УДК 372.8

Геометрический смысл производной: визуализация в Maple

Сабадаш Татьяна Леонидовна
Приамурский государственный университет имени Шолом-Алейхема
магистрант

Эйрих Надежда Владимировна
Приамурский государственный университет имени Шолом-Алейхема
к.ф.-м.н., доцент, декан факультета математики, информационных технологий и техники

Аннотация
Программное обеспечение Maple использовалось для создания наглядностей (графиков, анимационных роликов), демонстрирующих геометрический смысл производной.
Ключевые слова: наглядность, принцип наглядности, производная функции, секущая графика функции, касательная, нормаль.

Geometric Interpretation of Derivative: visualization with Maple

Sabadash Tatyana Leonidovna
Sholom-Aleichem Priamursky State University,
postgraduate

Eyrikh Nadezhda Vladimirovna
Sholom-Aleichem Priamursky State University
PhD in Mathematics, Associate Professor, Dean of the Department of Mathematics, IT and Techniques

Abstract
Maple software by Maplesoft is used for visualization (graphics, animation) of the geometric interpretation of the derivative function.
Keywords: visualization, the principle of visualization, of the derivative function, secant line function, tangent, normal.

Использование в процессе обучения математике средств наглядности, бесспорно, способствует повышению эффективности усвоения учащимися знаний и умений. Основоположником принципа наглядности считают Я.А. Коменского, который рассматривал чувственный опыт ребенка как основу обучения. Дальнейшее развитие взгляды Я.А. Коменского получили в работах известных педагогов прошлого И.Г. Песталоцци, К.Д. Ушинского [6]. В наши дни вопросами использования наглядности в обучении математики занимались Л.М. Фридман [6], Е.И. Смирнов [3], И.М. Смирнова [5], В.Д. Шадриков [7] и др.

В учебнике «Алгебра и начала анализа. 11 класс» [1], рекомендованного для обучения математике базового и профильного уровней, предусмотрено изучение таких основных понятий математического анализа как предел последовательности, предел функции, непрерывность функции, производная и ее геометрический смысл. В связи с особыми методами исследования (анализ бесконечно малых, предельный переход), математический анализ относится к одному из самых трудных предметов для изучения. Он требует для понимания развития высокой абстрактной мыслительной деятельности у школьников.

На наш взгляд, частично преодолеть субъективные трудности, возникающие при изучении основ математического анализа в школе, позволит применение наглядных средств, демонстрирующих определение производной и построение касательных к графикам различных функций.

Нами был использован специализированный математический пакет Maple – одна из самых мощных и «разумных» систем символьной математики, созданная группой ученых во главе с Кейтом Геддом и Гастоном Гонэ в 1980 году в университете Waterloo, Канада [2]. Подобные пакеты также называются системами компьютерной алгебры. Из множества подобных систем (Matlab, Mathcad, Mathematica) Maple является признанным лидером в области символьных вычислений. Но помимо этого Maple обладает превосходными средствами графической визуализации, позволяющими их использовать в обучении.

Для расширения графических возможностей системы Maple необходимо загрузить пакет *plots* (рис.1).

```
> restart; with(plots) :
```

Рисунок 1 – Подключение пакета расширенных средств графики

Изобразить в одной системе координат касательную и нормаль к графику заданной функции g в заданной точке $u0$ можно, обратившись к процедуре *KasNorm* (рис.2).

```
> KasNorm := proc(g, u0, h) local T, H :
  T := x→g(u0) + D(g)(u0)·(x − u0) :
  H := x→g(u0) − (x − u0)/(D(g)(u0)) :
  plot([g(x), T(x), H(x)], x = u0 − h..u0 + h, y = g(u0) − h..g(u0) + h,
      discont = true, scaling = constrained, color = [red, black, green], linestyle
      = [solid, solid, longdash], thickness = [3, 2, 1]) :
  end proc:
```

Рисунок 2 – Процедура построения касательной и нормали

Результаты работы данной процедуры для различных функций представлены на рисунках 3 и 4 (график заданной функции изображен красной сплошной линией, касательная – черной сплошной, нормаль – зеленым пунктиром).

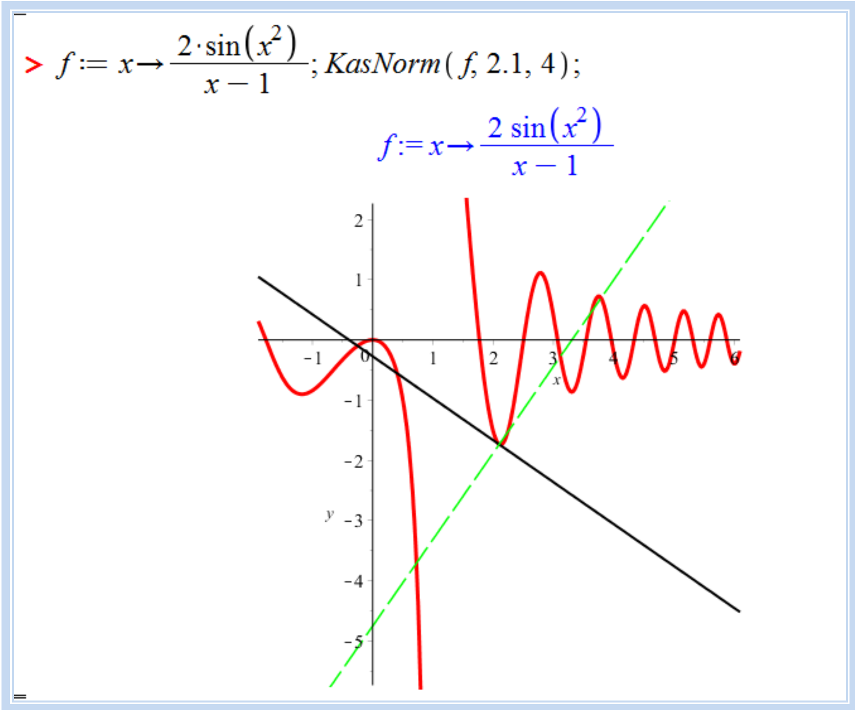


Рисунок 3 – Касательная и нормаль к графику функции $f(x)=\dfrac{2\sin x}{x-1}$

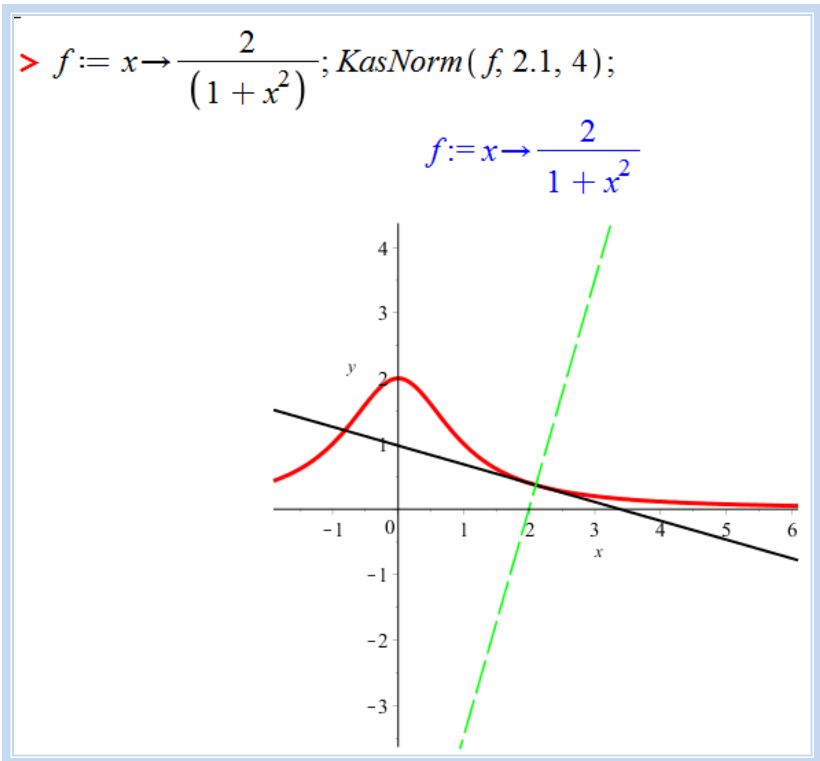


Рисунок 4 – Касательная и нормаль к графику функции $f(x)=\dfrac{2}{1+x^2}$

Понятие касательной к графику функции вводится как предельное положение секущей MK, когда точка K неограниченно приближается по графику к фиксированной точке M. Для демонстрации этого приближения можно изобразить семейство секущих при $\Delta x \to 0$ (рис.5).

$$> restart; with(plottools) : with(plots) :$$

$$f := x \to x^2 : x0 := 0.5 : \Delta x := 1.5 : h := 2.3 :$$

$$Tf := x \to f(x0) + \mathrm{D}(x)(x0) \cdot (x - x0) :$$

$$Sec := x \to f(x0) + \frac{\left(f\left(x0 + \frac{\Delta x}{i}\right) - f(x0)\right)}{\Delta x} \cdot i \cdot (x - x0) :$$

$$Sc := seq(Sec(x), i = 1..4);$$

$$Sc := -1.000000000 + 2.500000000\,x,\ -0.6250000000 + 1.750000000\,x,\ -0.5000000000 + 1.500000000\,x,\ -0.4375000000 + 1.375000000\,x$$

$$> plot\left([f(x), Sc], x = x0 - h..x0 + h, y = f(x0) - \frac{3 \cdot h}{4}..f(x0) + \frac{8 \cdot h}{4}, thickness = [4, 2, 2, 2, 2], color = [black, green, blue, coral, red]\right);$$

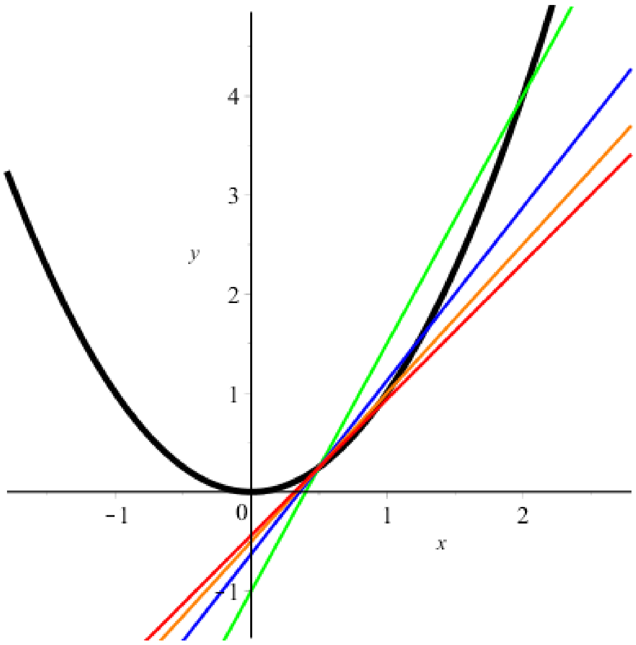


Рисунок 5 – Семейство секущих к графику функции $f(x) = x^2$ в точке $x_0 = 0{,}5$

Кроме статических рисунков в системе Maple предусмотрена возможность создания анимационных роликов. Несомненно, визуализация при этом существенно повышается, школьники могут увидеть «ожившую» секущую, которая, постепенно изменяя свое положение, в пределе совпадает с касательной к графику функции. Для создания анимации вначале необходимо подключить дополнительные пакеты расширения (рис.6).

$$> restart; with(plots, animate, display) : with(plottools) : with(plots) :$$

Рисунок 6 – Подключение пакетов расширения

Процедура *ASecKas* (рис.7) позволяет «оживить» секущую S, которая медленно поворачиваясь вокруг фиксированной точки $P0(u0, g(u0))$, совпадает с касательной T к графику заданной функции g в заданной точке $u0$.

$$> ASecKas := \mathbf{proc}(g, u0, h)\,\mathbf{local}\ T, S, \Delta x, t, f1, T1, S1, Pon, P, P0, M0 :$$

$$\Delta x := \frac{h}{2} : t := 80 :$$

$$Pon := \mathbf{proc}(x, y)\ plots[pointplot]([[x, y]], color = blue, symbol = solidcircle, symbolsize = 20)\ \mathbf{end\ proc}:$$

$$T := x \rightarrow g(u0) + \mathrm{D}(g)(u0) \cdot (x - u0) :$$

$$S := x \rightarrow g(u0) + \frac{\left(g\left(u0 + \frac{\Delta x \cdot (t - i)}{t}\right) - g(u0)\right)}{\Delta x \cdot (t - i)} \cdot t \cdot (x - u0) :$$

$$f1 := plot\left(g(x), x = u0 - h..u0 + h, y = g(u0) - h..g\left(u0 + \frac{h}{2}\right), scaling = constrained, color = red, linestyle = solid, thickness = 3, discont = true\right) :$$

$$T1 := plot(T(x), x = u0 - h..u0 + h, y = g(u0) - h..g(u0) + h, scaling = constrained, color = black, linestyle = longdash, thickness = 2) :$$

$$S1 := plots[animate](S(x), x = u0 - h..u0 + h, i = 0..t - 1, frames = t, scaling = constrained, color = blue, linestyle = solid, thickness = 2) :$$

$$P := animate\left(Pon, \left[u0 + \frac{\Delta x \cdot (t - i)}{t}, g\left(u0 + \frac{\Delta x \cdot (t - i)}{t}\right)\right], i = 0..t - 1, scaling = constrained, frames = t\right) :$$

$$P0 := point([[u0, g(u0)]], color = black, symbol = solidcircle, symbolsize = 20) :$$

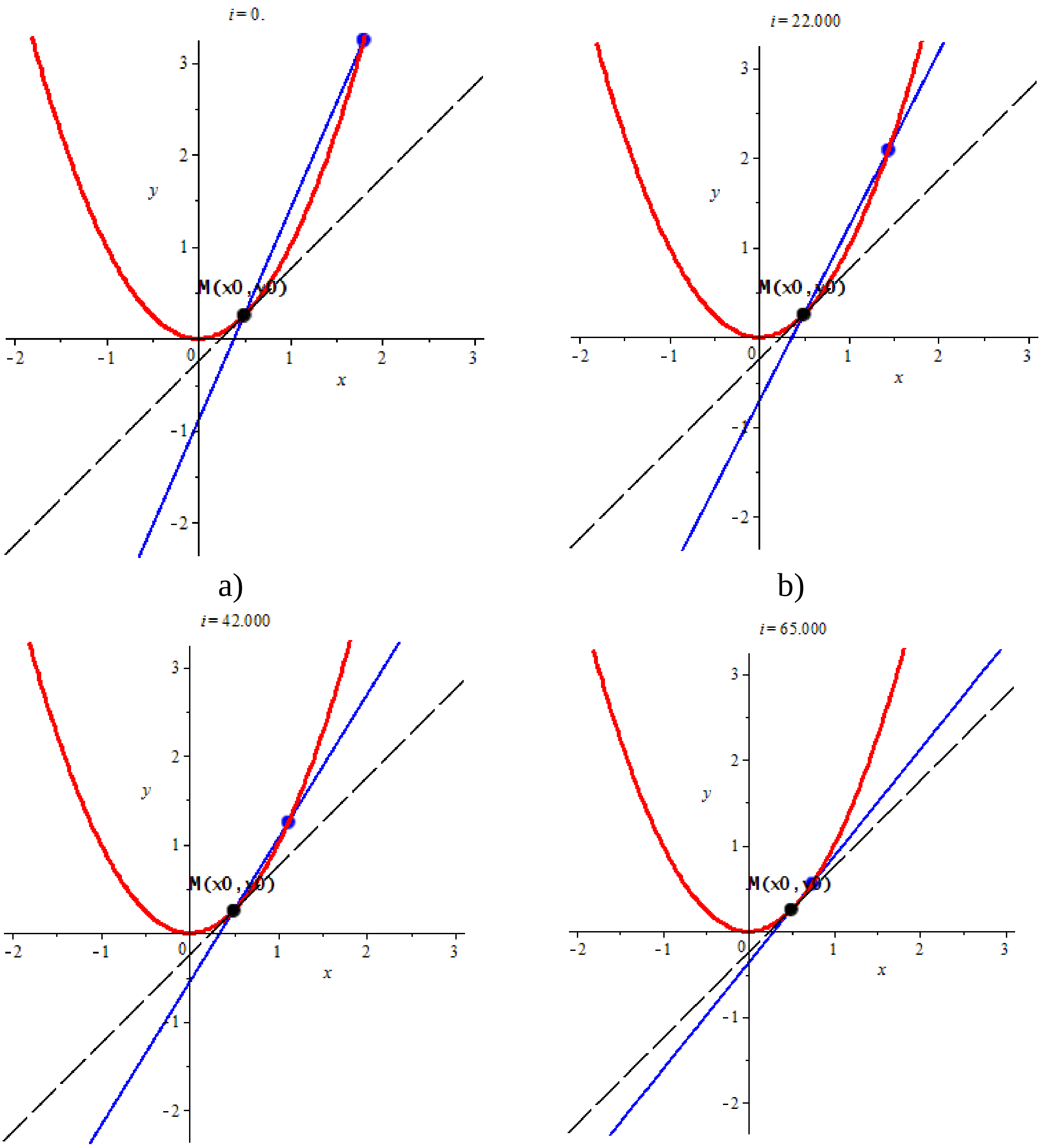
$$M0 := textplot([u0, g(u0) + 0.2, \text{"M(x0,y0)"}, font = [Courier, bold, 10], align = above]) :$$

$$plots[display]([P, f1, T1, S1, P0, M0]) :$$

$$\mathbf{end\ proc}:$$

Рисунок 7 – Процедура, создающая анимационный ролик движения секущей в пределе совпадающей с касательной

Процедура *ASecKas* также показывает в движении точку $P\left(u0+\dfrac{\Delta x(t-i)}{t}, g\left(u0+\dfrac{\Delta x(t-i)}{t}\right)\right)$ пересечения графика функции секущей, которая постепенно приближается к фиксированной точке $P0$. На рисунках 8 и 9 приведено по четыре кадра из анимационных роликов для функций $f(x)=x^2$ и $f(x)=\sin x$ соответственно.



a) b) c) d)

Рисунок 8 – Кадры анимации процедуры *ASecKas* для функции $f(x)=x^2$ в точке $x_0=0,5$

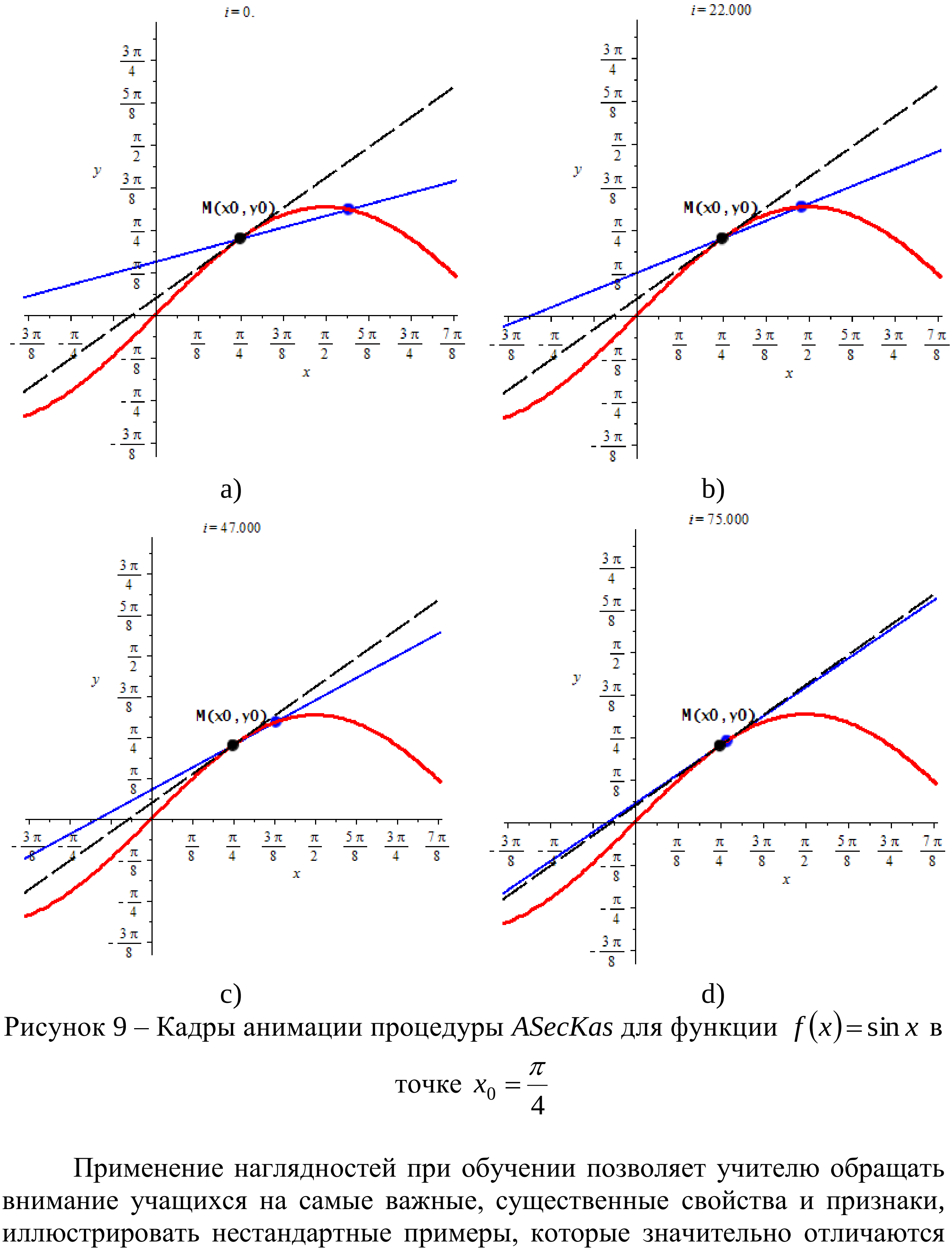
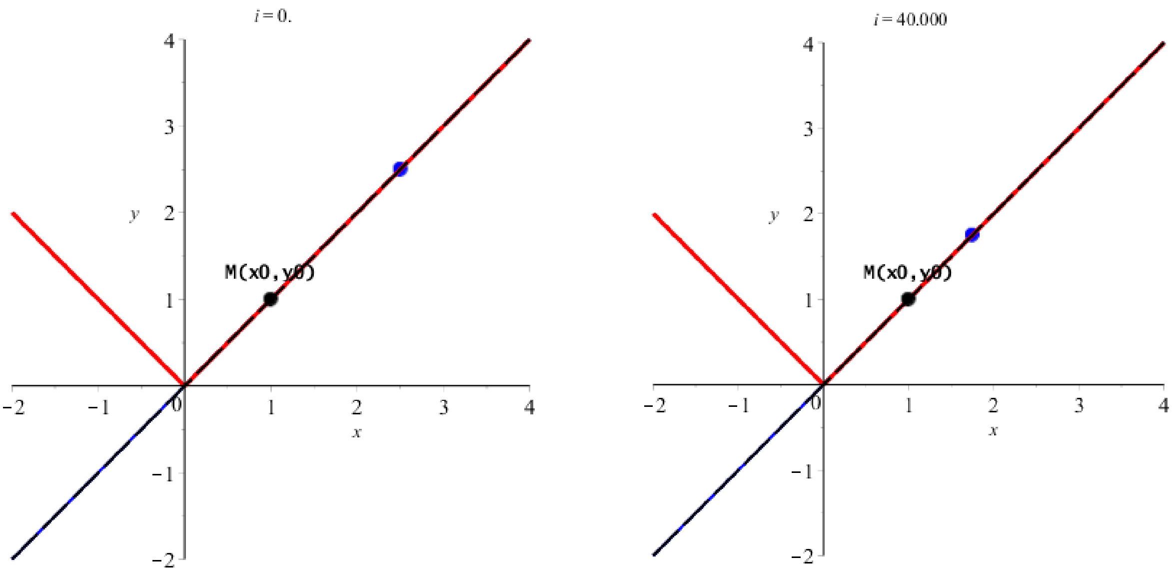


Рисунок 9 – Кадры анимации процедуры *ASecKas* для функции $f(x) = \sin x$ в точке $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$

Применение наглядностей при обучении позволяет учителю обращать внимание учащихся на самые важные, существенные свойства и признаки, иллюстрировать нестандартные примеры, которые значительно отличаются от привычных картинок в учебниках. Например, в случае построения секущих и касательных к графикам функций, в качестве заданной функции можно выбрать линейную функцию $f(x) = kx + b$ и показать совпадение касательной и секущих. На рисунке 10 приведены кадры из анимационного ролика, где строятся секущие и касательная к графику функции $f(x) = |x|$.



a) b)

Рисунок 10 – Кадры анимации процедуры *ASecKas* для функции $f(x)=|x|$ в точке $x_0=1$

Демонстрация таких наглядных средств поможет учителю не только при объяснении нового материала, но послужит и развитию наблюдательности и лучшему запоминанию.

Однако учитель всегда должен помнить о «правиле золотой середины» и использовать средства наглядности ровно столько, сколько это нужно, не допускать перегрузки обучения наглядными пособиями, не превращать наглядность в самоцель. Когда и в какой мере применить наглядность в процессе обучения учитель должен принимать решение самостоятельно, так как от этого зависит качество знаний учащихся.

Принцип наглядности требует сочетания наглядности и мысленных действий, наглядности и слова. Вредно как недостаточное, так и избыточное применение средств наглядности. Их недостаток приводит к формальным знаниям, а избыток может затормозить развитие логического мышления, пространственного представления и воображения [3].

Библиографический список

1. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин; под ред. А.Б. Жижченко. – М.: Просвещение, 2010. – 336 с.
2. Дьяконов В.П. Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании. – М.:СОЛОН-Пресс, 2006. – 720 с.
3. Наглядное моделирование в обучении математике: теория и практика: Учебное пособие / Богун В.В., Осташков В.Н., Смирнов Е.И., Под ред.

Смирнова Е.И. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2007. – 454 с.
4. Принцип наглядности // Информационно-справочная система. Электронная хрестоматия по методике преподавания математики URL: http://fmi.asf.ru/Library/Book/Mpm/index.html (дата обращения: 29.11.2015).
5. Смирнова И.М. Научно-методические основы преподавания геометрии в условиях профильной дифференциации обучения: автореф. дис. ... д-р пед. - М., 1995. - 38 с.
6. Фридман Л.М. Наглядность и моделирование в обучении. – М.: Знание, 1984. – 80 с.
7. Шадриков В.Д. Психология деятельности и способности человека: Учебное пособие. – М.: Логос, 1996. – 320 с.