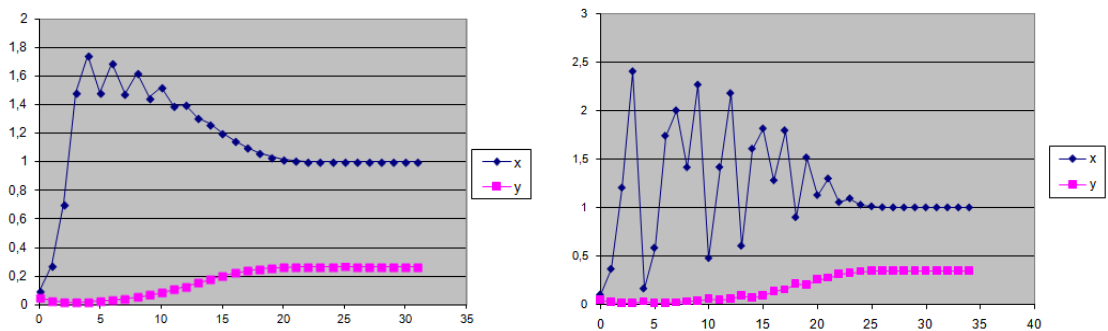


Рисунок 2. Динамический режим модели, в случае параметры лежат внутри треугольника устойчивости
 а) $a = 3, c = 1,2$ ($\rho = 0,4$) точка P_1 на рис. 1а.
 б) $a = 4, c = 1,6$ ($\rho = 0,4$) точка P_2 на рис. 1а.

Как видно на рис. 2 с течением времени сообщество стремится к равновесным значениям численности, однако в переходном режиме при малой численности хищника могут наблюдаться колебания численности жертвы. Эти колебания оказываются тем сильнее выражены и тем более хаотичны, чем больше значения репродуктивного потенциала жертвы. Рост численности хищника стабилизирует популяцию жертвы и выводит сообщество на равновесный режим.

При изменении параметров модели и пересечении ими синей линии (т.е. в случае, когда параметры модели лежат правее и ниже синей линии $\lambda = +1$ (точка P_3 на рис. 1а)), популяция хищника вырождается, ей не хватает пищи. Популяция жертвы ведет себя как независимая популяция, и стремится к равновесию (рис. 3).

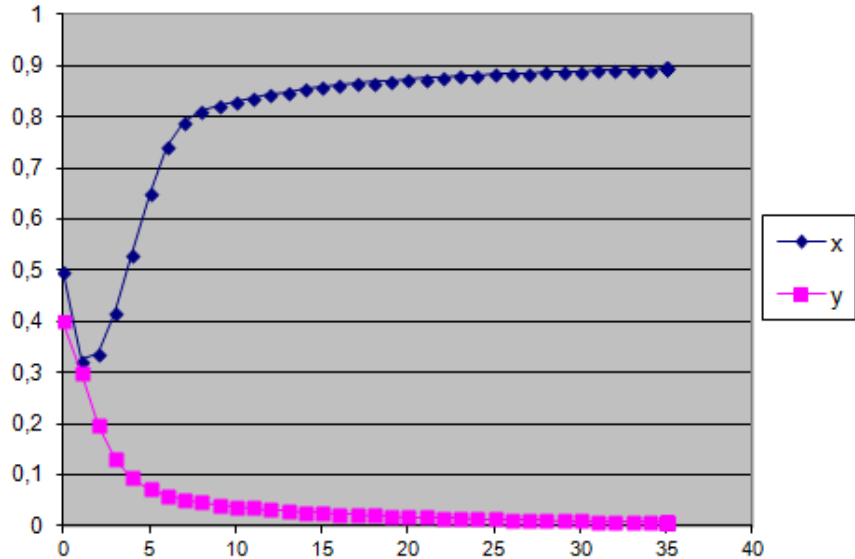


Рисунок 3. Динамический режим модели, в случае, когда параметры лежат правее и ниже линии $\lambda = +1$ ($a = 2, c = 1,1, \rho = 0,55$ Точка P_3 на рис.1а).

При пересечении $\lambda = -1$ красной линии (т.е. в случае, когда параметры модели лежат правее и ниже красной линии $\lambda = -1$, но выше синей $\lambda = +1$ (точка P_4 на рис. 1а)) в популяции жертвы наблюдается циклическая динамика и к ней «подстраивается» динамика хищника (рис. 4).

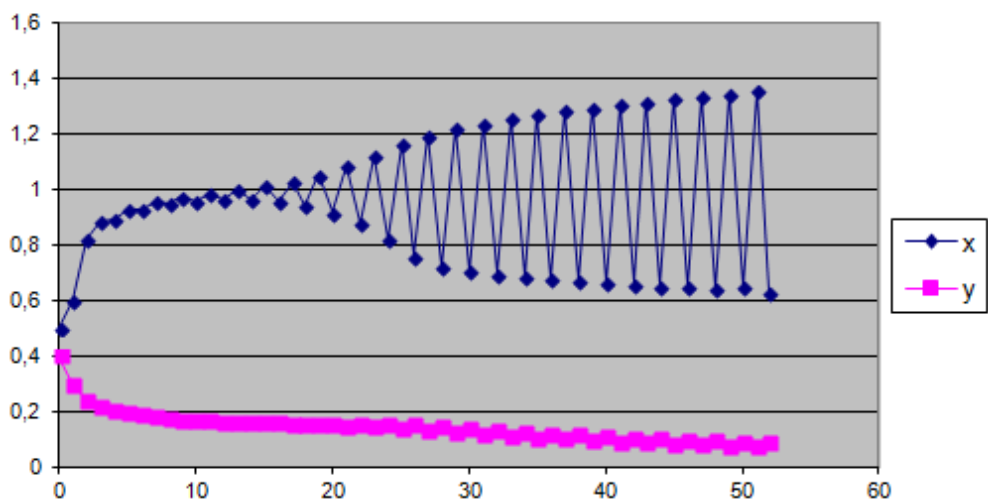


Рисунок 4. Динамический режим модели, в случае, когда параметры лежат правее и ниже линии $\lambda = -1$ ($a = 4, c = 2,4, \rho = 0,6$).

Наиболее интересный режим наблюдается при пересечении параметрами модели зеленой линии (т.е. в случае, когда параметры модели

лежат левее и выше зеленой линии, но и выше синей (точка P_5 на рис. 1а)): и в популяции жертвы, и в популяции хищника изменения численности носят характер квазипериодических колебаний (рис. 5)

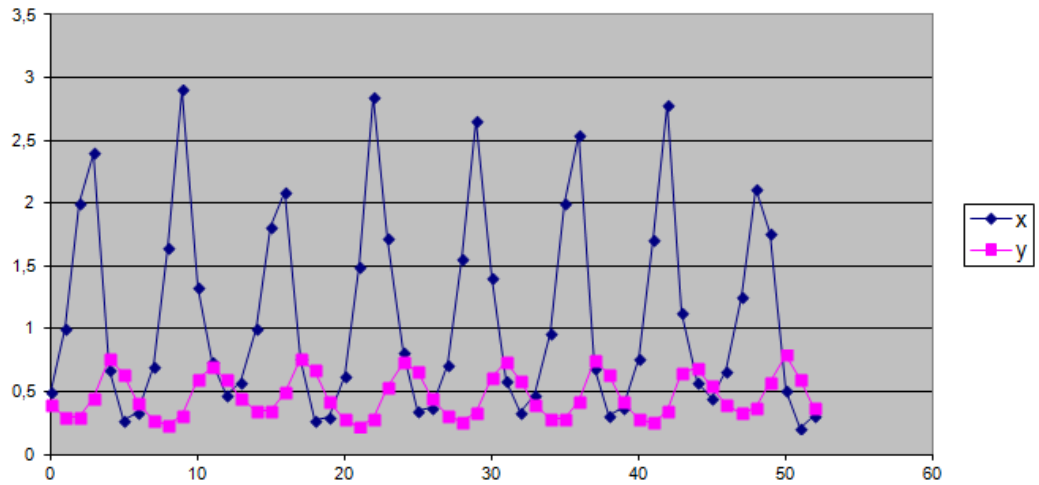


Рисунок 5. Динамический режим модели, если ее параметры лежат правее и ниже линии $|\lambda| = 1$ ($a = 4, c = 0,8, \rho = 0,2$).

На фазовом портрете модели в этом случае можно визуализировать хаотический аттрактор, который «отрисовывает» траектория системы после некоторого переходного периода (рис. 6).

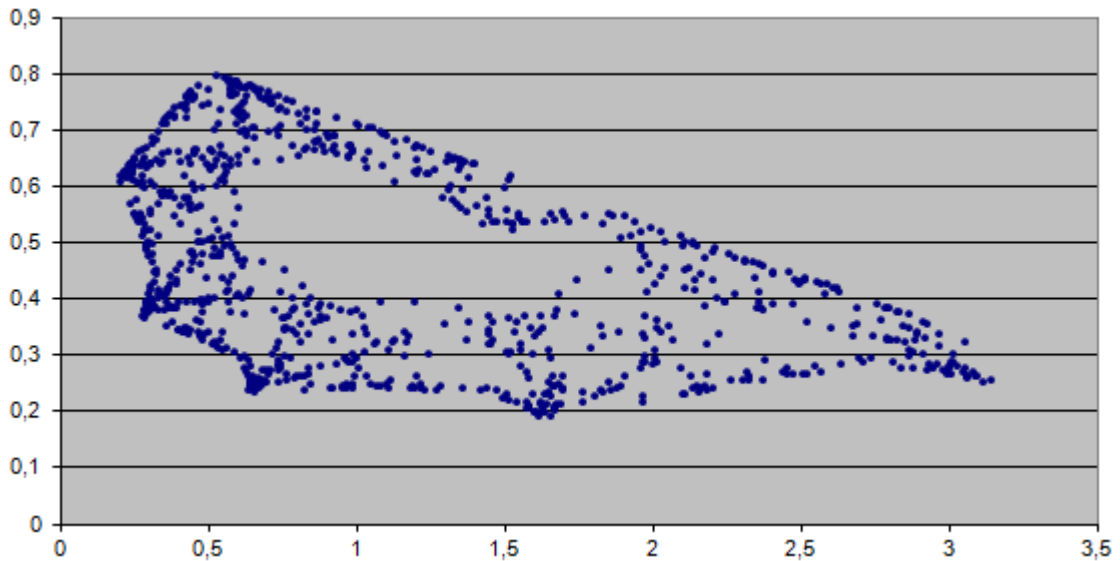


Рисунок 6. Аттрактор системы (2.1.1) при $a = 4, c = 0,8, \rho = 0,2$

Итак, проведенное исследование показало, что в значительной части параметрического пространства взаимодействующие популяции успешно сосуществуют. При этом при значениях параметров, попадающих в треугольник устойчивости, сообщество стремится к равновесным значениям численности. Однако в переходном режиме при малой численности хищника могут наблюдаться колебания численности жертвы. Эти колебания тем сильнее выражены и тем более хаотичны, чем больше значения репродуктивного потенциала жертвы. Рост численности хищника

стабилизирует популяцию жертвы и выводит сообщество на равновесный режим.

Выделена область значений параметров, при которых в популяции жертвы наблюдается строго циклическая динамика и к ней «подстраивается» динамика хищника, а также область значений, при которых и в популяции жертвы, и в популяции хищника изменения численности носят характер квазипериодических колебаний, а в фазовом пространстве системы наблюдается хаотический аттрактор

Математические результаты, полученные при изучении моделей популяционной динамики, могут быть весьма полезны для практических целей управления биотехнологическими и природными системами, а главное, они дают пищу для развития собственно математических теорий.

Библиографический список

1. Lotka A.J. Elements of physical biology. Baltimor: Williams and wilkins, 1925.
2. Volterra V. Lecons sur la theorie mathematique de la lutte pour la vie. Paris, 1931.
3. Kostitzin V.A. La Biologie Mathematique. Paris: A.Colin, 1937. 236 p.
4. May R.M. Biological populations with non-overlapping generations: stable points, stable cycles, and chaos. Science. 1974. V. 186. P. 645–647.
5. May R.M. Biological population obeying difference equations: stable points, stable cycles, and chaos. J. Theor. Biol. 1975. V.51. № 2. P.511-524.
6. Шапиро А.П. К вопросу о циклах в возвратных последовательностях. В: Управление и информация. Вып. 3. Владивосток: ДВНЦ АН СССР, 1972. С.96-118.
7. Шапиро А.П., Луппов С.П. Рекуррентные уравнения в теории популяционной биологии. М.: Наука, 1983. 132 с.