Постулат. 2018. №6 ISSN 2414-4487

УДК 512.5

Квадраты матрицы со знакопеременными элементами

Попов Иван Николаевич
Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова
к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры математики

Аннотация
В статье изложены результаты по определению возможного множества значений сумм матрицы с четным числом столбцов, элементы которой есть последовательные целые числа, нечетные числа из которых берутся со знаком минус, формул для вычисления числа квадратов рассматриваемой матрицы определенной суммы и его свойств.
Ключевые слова: матрица, подматрица, квадрат матрицы.

Squares of the matrix with alternating elements

Popov Ivan Nikolaevich
Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov
Candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, associate professor of the Department of Mathematics

Abstract
The article presents the results of determining the possible set of values of the matrix sums with an even number of columns, the elements of which are consecutive integers, odd numbers of which are taken with a minus sign, formulas for calculating the number of squares of the matrix of a certain amount and its properties.
Keywords: matrix, submatrix, square matrix.

Введение

В статье будут использоваться результаты работ [1–4].

Рассмотрим матрицу C размерности $m\times n$ с элементами

$$c_{q+1,s+1}=(-1)^{nq+s}\cdot(nq+s),$$

где $0\le q\le m-1,\ 0\le s\le n-1,\ q,s\in N\bigcup\{0\}$. Примерами являются следующие матрицы:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -3 & 4 \\ -5 & 6 & -7 & 8 & -9 \\ 10 & -11 & 12 & -13 & 14 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & -5 \\ 6 & -7 & 8 \\ -9 & 10 & -11 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -3 & 4 & -5 \\ 6 & -7 & 8 & -9 & 10 & -11 \end{pmatrix}.$$

В матрице C четные числа записываются со знаком плюс, а нечетные – со знаком минус.

Пусть R – матрица размерности $m\times n$, элементами которой являются целые последовательные числа от 0 до $mn-1$: $r_{q+1,s+1}=nq+s$, где $0\le q\le m-1$, $0\le s\le n-1$, $q,s\in N\bigcup\{0\}$.

Для произвольной матрицы A размерности $m\times n$ четыре элемента a_{is}, a_{it}, a_{js} и a_{jt}, где $1\le i\le m$, $1\le j\le m$, $1\le s\le n$, $1\le t\le n$, $i<j$, $s<t$, образуют подматрицу $\begin{pmatrix} a_{is} & a_{it} \\ a_{js} & a_{jt} \end{pmatrix}$ матрицы A, называемую квадратом и обозначаемую $A(i,s;\ i,t;\ j,s;\ j,t)$. Число квадратов матрицы A вычисляется по формуле $mn(m-1)(n-1)/4$. Сумма квадрата $A(is;it;js;jt)$ равна $(a_{is}+a_{jt}+a_{it}+a_{js})/2$ и обозначается $\mathrm{Sum}(A(i,s;\ i,t;\ j,s;\ j,t))$.

Пусть sum – число из множества возможных значений сумм квадратов некоторой матрицы A размерности $m\times n$. Количество квадратом матрицы A, сумма которых равно sum, обозначается $v_A(\mathrm{sum})$.

Цель статьи – изложение результатов по определению возможного множества значений сумм матрицы C с четным числом столбцов, формул для вычисления количества квадратов матрицы C определенной суммы и его свойств.

1. Матрица C с четным числом столбцов и суммы ее квадратов

Будем рассматривать случай, в котором число столбцов в матрице C, то есть число n, является четным. Тогда $c_{q+1,s+1}=(-1)^s\cdot(nq+s)$. Если $s+1$ – нечетное число, то $c_{q+1,s+1}=nq+s$ – четное положительное число (за исключением числа 0); если $s+1$ – четное число, то $c_{q+1,s+1}=-(nq+s)$ – нечетное отрицательное число. Отсюда элементы, расположенные в столбцах с нечетными номерами, являются четными положительными числами (за исключением числа 0); элементы, расположенные в столбцах с четными номерами, являются нечетными отрицательными числами.

2. Матрица C и суммы ее квадратов: случай $n\ge 6$

Вычислим сумму квадрата $C(i,s;\ i,t;\ j,s;\ j,t)$ матрицы C размерности $m\times n$, где $n\ge 6$. По определению суммы квадрата $\mathrm{Sum}(C(i,s;\ i,t;\ j,s;\ j,t))$ получаем:

$$\mathrm{Sum}(C(i,s;\ i,t;\ j,s;\ j,t))=\frac{c_{is}+c_{js}+c_{it}+c_{jt}}{2}=\frac{c_{is}+c_{js}}{2}+\frac{c_{it}+c_{jt}}{2}=$$

$$=\frac{(-1)^{s-1}\cdot(n(i-1)+s-1)+(-1)^{s-1}\cdot(n(j-1)+s-1)}{2}+$$

$$+\frac{(-1)^{t-1}\cdot(n(i-1)+t-1)+(-1)^{t-1}\cdot(n(j-1)+t-1)}{2}=$$

$$=\frac{(-1)^{s-1}\cdot(n(i+j-2)+2s-2)+(-1)^{t-1}\cdot(n(i+j-2)+2t-2)}{2}=$$

$$=\frac{n(i+j-2)((-1)^{s-1}+(-1)^{t-1})+(-1)^{s-1}\cdot(2s-2)+(-1)^{t-1}\cdot(2t-2)}{2}=$$

$$=\frac{n}{2}(i+j-2)((-1)^{s-1}+(-1)^{t-1})+(-1)^{s-1}\cdot(s-1)+(-1)^{t-1}\cdot(t-1).$$

Итак,

$$\mathrm{Sum}(C(i,s;\ i,t;\ j,s;\ j,t))=$$

$$=\frac{n}{2}(i+j-2)((-1)^{s-1}+(-1)^{t-1})+(-1)^{s-1}\cdot(s-1)+(-1)^{t-1}\cdot(t-1).$$

Видим, что сумма квадрата матрицы C является целым числом.

В зависимости от четности чисел s и t, которые являются номерами столбцов матрицы C, получим упрощенные вычислительные формулы для сумм квадратов матрицы и границы их изменения.

Заметим, если $[x;y]$ – целочисленный отрезок и числа x, y четные (нечетные), то в нем содержится $\frac{y-x}{2}+1$ четных (нечетных) чисел.

А) Если s, t – четные числа, то

$$\mathrm{Sum}(C(i,s;\ i,t;\ j,s;\ j,t))=-n(i+j-2)-s-t+2$$

и сумма является четной для любых i и j.

Из чисел вида $-n(i+j-2)-s-t+2$ при четных s, t

- наименьшее равно $-n((m-1)+m-2)-n-(n-2)+2=-n(2m-1)+4$;
- наибольшее равно $-n(1+2-2)-2-4+2=-n-4$.

Получили неравенство

$$-n(2m-1)+4\le -n(i+j-2)-s-t+2\le -n-4.$$

Концами отрезка $[-n(2m-1)+4;-n-4]$ являются четные числа, тогда в нем содержится $\frac{(-n-4)-(-n(2m-1)+4)}{2}+1=mn-n-3$ четных целых чисел, количество которых нечетно. Серединой отрезка является число $-mn$.

Б) Если s, t – нечетные числа, то

$$\mathrm{Sum}(C(i,s;\ i,t;\ j,s;\ j,t))=n(i+j-2)+s+t-2$$

и сумма является четной для любых i и j.

Из чисел вида $n(i+j-2)+s+t-2$ при нечетных s, t

- наименьшее равно $n(1+2-2)+1+3-2=n+2$;
- наибольшее равно $n((m-1)+m-2)+(n-3)+(n-1)-2=n(2m-1)-6$.

Получили неравенство

$$n+2\le n(i+j-2)+s+t-2\le n(2m-1)-6.$$

Концами отрезка $[n+2;n(2m-1)-6]$ являются четные числа, тогда в нем содержится $\frac{(n(2m-1)-6)-(n+2)}{2}+1=mn-n-3$ четных целых чисел, количество которых нечетно. Серединой отрезка является число $mn-2$.

В) Если s – нечетное и t – четное числа, то

$$\mathrm{Sum}(C(i,s;\ i,t;\ j,s;\ j,t)) = s - t$$

и сумма является нечетной для любых i и j.

Из чисел вида $s-t$ при нечетном s и четном t

• наименьшее равно $1-n=-n+1$;

• наибольшее равно $1-2=3-4=\ldots=(n-1)-n=-1$.

Получили неравенство

$$-n+1 \le s-t \le -1.$$

Концами отрезка $[-n+1;-1]$ являются нечетные числа, тогда в отрезке содержится $\dfrac{-1-(-n+1)}{2}+1=\dfrac{n}{2}$ нечетных целых чисел.

Г) Если s – четное и t – нечетное числа, то

$$\mathrm{Sum}(C(i,s;\ i,t;\ j,s;\ j,t)) = t - s$$

и сумма является нечетной для любых i и j.

Из чисел вида $t-s$ при четном s и нечетном t

• наименьшее равно $3-2=5-4=\ldots=(n-1)-(n-2)=1$;

• наибольшее равно $(n-1)-2=n-3$.

Получили неравенство

$$1 \le t-s \le n-3.$$

Концами отрезка $[1;n-3]$ являются нечетные числа, тогда в отрезке содержится $\dfrac{(n-3)-1}{2}+1=\dfrac{n-2}{2}$ нечетных целых чисел.

Отрезки $[-n(2m-1)+4;-n-4]$ и $[n+2;n(2m-1)-6]$, содержащие одно и то же число $mn-n-3$ чисел, симметричны относительно числа -1. Это так, потому что концевые числа этих отрезков симметричны относительно числа -1:

$$\frac{(-n(2m-1)+4)+(n(2m-1)-6)}{2}=-1 \text{ и } \frac{(-n-4)+(n+2)}{2}=-1.$$

В отрезке $[-n+1;\,-1]$ выбираются только нечетные числа, поэтому можем рассмотреть множество $[-n+1;\,-3]\cup\{-1\}$. В отрезке $[-n+1;\,-3]$ содержится $\dfrac{n-2}{2}$ нечетных чисел, столько же, сколько и в отрезке $[1;n-3]$.

Число -1 симметрично относительно самого себя. Отрезки $[-n+1;\,-3]$ и $[1;n-3]$ симметричны относительно числа -1, так как

$$\frac{(-n+1)+(n-3)}{2}=-1 \text{ и } \frac{-3+1}{2}=-1.$$

Учитывая, что $s<t$ и четность значений сумм квадратов матрицы C, получаем следующую цепочку неравенств:

$$-n(i+j-2)-s-t+2 < s-t < t-s < n(i+j-2)+s+t-2.$$

Целочисленное множество возможных значений сумм квадратов матрицы C имеет вид:

$$[-n(2m-1)+4;\,-n-4]\cup[-n+1;\,-3]\cup\{-1\}\cup[1;\,n-3]\cup[n+2;\,n(2m-1)-6].$$

Следует выяснить, каждое ли целое число (четное или нечетное) из полученного множества является суммой некоторого квадрата матрицы C.

Заметим, что для симметрических чисел x и y относительно числа -1 справедливо равенство $x+y=-2$.

Выберем произвольное число k из множества возможных значений сумм квадратов матрицы C.

А) Пусть $k\in\{-1\}$, то есть $k=-1$.

Так как

$$\mathrm{Sum}(C(1,n-1;\,1,n;\,2,n-1;\,2,n))=\mathrm{Sum}\begin{pmatrix} n-2 & -n+1 \\ 2n-2 & -2n+1 \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{(n-2)+(-n+1)+(2n-2)+(-2n+1)}{2}=-1=k.$$

то нашелся квадрат матрицы C, сумма которого равна числу k.

Б) Пусть k – нечетное число из отрезка $[1;\,n-3]$.

Так как $1\le k\le n-3$, то $3\le k+2\le n-1$, отсюда $k+2$ – номер столбца матрицы C. Рассмотрим сумму квадрата $C(1,2;\,1,k+2;\,2,2;\,2,k+2)$. Так как для этого квадрата $t=k+2$ – нечетное, $s=2$ – четное, то

$$\mathrm{Sum}(C(1,2;\,1,k+2;\,2,2;\,2,k+2))=t-s=(k+2)-2=k.$$

Отсюда получаем, что каждое нечетное число из отрезка $[1;\,n-3]$ является суммой некоторого квадрата матрицы C.

В) Пусть k – нечетное число из отрезка $[-n+1;\,-3]$.

Так как $-n+1\le k\le -3$, то $4\le 1-k\le n$, отсюда $1-k$ – номер столбца матрицы C. Рассмотрим сумму квадрата $C(1,1;\,1,1-k;\,2,1;\,2,1-k)$. Так как для этого квадрата $t=1-k$ – четное, $s=1$ – нечетное, то

$$\mathrm{Sum}(C(1,1;\,1,1-k;\,2,1;\,2,1-k))=s-t=1-(1-k)=k.$$

Отсюда получаем, что каждое нечетное число из отрезка $[-n+1;-3]$ является суммой некоторого квадрата матрицы C.

Г) Пусть k – четное число из отрезка $[n+2;n(2m-1)-6]$.

Как уже отмечалось, в столбцах с нечетными номерами в матрице C расположены четные положительные числа (за исключением нуля). Составим матрицу, удалив в матрице C столбцы с четными номерами и разделив ее элементы на число 2.

Рассмотрим q-ю строку матрицы C. В нечетных столбцах матрицы C расположены числа $c_{q,s}=n(q-1)+(s-1)$, где $1\le q\le m$ и $1\le s\le n$:

$$n(q-1)+0,\ n(q-1)+2,\ n(q-1)+4,\ \ldots,\ n(q-1)+n.$$

Тогда, разделив каждый элемент на 2, получаем набор чисел:

$$\frac{n(q-1)+0}{2},\ \frac{n(q-1)+2}{2},\ \frac{n(q-1)+4}{2},\ \ldots,\ \frac{n(q-1)+n}{2}$$

или

$$\frac{n}{2}(q-1)+0,\ \frac{n}{2}(q-1)+1,\ \frac{n}{2}(q-1)+2,\ \ldots,\ \frac{n}{2}(q-1)+\frac{n}{2}.$$

Полученные числа являются последовательными целыми числами. Изменяя значения q от 1 до m, получаем последовательные целые числа от 0 до $\frac{n}{2}\cdot m-1$. В итоге получаем матрицу R размерности $m\times\frac{n}{2}$, в которой для ее элементов справедливо равенство $r_{i,\frac{s+1}{2}}=\frac{1}{2}c_{i,s}$, где s – нечетный номер столбца матрицы C, i – номер строки матрицы C. Перебирая все нечетные числа s от 1 до $n-1$, получаем последовательные целые числа вида $\frac{s+1}{2}$, начиная с 1 и заканчивая $\frac{n}{2}$.

Заметим, что $\frac{1}{2}c_{i,s}$ есть целое число для любого i и нечетного s.

Так как $n+2\le k\le n(2m-1)-6$, то $\frac{n}{2}+1\le\frac{k}{2}\le\frac{n}{2}(2m-1)-3$. Известно, что в матрице R найдется квадрат, сумма которого равна $\frac{k}{2}$. Пусть это квадрат $R\left(i,\frac{s+1}{2};\ i,\frac{t+1}{2};\ j,\frac{s+1}{2};\ j,\frac{t+1}{2}\right)$, где s, t – нечетные числа из отрезка $[1;n-1]$. Тогда $\frac{k}{2}=r_{i,\frac{s+1}{2}}+r_{j,\frac{t+1}{2}}=r_{j,\frac{s+1}{2}}+r_{i,\frac{t+1}{2}}$. По этому квадрату в матрице C построим квадрат $C(i,s;\ i,t;\ j,s;\ j,t)$. Определим его сумму:

$$\mathrm{Sum}(C(i,s;\ i,t;\ j,s;\ j,t))=\mathrm{Sum}\begin{pmatrix}c_{is} & c_{it}\\ c_{js} & c_{jt}\end{pmatrix}=\frac{c_{is}+c_{it}+c_{js}+c_{jt}}{2}=$$

$$=\frac{2(2r_{i,(s+1)/2}+2r_{j,(t+1)/2})}{2}=2\cdot\frac{k}{2}=k.$$

Поэтому все четные числа из отрезка $[n+2;n(2m-1)-6]$ являются суммами некоторых квадратов матрицы C.

Д) Пусть k – четное число из отрезка $[-n(2m-1)+4;-n-4]$.

Как уже отмечалось, в столбцах с четными номерами в матрице C расположены нечетные отрицательные числа. Составим матрицу, удалив в матрице C столбцы с нечетными номерами, прибавив 1 к каждому ее элементу и разделив затем на -2.

Рассмотрим q-ю строку матрицы C. В четных столбцах матрицы C расположены числа $c_{q,s}=-(n(q-1)+(s-1))$, где $1\le q\le m$ и $1\le s\le n$:

$$-n(q-1)-1,\ -n(q-1)-3,\ -n(q-1)-5,\ \ldots,\ -n(q-1)-(n-1).$$

Тогда, прибавив к каждому числу 1 и разделив на -2, получаем набор чисел:

$$\frac{-n(q-1)-0}{-2},\ \frac{-n(q-1)-2}{-2},\ \frac{-n(q-1)-4}{-2},\ \ldots,\ \frac{-n(q-1)-(n-2)}{-2}$$

или

$$\frac{n}{2}(q-1)+0,\ \frac{n}{2}(q-1)+1,\ \frac{n}{2}(q-1)+2,\ \ldots,\ \frac{n}{2}(q-1)+\frac{n-2}{2}.$$

При этом получаем последовательные целые числа. Изменяя значения q от 1 до m получаем последовательные целые числа от 0 до $\frac{n}{2}\cdot m-1$. В итоге из матрицы C получаем матрицу R размерности $m\times\frac{n}{2}$, в которой для ее элементов верно равенство $r_{i,\frac{s}{2}}=-\frac{1}{2}(c_{i,s}+1)$, где s – четный номер столбца матрицы C, i – номер ее строки. Перебирая все четные числа s от 2 до n, получаем последовательные целые числа вида $\frac{s}{2}$ от 1 и до $\frac{n}{2}$.

Заметим, что $-\frac{1}{2}(c_{i,s}+1)$ есть целое число для любого i и четного s.

Так как $-n(2m-1)+4\le k\le -n-4$, то $\frac{n}{2}+1\le-\frac{k}{2}-1\le\frac{n}{2}(2m-1)-3$. Тогда в матрице R найдется квадрат, сумма которого равна $-\frac{k}{2}-1$. Пусть это будет квадрат $R\left(i,\frac{s}{2};\ i,\frac{t}{2};\ j,\frac{s}{2};\ j,\frac{t}{2}\right)$, где s,t – четные числа из отрезка $[2;n]$. Тогда $-\frac{k}{2}-1=r_{i,\frac{s}{2}}+r_{j,\frac{t}{2}}=r_{j,\frac{s}{2}}+r_{i,\frac{t}{2}}$. Рассмотрим в матрице C квадрат $C(i,s;\ i,t;\ j,s;\ j,t)$. Определим его сумму:

$$\mathrm{Sum}(C(i,s;\ i,t;\ j,s;\ j,t))=\mathrm{Sum}\begin{pmatrix}c_{is} & c_{it}\\ c_{js} & c_{jt}\end{pmatrix}=\frac{c_{is}+c_{it}+c_{js}+c_{jt}}{2}=$$

$$=\frac{(-2r_{i,s/2}-1)+(-2r_{j,t/2}-1)+(-2r_{j,s/2}-1)+(-2r_{i,t/2}-1)}{2}=$$

$$=\frac{-2(2r_{i,s/2}+2r_{j,t/2})-4}{2}=-2(r_{i,s/2}+r_{j,t/2})-2=-2\cdot\left(-\frac{k}{2}-1\right)-2=k.$$

Поэтому все четные числа из отрезка $[-n(2m-1)+4;-n-4]$ являются суммами некоторых квадратов матрицы C.

Итак, получили, что все целочисленные значения из множества

$$[-n(2m-1)+4;\ -n-4]\cup[-n+1;\ -3]\cup\{-1\}\cup[1;\ n-3]\cup[n+2;\ n(2m-1)-6]$$

являются суммами некоторых квадратом матрицы C, считая, что из первого и последнего отрезков выбираются четные числа, из второго и четвертого – нечетные. Общее число возможных значений равно

$$2\cdot(mn-n-3)+2\cdot\frac{n-2}{2}+1=n(2m-1)-7,$$

то есть равно $n(2m-1)-7$.

Пример. Рассмотрим матрицу C размерности 4×8.

В данной матрице можно составить 168 квадратов, суммы которых принадлежат множеству $[-52;-12]\cup[-7;-3]\cup\{-1\}\cup[1;5]\cup[10;50]$. В крайних отрезках содержится по 21 четному числу, в двух других – по 3 нечетных числа. Итого $2\cdot 21+2\cdot 3+1=49$ целых чисел. Поэтому квадраты матрицы C могут принимать 49 различных значений.

Из-за симметричности множества значений сумм квадратов матрицы C, возможные значения сумм можно записать в виде таблицы 1.

Таблица 1 – Пары симметрических чисел множества возможных значений

-52	-50	-48	-46	-44	-42	-40	-38	-36	-34	-32	-30	-28	-26	-24	-22	-20	-18	-16	-14	-12
50	48	46	44	42	40	38	36	34	32	30	28	26	24	22	20	18	16	14	12	10

-7	-5	-3
5	3	1

Число -1 симметрично относительно самого себя. Видим, что для всех пар симметричных элементов их сумма равна числу -2. ■

3. Матрица C: случай $n=4$

Если матрица C имеет размерность $m\times 4$, то множество возможных значений сумм квадратов этой матрицы имеет вид:

$$[-8m+8;-8]\cup\{-3;-1;1\}\cup[6;8m-10].$$

Если значение суммы какого-то квадрата матрицы C принадлежит отрезку $[6;8m-10]$, то следует выбирать столбцы с нечетными номерами в матрице C. Поэтому столбцы с четными номерами в матрице C можем удалить из нее. Поделив на 2, получим матрицу R размерности $m\times 2$, В этом случае в матрице R нет квадратов, суммы которых равнялись бы четным числам $2, 4, \ldots$. Тогда в матрице C нет квадратов, суммы которых равнялись бы четным числам $4, 8, \ldots$. Поэтому из отрезка $[6;8m-10]$ выбираем числа вида $6, 10, \ldots, 8m-10$; число таких чисел равно $\frac{(8m-10)-6}{2}+1=2m-3$.

Аналогично рассуждая, получаем, что в отрезке $[-8m+8;-8]$ выбираем четные числа вида $-8m+8, -8m+12, \ldots, -8$; количество таких чисел равно $\frac{-8-(-8m+8)}{2}+1=2m-3$.

Получаем, что в матрице C размерности $m\times 4$ количество возможных значений сумм квадратов равно $2\cdot(2m-3)+3=4m-3$.

Пример. Рассмотрим матрицу C размерности 5×4.

Множество возможных значений сумм квадратов имеет вид:

$$[-32;-8]\cup\{-3;-1;1\}\cup[6;30].$$

Выбирая в крайних отрезках определенные четные числа и группируя их по парам по симметричности относительно числа -1, получаем таблицу 2.

Таблица 2 – Пары симметрических чисел множества возможных значений

-32	-28	-24	-20	-16	-12	-8	-3	-1
30	26	22	18	14	10	6	1	-1

Как видим, число возможных значений равно 17. ■

4. Матрица C: случай $n=2$

Любой квадрат матрицы C размерности $m\times 2$ имеет вид:

$$C(i,1;\ i,2;\ j,1;\ j,2)=\begin{pmatrix} c_{i1} & c_{i2} \\ c_{j1} & c_{j2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2(i-1) & -2(i-1)-1 \\ 2(j-1) & -2(j-1)-1 \end{pmatrix},$$

где $i, j\in\{1;2;\ldots;m\}$ и $i<j$. Сумма квадрата, как видим, равна -1. Значит, сумма каждого квадрата равна -1. Поэтому множество возможных значений сумм квадратов матрицы C совпадает с множеством $\{-1\}$.

Частным случаем матрицы C является матрица 2×2, $C=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. В данной матрице есть только один квадрат с суммой -1.

5. Число квадратов матрицы C определенной суммы: случай $n\ge 6$

Пусть количество столбцов матрицы C не меньше 6. Показано, что множество возможных значений сумм квадратов матрицы C имеет вид

$$[-n(2m-1)+4;\ -n-4]\cup[-n+1;\ -3]\cup\{-1\}\cup[1;\ n-3]\cup[n+2;\ n(2m-1)-6].$$

Определим значения величины $v_C(\mathrm{sum})$ на каждом отдельном отрезке данного множества.

А) Пусть sum – четное число из отрезка $[n+2;\ n(2m-1)-6]$.

Каждому квадрату

$$C(i,s;\ i,t;\ j,s;\ j,t)=\begin{pmatrix} c_{is} & c_{it} \\ c_{js} & c_{jt} \end{pmatrix}$$

матрицы C размерности $m\times n$, где s и t – нечетные числа из отрезка $[1;n-1]$, с суммой sum взаимно однозначно сопоставляется квадрат

$$R\left(i,\frac{s+1}{2};\ i,\frac{t+1}{2};\ j,\frac{s+1}{2};\ j,\frac{t+1}{2}\right)=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}c_{is} & \frac{1}{2}c_{it} \\ \frac{1}{2}c_{js} & \frac{1}{2}c_{jt} \end{pmatrix}$$

матрицы R размерности $m\times\frac{n}{2}$ с суммой $\frac{\mathrm{sum}}{2}$. Тогда

$$v_C(\mathrm{sum})=v_R\left(\frac{\mathrm{sum}}{2}\right).$$

Если $\frac{\mathrm{sum}}{2}\in\left[\frac{n}{2}+1;\ m\cdot\frac{n}{2}-1\right]$, то

$$v_R\left(\frac{\mathrm{sum}}{2}\right)=\left[\frac{q+1}{2}\right]\cdot\left[\frac{s+1}{2}\right]+\left[\frac{q}{2}\right]\cdot\left[\frac{n/2-s-1}{2}\right],$$

где $\frac{\text{sum}}{2}=\frac{n}{2}\cdot q+s$, $0\le q\le m-1$ и $0\le s\le\frac{n}{2}-1$, где $[x]$ – целая часть числа x.

Справедливо равенство

$$v_R\left(\frac{\text{sum}}{2}\right)=v_R\left(2m\cdot\frac{n}{2}-2-\frac{\text{sum}}{2}\right)=v_R\left(mn-2-\frac{\text{sum}}{2}\right)=v_R\left(\frac{2mn-4-\text{sum}}{2}\right),$$

отсюда

$$v_C(\text{sum})=v_R\left(\frac{\text{sum}}{2}\right)=v_R\left(\frac{2mn-4-\text{sum}}{2}\right)=v_C(2mn-4-\text{sum}),$$

то есть

$v_C(\text{sum})=v_C(2mn-4-\text{sum})$, sum – четное число из отрезка $[n+2;mn-2]$.

Так как число $mn-2$ является серединой отрезка $[n+2;\ n(2m-1)-6]$, то рассматривается половина отрезка $[n+2;mn-2]$.

Пример. Рассмотрим матрицу C размерности 4×6.

Множество возможных значений сумм имеет вид:

$$[-38;-10]\cup[-5;-3]\cup\{-1\}\cup[1;3]\cup[8;36].$$

Общее количество возможных значений равно 35.

Вычислим количество квадратов матрицы C с суммами равными 20, то есть вычислим $v_C(20)$.

Так как число $20\in[8;22]$, где 22 – середина отрезка $[8;36]$, поэтому $v_C(20)=v_R\left(\frac{20}{2}\right)=v_R(10)$, где R – матрица размерности 4×3. Так как число $10\in[4;18]$ и $10=3\cdot 3+3$, то $q=3$, $s=1$ и

$$v_R(10)=\left[\frac{4}{2}\right]\cdot\left[\frac{2}{2}\right]+\left[\frac{3}{2}\right]\cdot\left[\frac{1}{2}\right]=2\cdot 1+1\cdot 0=2.$$

Значит, $v_C(20)=2$.

Вычислим $v_C(34)$. Заметим, что $34\notin[8;22]$.

Так как в данном случае справедливо равенство

$$v_C(\text{sum})=v_C(44-\text{sum}),\ \text{sum}\in[8;22],$$

то

$$v_C(34)=v_C(44-34)=v_C(10)=v_R(5)=1,$$

значит, $v_C(34)=1$ и количество квадратов матрицы C, сумма каждого из которых равна 34, равно 1. ■

Б) Пусть sum – четное число из отрезка $[-n(2m-1)+4;\ -n-4]$.

Каждому квадрату

$$C(i,s;\ i,t;\ j,s;\ j,t)=\begin{pmatrix} c_{is} & c_{it} \\ c_{js} & c_{jt} \end{pmatrix}$$

матрицы C размерности $m\times n$, где s и t – четные числа из отрезка $[2;n]$, с суммой sum взаимно однозначно сопоставляется квадрат

$$R\left(i,\frac{s+1}{2};\ i,\frac{t+1}{2};\ j,\frac{s+1}{2};\ j,\frac{t+1}{2}\right)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}(c_{is}+1) & -\frac{1}{2}(c_{it}+1)\\ -\frac{1}{2}(c_{js}+1) & -\frac{1}{2}(c_{jt}+1)\end{pmatrix}$$

матрицы R размерности $m\times\frac{n}{2}$ с суммой $-\frac{\text{sum}}{2}-1$. Тогда

$$v_C(\text{sum})=v_R\left(-\frac{\text{sum}}{2}-1\right).$$

Если $-\frac{\text{sum}}{2}-1\in\left[\frac{n}{2}+1;\ m\cdot\frac{n}{2}-1\right]$, то

$$v_R\left(-\frac{\text{sum}}{2}-1\right)=\left[\frac{q+1}{2}\right]\cdot\left[\frac{s+1}{2}\right]+\left[\frac{q}{2}\right]\cdot\left[\frac{n/2-s-1}{2}\right],$$

где $-\frac{\text{sum}}{2}-1=\frac{n}{2}\cdot q+s$, $0\le q\le m-1$ и $0\le s\le\frac{n}{2}-1$.

Справедливо равенство:

$$v_R\left(-\frac{\text{sum}}{2}-1\right)=v_R\left(2m\cdot\frac{n}{2}-2-\left(-\frac{\text{sum}}{2}-1\right)\right)=v_R\left(mn+\frac{\text{sum}}{2}-1\right),$$

отсюда

$$v_C(\text{sum})=v_R\left(-\frac{\text{sum}}{2}-1\right)=v_R\left(mn+\frac{\text{sum}}{2}-1\right)=$$
$$=v_R\left(-\frac{-2mn-\text{sum}}{2}-1\right)=v_C(-2mn-\text{sum}),$$

то есть

$$v_C(\text{sum})=v_C(-2mn-\text{sum}),\ \text{sum} – четное число из отрезка\ [-mn;-n-4].$$

Так как число $-mn$ является серединой отрезка $[-n(2m-1)+4;\ -n-4]$, то рассматривается половина отрезка.

Пример. Рассмотрим матрицу C размерности 3×8.

Множество возможных значений сумм имеет вид:

$$[-36;-12]\cup[-7;-3]\cup\{-1\}\cup[1;5]\cup[10;34].$$

Общее количество возможных значений равно 33.

Вычислим количество квадратов матрицы C с суммами равными -16, то есть вычислим $v_C(-16)$.

Так как число $-16\in[-24;-12]$, где -24 – середина отрезка $[-36;-12]$, то $v_C(-16)=v_R\left(-\frac{-16}{2}-1\right)=v_R(7)$, где R – матрица размерности 3×4. Так как $7\in[5;17]$ и $7=4\cdot 1+3$, то $q=1$, $s=3$ и

$$v_R(7)=\left[\frac{2}{2}\right]\cdot\left[\frac{4}{2}\right]+\left[\frac{1}{2}\right]\cdot\left[\frac{0}{2}\right]=1\cdot 2+0\cdot 0=2.$$

Значит, $v_C(-16)=2$.

Вычислим $v_C(-32)$. Заметим, что $-32 \notin [-24;-12]$.

Так как в данном случае справедливо равенство

$$v_C(\mathrm{sum}) = v_C(-48-\mathrm{sum}),\ \mathrm{sum} \in [-24;-12],$$

то

$$v_C(-32) = v_C(-48-(-32)) = v_C(-12) = v_R(5) = 1,$$

значит, $v_C(-32) = 1$ и количество квадратов матрицы C, сумма каждого из которых равна -32, равно 1. ■

В) Пусть sum – нечетное число из отрезка $[1; n-3]$.

В этом случае справедливо равенство

$$\mathrm{sum} = \mathrm{Sum}\begin{pmatrix} c_{is} & c_{it} \\ c_{js} & c_{jt} \end{pmatrix} = t - s,$$

где s и t – номера столбцов матрицы C, причем s – четное число, t – нечетное число и $s < t$. При этом выбор строк матрицы C не важен. Верно равенство $s = t - \mathrm{sum}$.

Выбрать две различные строки матрицы C можно $\frac{(m-1)m}{2}$ способами.

Определимся с количеством выборов столбцов. Так как s – четное число и $s + \mathrm{sum}$ – нечетное число, то $2 + \mathrm{sum} \le s + \mathrm{sum} \le n-1$. Получаем, что если из отрезка $[2+\mathrm{sum};\ n-1]$, где нечетное число $\mathrm{sum} \in [1; n-3]$, выбирается нечетное число t, то $s = t - \mathrm{sum}$ есть четное число, принадлежащее отрезку $[2;\ n-1-\mathrm{sum}]$, где $2 \le n-1-\mathrm{sum} \le n-2$, и $t - s = \mathrm{sum}$. Число нечетных чисел t в отрезке $[2+\mathrm{sum};\ n-1]$, концы которого есть нечетные числа, равно $\frac{(n-1)-(2+\mathrm{sum})}{2} + 1 = \frac{n-1-\mathrm{sum}}{2}$, то есть равно $\frac{n-1-\mathrm{sum}}{2}$.

Выбирая некоторые строки и столбцы матрицы C, получаем формулу для вычисления количество квадратов матрицы C с суммами равными sum:

$$v_C(\mathrm{sum}) = \frac{n-1-\mathrm{sum}}{2} \cdot \frac{(m-1)m}{2},\ \mathrm{sum} \text{ – нечетное число из отрезка } [1; n-3]$$

или

$$v_C(\mathrm{sum}) = \frac{(n-1-\mathrm{sum})(m-1)m}{4},\ \mathrm{sum} \text{ – нечетное число из отрезка } [1; n-3].$$

Пример. Рассмотрим матрицу C размерности 5×8.

Множество возможных значений сумм квадратов матрицы C:

$$[-68;-12] \cup [-7;-3] \cup \{-1\} \cup [1;5] \cup [10;66].$$

Всего возможных значений сумм равно 65.

В данном случае $v_C(\mathrm{sum}) = \frac{(8-1-\mathrm{sum}) \cdot (5-1) \cdot 5}{4} = 5 \cdot (7 - \mathrm{sum})$, то есть $v_C(\mathrm{sum}) = 5 \cdot (7 - \mathrm{sum})$, где sum – нечетное число из отрезка $[1;5]$. Поэтому

$v_C(1) = 5 \cdot (7-1) = 30$, $v_C(3) = 5 \cdot (7-3) = 20$, $v_C(5) = 5 \cdot (7-5) = 10$. ■

Г) Пусть sum – нечетное число из отрезка $[-n+1;-3]$.

В этом случае справедливо равенство

$$\mathrm{sum} = \mathrm{Sum}\begin{pmatrix} c_{is} & c_{it} \\ c_{js} & c_{jt} \end{pmatrix} = s - t,$$

где s и t – номера столбцов матрицы C, причем s – нечетное число, t – четное число и $s < t$. При этом выбор строк матрицы C не важен. Верно равенство $t = s - \mathrm{sum}$.

Выбрать две различные строки матрицы C можно $\frac{(m-1)m}{2}$ способами.

Определимся с количеством выборов столбцов. Так как s – нечетное число и $s - \mathrm{sum}$ – четное число, то $1 - \mathrm{sum} \le s - \mathrm{sum} \le n$. Получаем, что если из отрезка $[1-\mathrm{sum}; n]$, где нечетное число $\mathrm{sum} \in [1; n-3]$, выбирается четное число t, то $s = t + \mathrm{sum}$ есть нечетное число, принадлежащее отрезку $[1-\mathrm{sum}; n]$, где $4 \le 1 - \mathrm{sum} \le n$, и $s - t = \mathrm{sum}$. Число четных чисел t в отрезке $[1-\mathrm{sum}; n]$, концы которого есть четные числа, вычисляется по формуле $\frac{n-(1-\mathrm{sum})}{2} + 1 = \frac{n+1+\mathrm{sum}}{2}$, то есть равно $\frac{n+1+\mathrm{sum}}{2}$.

Выбирая некоторые строки и столбцы матрицы C, получаем формулу для вычисления количество квадратов матрицы C с суммами равными sum:

$v_C(\mathrm{sum}) = \frac{n+1+\mathrm{sum}}{2} \cdot \frac{(m-1)m}{2}$, sum – нечетное число из отрезка $[-n+1; -3]$

или

$v_C(\mathrm{sum}) = \frac{(n+1+\mathrm{sum})(m-1)m}{4}$, sum – нечетное число из отрезка $[-n+1; -3]$.

Пример. Рассмотрим матрицу C размерности 7×8.

Множество возможных значений сумм квадратов матрицы C:

$$[-110; -12] \cup [-7; -3] \cup \{-1\} \cup [1; 5] \cup [10; 98].$$

Всего возможных значений сумм равно 97.

В данном случае $v_C(\mathrm{sum}) = \frac{(8+1+\mathrm{sum}) \cdot (7-1) \cdot 7}{4} = 5 \cdot (7 - \mathrm{sum})$, то есть $v_C(\mathrm{sum}) = 21 \cdot \frac{9+\mathrm{sum}}{2}$, где sum – нечетное число из отрезка $[-7; -3]$. Поэтому

$$v_C(-7) = 21 \cdot \frac{9-7}{2} = 21,\ v_C(-5) = 21 \cdot \frac{9-5}{2} = 42,\ v_C(-3) = 21 \cdot \frac{9-3}{2} = 63. \ \blacksquare$$

Д) Пусть $\mathrm{sum} = -1$.

В этом случае $v_C(-1) = \frac{n(m-1)m}{4}$.

Пример. Рассмотрим матрицу C размерности 7×8. В этом случае $v_C(-1) = \frac{8 \cdot 6 \cdot 7}{4} = 84$. $\blacksquare$

6. Число квадратов матрицы C определенной суммы: случай $n = 4$

Для матрицы C размерность $m \times 4$ множество возможных значений сумм квадратов имеет вид:

$$[-8m+8;-8]\bigcup\{-3;-1;1\}\bigcup[6;8m-10].$$

Для определения числа квадратов матрицы C с данным значением суммы рассмотрим каждое множество в отдельности.

А) Пусть sum – четное число из отрезка $[6;\,8m-10]$.

Каждому квадрату

$$C(i,1;\ i,3;\ j,1;\ j,3)=\begin{pmatrix} c_{i,1} & c_{i,3} \\ c_{j,1} & c_{j,3} \end{pmatrix}$$

матрицы C размерности $m\times 4$, где s и t – нечетные числа из отрезка $[1;n-1]$, с суммой sum взаимно однозначно сопоставляется квадрат

$$R(i,1;\ i,2;\ j,1;\ j,2)=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}c_{i,1} & \frac{1}{2}c_{i,3} \\ \frac{1}{2}c_{j,1} & \frac{1}{2}c_{j,3} \end{pmatrix}$$

матрицы R размерности $m\times 2$ с суммой $\frac{\mathrm{sum}}{2}$. Тогда

$$v_C(\mathrm{sum})=v_R\left(\frac{\mathrm{sum}}{2}\right).$$

Если $\frac{\mathrm{sum}}{2}\in[3;\ 2m-1]$, то

$$v_R\left(\frac{\mathrm{sum}}{2}\right)=\left[\frac{q+1}{2}\right]\cdot\left[\frac{s+1}{2}\right]+\left[\frac{q}{2}\right]\cdot\left[\frac{2-s-1}{2}\right],$$

где $\frac{\mathrm{sum}}{2}=2\cdot q+s$, $0\le q\le m-1$ и $0\le s\le 1$. Так как s может принимать только значения 0 или 1, то

$$v_R\left(\frac{\mathrm{sum}}{2}\right)=\begin{cases} 0, & s=0, \\ \left[\frac{q+1}{2}\right], & s=1. \end{cases}$$

Справедливо равенство

$$v_R\left(\frac{\mathrm{sum}}{2}\right)=v_R\left(4m-2-\frac{\mathrm{sum}}{2}\right)=v_R\left(\frac{8m-4-\mathrm{sum}}{2}\right),$$

отсюда

$$v_C(\mathrm{sum})=v_R\left(\frac{\mathrm{sum}}{2}\right)=v_R\left(\frac{8m-4-\mathrm{sum}}{2}\right)=v_C(8m-4-\mathrm{sum}),$$

то есть

$v_C(\mathrm{sum})=v_C(8m-4-\mathrm{sum})$, sum – четное число из отрезка $[6;4n-2]$.

Число $4m-2$ – середина отрезка $[6;\,8m-10]$, поэтому рассматривается половина отрезка $[6;4n-2]$.

Отметим, что числа $v_C(8), v_C(12), \ldots, v_C(4m-4)$ равны 0, так как от четных чисел $4, 6, \ldots, 2m-2$ величина v_R принимает значение 0.

Пример. Рассмотрим матрицу C размерности 10×4.

Множество возможных значений сумм имеет вид:

$$[-72;-8]\cup\{-3;\ -1;\ 1\}\cup[6;70].$$

Вычислим количество квадратов матрицы C с суммами равными 34, то есть вычислим $v_C(34)$. Так как число $34\in[6;38]$, где 38 – середина отрезка $[6;70]$, то $v_C(34)=v_R\left(\frac{34}{2}\right)=v_R(17)$, где R – матрица размерности 10×2. Число $17\in[3;19]$ и $17=2\cdot 8+1$, значит, $q=8$, $s=1$ и $v_R(10)=\left[\frac{8+1}{2}\right]=4$, поэтому $v_C(34)=4$.

Вычислим $v_C(46)$. Заметим, что $46\notin[6;38]$.

Так как в данном случае справедливо равенство

$$v_C(\mathrm{sum})=v_C(76-\mathrm{sum}),\ \mathrm{sum}\in[6;38].$$

то

$$v_C(46)=v_C(76-46)=v_C(30)=v_R(15)=4,$$

значит, $v_C(46)=4$ и количество квадратов матрицы C, сумма каждого из которых равна 46, равно 4.

Вычисляя $v_C(8), v_C(12), \ldots, v_C(68)$, получим результат, равный 0, так как $v_R(4)=v_R(6)=\ldots,=v_R(34)=0$. ■

Б) Пусть sum – четное число из отрезка $[-8m+8;-8]$.

Каждому квадрату

$$C(i,2;\ i,4;\ j,2;\ j,4)=\begin{pmatrix} c_{i,2} & c_{i,4} \\ c_{j,2} & c_{j,4}\end{pmatrix}$$

матрицы C размерности $m\times 4$, где s и t – четные числа из отрезка $[2;n]$, с суммой sum взаимно однозначно сопоставляется квадрат

$$R(i,1;\ i,2;\ j,1;\ j,2)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(c_{i,2}+1) & -\frac{1}{2}(c_{i,4}+1) \\ -\frac{1}{2}(c_{j,2}+1) & -\frac{1}{2}(c_{j,4}+1)\end{pmatrix}$$

матрицы R размерности $m\times 2$ с суммой $-\frac{\mathrm{sum}}{2}-1$. Тогда

$$v_C(\mathrm{sum})=v_R\left(-\frac{\mathrm{sum}}{2}-1\right).$$

Если $-\frac{\mathrm{sum}}{2}-1\in[3;\ 2m-1]$, то

$$v_R\left(-\frac{\mathrm{sum}}{2}-1\right)=\left[\frac{q+1}{2}\right]\cdot\left[\frac{s+1}{2}\right]+\left[\frac{q}{2}\right]\cdot\left[\frac{2-s-1}{2}\right],$$

где $-\frac{\mathrm{sum}}{2}-1=2\cdot q+s$, $0\le q\le m-1$ и $0\le s\le 1$. Так как s может принимать только значения 0 или 1, то

$$v_R\left(-\frac{\mathrm{sum}}{2}-1\right)=\begin{cases}0, & s=0,\\ \left\lceil\frac{q+1}{2}\right\rceil, & s=1.\end{cases}$$

Справедливо равенство:

$$v_R\left(-\frac{\mathrm{sum}}{2}-1\right)=v_R\left(4m-2-\left(-\frac{\mathrm{sum}}{2}-1\right)\right)=v_R\left(4m+\frac{\mathrm{sum}}{2}-1\right),$$

отсюда

$$v_C(\mathrm{sum})=v_R\left(-\frac{\mathrm{sum}}{2}-1\right)=v_R\left(4m+\frac{\mathrm{sum}}{2}-1\right)=$$
$$=v_R\left(-\frac{-8m-\mathrm{sum}}{2}-1\right)=v_C(-8m-\mathrm{sum}),$$

то есть

$$v_C(\mathrm{sum})=v_C(-8m-\mathrm{sum}),\ \mathrm{sum}\text{ – четное число из отрезка }[-8m+8;-8].$$

Число $-4m$ – середина отрезка $[-8m+8;-8]$, поэтому рассматривается половина отрезка.

Пример. Рассмотрим матрицу C размерности 7×8.

Множество возможных значений сумм имеет вид:

$$[-48;-8]\cup\{-3;-1;1\}\cup[6;46].$$

Вычислим количество квадратов матрицы C с суммами равными -24, то есть вычислим $v_C(-24)$.

Так как число $-24\in[-28;-8]$, где -28 – середина отрезка $[-48;-8]$, то $v_C(-24)=v_R\left(-\frac{-24}{2}-1\right)=v_R(11)$, где R – матрица размерности 7×2. Так как $11\in[3;13]$ и $11=2\cdot 5+1$, то $q=5$, $s=1$ и $v_R(11)=\left\lceil\frac{6}{2}\right\rceil=3$. Значит, $v_C(-24)=3$.

Вычислим $v_C(-44)$. Заметим, что $-44\notin[-28;-8]$.

Так как в данном случае справедливо равенство

$$v_C(\mathrm{sum})=v_C(-56-\mathrm{sum}),\ \mathrm{sum}\in[-28;-8],$$

то

$$v_C(-44)=v_C(-56-(-44))=v_C(-12)=v_R(5)=1,$$

значит, $v_C(-44)=1$ и количество квадратов матрицы C, сумма каждого из которых равна -44, равно 1.

Вычисляя $v_C(-46),\ v_C(-42),\ \ldots,\ v_C(-10)$, получим результат, равный 0, так как $v_R(22)=v_R(20)=\ldots,=v_R(4)=0$. ■

В) Пусть sum – нечетное число из множества $\{-3;-1;1\}$.

В этом случае получаем формулы для вычисления числа квадратов матрицы C размерности $m\times 4$ с суммой sum:

$$v_C(-3)=\frac{(m-1)m}{2},\ v_C(-1)=(m-1)m,\ v_C(1)=\frac{(m-1)m}{2}.$$

Пример. Рассмотрим матрицу C размерности 12×4. В этом случае получаем: $v_C(-3)=66$, $v_C(-1)=132$, $v_C(1)=66$. ■

7. Число квадратов матрицы C определенной суммы: случай $n=2$

В данном случае все квадраты матрицы C размерности $m\times 2$ имеют сумму, равную -1. Число квадратов равно $\frac{(m-1)m}{2}$, тогда $v_C(-1)=\frac{(m-1)m}{2}$.

Пример. В матрице C размерности 5×2 справедливо: $v_C(-1)=10$. ■

8. Симметрические суммы квадратов матрицы C

Общий вид множества возможных значений сумм квадратов матрицы C размерности $m\times n$ следующий:

$$[-n(2m-1)+4;\ -n-4]\bigcup[-n+1;\ -3]\bigcup\{-1\}\bigcup[1;\ n-3]\bigcup[n+2;\ n(2m-1)-6].$$

Отрезки $[-n(2m-1)+4;\ -n-4]$ и $[n+2;\ n(2m-1)-6]$, также как и отрезки $[-n+1;\ -3]$ и $[1;\ n-3]$, симметричны относительно числа -1. Пусть x и y – числа, симметричные относительно числа -1. Тогда $\frac{x+y}{2}=-1$.

А) Пусть $x\in[-n(2m-1)+4;\ -n-4]$ и $y\in[n+2;\ n(2m-1)-6]$.

Так как $-\frac{x}{2}-1=\frac{y}{2}$, то $v_R\left(-\frac{x}{2}-1\right)=v_R\left(\frac{y}{2}\right)$, отсюда $v_C(x)=v_C(y)$.

Б) Пусть $x\in[-n+1;\ -3]$ и $y\in[1;\ n-3]$.

Так как $y=-2-x$, то

$$v_C(y)=\frac{(n-1-y)(m-1)m}{4}=\frac{(n-1-(-2-x))(m-1)m}{4}=$$
$$=\frac{(n+1+x)(m-1)m}{4}=v_C(x),$$

то есть $v_C(x)=v_C(y)$.

В) При $n=4$ верно равенство $[-n+1;\ -3]\bigcup\{-1\}\bigcup[1;\ n-3]=\{-3;-1;\ 1\}$. Так как $v_C(-3)=\frac{(m-1)m}{2}$ и $v_C(1)=\frac{(m-1)m}{2}$, то для симметрических чисел -3 и 1 относительно числа -1, справедливо равенство $v_C(x)=v_C(y)$.

Делаем вывод, что если x и y – числа, симметричные относительно числа -1, то $v_C(x)=v_C(y)$.

Используя симметрию сумм, можно показать, что $v_C(-1)$ принимает на множестве всех возможных значений сумм наибольшее значение.

Пример. Рассмотрим матрицу C размерности 3×8.

В таблице 3 представлены данные по суммам квадратов и количестве квадратов матрицы C с данной суммой.

Таблица 3 – Суммы квадратов и число квадратов с данной суммой (3×8)

sum	-36	-34	-32	-30	-28	-26	-24	-22	-20	-18	-16	-14	-12	-7	-5	-3	-1
v(sum)	1	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	1	3	6	9	12
sum	34	32	30	28	26	24	22	20	18	16	14	12	10	5	3	1	-1
v(sum)	1	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	1	3	6	9	12

Представляя графически данные таблицы 3, получаем изображение на рисунке 1, соединив для наглядности точки $(\mathrm{sum};v(\mathrm{sum}))$.

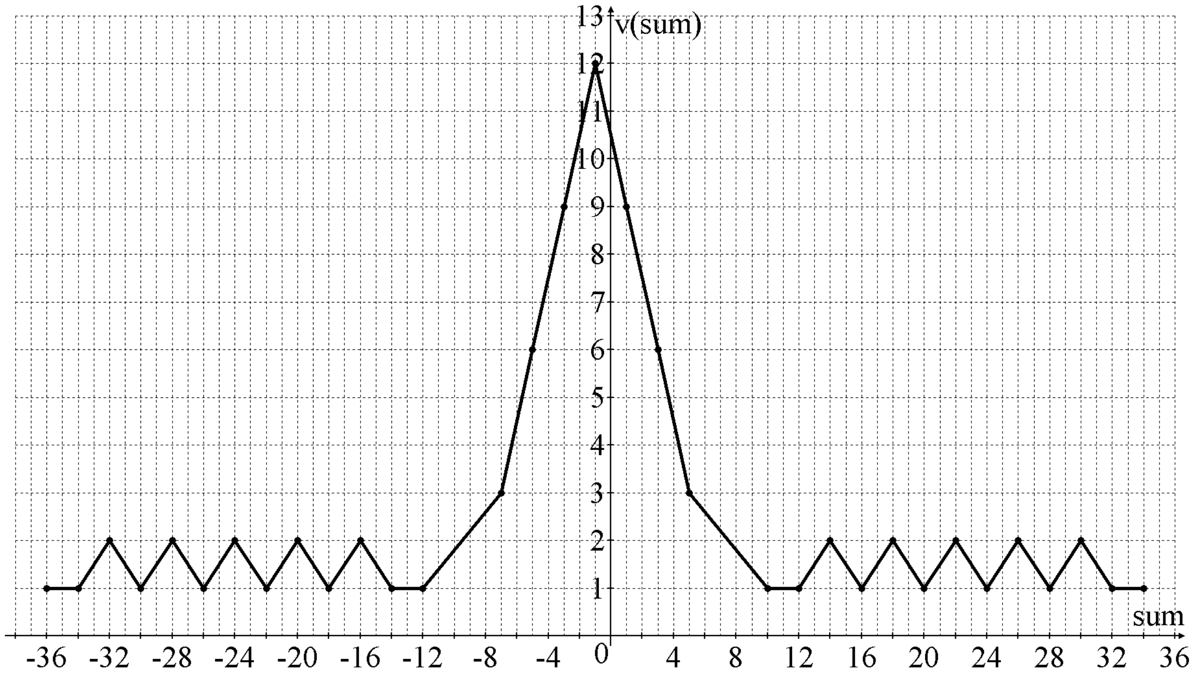

Рисунок 1 – Графическое представление данных таблицы 3

График симметричен относительно прямой $\mathrm{sum}=-1$ и $v_C(-1)=12$ есть наибольшее значение на множестве возможных сумм квадратов. ■

Пример. Рассмотрим матрицу C размерности 5×4.

Так как количество столбцов в матрице C равно 4, то можем считать, что $v_C(-30)=v_C(-26)=\ldots=v_C(-10)=v_C(8)=v_C(12)=\ldots=v_C(28)=0$. Дело в том, что из отрезков $[-32;-8]$ и $[6;30]$ в общем случае выбираются четные числа, поэтому количество квадратов матрицы C при некоторых значениях сумм можно считать равными 0.

В таблице 4 представлены данные по суммам квадратов и количестве квадратов матрицы C с данной суммой.

Таблица 4 – Суммы квадратов и число квадратов с данной суммой (5×4)

sum	-32	-30	-28	-26	-24	-22	-20	-18	-16	-14	-12	-10	-8	-3	-1
v(sum)	1	0	1	0	2	0	2	0	2	0	1	0	-1	10	20
sum	30	28	26	24	22	20	18	16	14	12	10	8	6	1	-1
v(sum)	1	0	1	0	2	0	2	0	2	0	1	0	-1	10	20

По таблице 4 получаем изображение на рисунке 2.

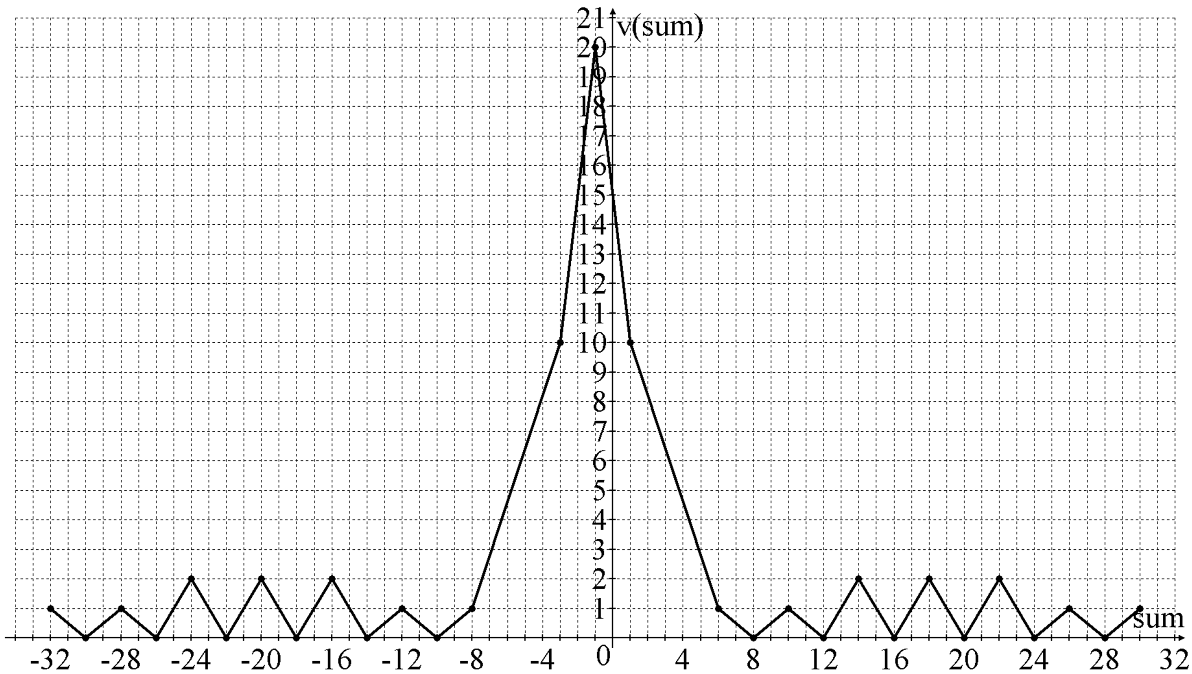

Рисунок 2 – Графическое представление данных таблицы 4

Заключение

В работе [4] показано, что величина, равная числу квадратов матрицы R обладает свойством равенства от симметрических сумм. В данной работе показано, что величина обладает таким же свойством для матрицы C.

Проведя компьютерное моделирование, получены данные, на основе которых можно выдвинуть гипотезу, что величина, равная числу квадратов матрицы C с нечетным количеством столбцов, свойством равенства от симметричных сумм не обладает.

Библиографический список

1. Попов И.Н. Группы RC и RCD: монография. Архангельск: КИРА, 2014. 192 с.
2. Попов И.Н. Квадраты матриц // Научно-исследовательская деятельность школьников в области математики, прикладной математики и информатики: материалы Шестой региональной научно-практической конференции. Часть II / сост. С.Н. Котова; отв. ред. М.В. Шабанова; Сев. (Арктич.) федер. ун-т им. М.В. Ломоносова. Архангельск: САФУ, 2014. С. 119-127.
3. Попов И.Н. Суммы квадратов матрицы // Постулат. 2018. № 4. URL: http://e-postulat.ru/index.php/Postulat/article/view/1367/1398
4. Попов И.Н. Квадраты определенной суммы // Постулат. 2018. № 5. URL: http://e-postulat.ru/index.php/Postulat/article/view/1461/1493