

Изменение среднемесячной температуры в Биробиджане: тригонометрическое интерполирование

Ковалева Ирина Валерьевна

*Приамурский государственный университет им. Шолом-Алейхема
Студент*

Эйрих Надежда Владимировна

*Приамурский государственный университет им. Шолом-Алейхема
к.ф.-м.н., доцент, декан факультета математики, информационных
технологий и техники*

Аннотация

Методы численного гармонического анализа применены для аппроксимации среднемесячной температуры, наблюдаемой в городе Биробиджан с 2010 по 2015 годы. Представлены графики полученных многочленов Фурье, описывающих сезонные колебания температуры.

Ключевые слова: метод наименьших квадратов, гармонический анализ, тригонометрические коэффициенты Фурье, сезонные колебания температуры, среднемесячная температура.

The change of the average monthly temperature in Birobidzhan trigonometric interpolation

Kovaleva Irina Valerievna

*Sholom-Aleichem Priamursky State University
student*

Eyrikh Nadezhda Vladimirovna

*Sholom-Aleichem Priamursky State University
PhD in Mathematics, Associate Professor, Dean of the Department of
Mathematics, IT and Techniques*

Abstract

Numerical harmonic analysis methods used to approximate the monthly average temperature observed in the city of Birobidzhan from 2010 to 2015. Is a graph obtained by Fourier polynomials describing seasonal variations in temperature.

Keywords: least square method, harmonic analysis, trigonometric Fourier coefficients, seasonal variations in temperature, the average monthly temperature.

Человеку всегда было важно знать, чего ожидать от погоды. Жизнь древних людей полностью зависела от неё, поэтому предсказать погоду пытались, пользуясь гаданиями ведуний, наблюдая за поведением птиц и

зверей или за природными явлениями. В современном высокотехнологичном мире важность прогнозов остается такой же актуальной [1, 2]. Но в наши дни для составления прогнозов с максимальной возможной точностью на различных метеостанциях собираются данные о температуре, влажности, давлении, направлении и силе ветра, которые потом обрабатываются на мощнейших компьютерах.

Полученные за последнюю сотню лет данные позволяют ученым с уверенностью говорить об изменении климата на Земле. Данные метеорологических наблюдений свидетельствуют о том, что за последние 100 лет средняя температура поверхности Земли выросла на 0,74 °С, причем темпы ее роста постепенно увеличиваются. По данным наблюдений российских метеостанций, среднегодовая температура воздуха в России выросла за последние 100 лет на 1 °С, из них 0,4 °С – только за последнее десятилетие 20 века [3].

Повышение температуры воздуха происходит во всех регионах России, однако ввиду большой протяженности территории нашей страны и разнообразия ее природных условий, изменения климата проявляются неравномерно по различным регионам. Поэтому исследования климатических изменений необходимо вести в каждом отдельном регионе. Нами была проведена первичная обработка статистических данных, о среднемесячной температуре, наблюдавшейся в г.Биробиджан за последние шесть лет.

Используя раздел «Дневник погоды», размещенный на сайте Gismeteo.ru, была вычислена среднемесячная температура, наблюдавшаяся в столице Еврейской автономной области с 2010 по 2015 годы (табл.1).

Таблица 1 - Среднемесячная температура в г.Биробиджан с 2010 по 2015 гг.

| Год Месяц | 2010 | 2011 | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 |
|--------------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Январь | -14,4 | -15,9 | -15,8 | -17,6 | -17,5 | -12,8 |
| Февраль | -12,2 | -8,18 | -11,3 | -12,1 | -10,9 | -7,8 |
| Март | -4,03 | -1,26 | -2,3 | -4,6 | 1,5 | 1,4 |
| Апрель | 7 | 8,3 | 8,4 | 6,8 | 14,4 | 8,2 |
| Май | 18,09 | 17,5 | 19,4 | 17,5 | 17,2 | 15,8 |
| Июнь | 27,8 | 20,7 | 24,5 | 24,3 | 24,9 | 22,2 |
| Июль | 24,8 | 27,9 | 24,2 | 24,0 | 25,6 | 25,5 |
| Август | 23,87 | 24,5 | 25,3 | 23,7 | 25,9 | 25,6 |
| Сентябрь | 20,2 | 16,8 | 18,1 | 19,4 | 19,8 | 23,2 |
| Октябрь | 10,58 | 10,9 | 8,9 | 9,9 | 8,9 | 8,8 |
| Ноябрь | -2,03 | -1,8 | -2,3 | -0,4 | -3,4 | -2,7 |
| Декабрь | -17,97 | -12,8 | -16,8 | -13,3 | -16,8 | -11,1 |

Колебания среднемесячной температуры воздуха носят периодический характер, обусловленный сезонностью. Поэтому в качестве

аппроксимирующей функции был выбран тригонометрический полином Фурье

$$Q_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left(a_n \cos n \frac{2\pi}{T} x + b_n \sin n \frac{2\pi}{T} x \right) \quad (0 \leq x \leq T). \quad (1)$$

Известно, что для того чтобы квадратическое отклонение полинома $Q_N(x)$ от функции $y = f(x)$ было наименьшим, коэффициенты a_0 , a_n и b_n должны быть коэффициентами Фурье функции $f(x)$ относительно тригонометрической системы:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos n \frac{2\pi}{T} x dx \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin n \frac{2\pi}{T} x dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (2)$$

Представление функции тригонометрическим полиномом Фурье называется гармоническим анализом [4].

Задача численного гармонического анализа формулируется следующим образом: аппроксимировать на интервале $(0; T)$ тригонометрическим полиномом $Q_N(x)$ функцию $y = f(x)$, заданную своими значениями $y_k = f(x_k)$ при $x_k = \frac{kT}{m}$, $k = 0, 1, 2, \dots, m-1$. В этом случае для нахождения коэффициентов Фурье при вычислении интегралов (2) можно использовать формулу прямоугольников:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{m} \sum_{k=0}^{m-1} y_k \cos n \frac{2\pi k}{m} \\ b_n &= \frac{2}{m} \sum_{k=0}^{m-1} y_k \sin n \frac{2\pi k}{m}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (3)$$

Доказано, что при $m > 2N$ многочлен (1) дает наилучшее приближение к функции $y = f(x)$ в смысле метода наименьших квадратов, если коэффициенты его вычисляются по формулам (3).

Исследуем динамику изменения среднемесячных температур, наблюдавшихся в 2010 году. В соответствии с числом месяцев в году положим $m = 12$, тогда $x_k = k$, $k = 0, 1, 2, \dots, m-1$ (табл.2). В этом случае тригонометрический полином имеет вид

$$Q_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left(a_n \cos n \frac{\pi}{6} x + b_n \sin n \frac{\pi}{6} x \right), \quad (0 \leq x \leq 11),$$

где коэффициенты определяются следующими соотношениями:

$$a_n = \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{m-1} y_k \cos n \frac{\pi k}{6}$$

$$b_n = \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{m-1} y_k \sin n \frac{\pi k}{6}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N.$$

Таблица 2 – Среднемесячная температура в г. Биробиджан в 2010 г.

| Месяцы | январь | февраль | март | апрель | май | июнь | июль | август | сентябрь | октябрь | ноябрь | декабрь |
|------------------------------------|--------|---------|-------|--------|-------|------|------|--------|----------|---------|--------|---------|
| x_k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| y_k - ср. мес. температура | -14,4 | -12,2 | -4,03 | 7 | 18,09 | 27,8 | 24,8 | 23,87 | 20,2 | 10,58 | -2,03 | -17,97 |

Все вычисления были выполнены с использованием Excel (рис.1).

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P |
|----|---------------------------------|----------|----------|---------|---------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|---------|----------|-------------|----|---|
| 2 | x_k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | | | |
| 3 | y_k - ср. мес. температура | -14,4 | -12,2 | -4,03 | 7 | 18,09 | 27,8 | 24,8 | 23,87 | 20,2 | 10,58 | -2,03 | -17,97 | 13,61833333 | a0 | |
| 4 | $\cos(\pi x_k/6)$ | 1,0000 | 0,8660 | 0,5000 | 0,0000 | -0,5000 | -0,8660 | -1,0000 | -0,8660 | -0,5000 | 0,0000 | 0,5000 | 0,8660 | | | |
| 5 | $y_k * \cos(\pi x_k/6)$ | -14,4000 | -10,5655 | -2,0150 | 0,0000 | -9,0450 | -24,0755 | -24,8000 | -20,6720 | -10,1000 | 0,0000 | -1,0150 | -15,5625 | -22,0418 | a1 | |
| 6 | $\sin(\pi x_k/6)$ | 0,0000 | 0,5000 | 0,8660 | 1,0000 | 0,8660 | 0,5000 | 0,0000 | -0,5000 | -0,8660 | -1,0000 | -0,8660 | -0,5000 | | | |
| 7 | $y_k * \sin(\pi x_k/6)$ | 0,0000 | -6,1000 | -3,4901 | 7,0000 | 15,6664 | 13,9000 | 0,0000 | -11,9350 | -17,4937 | -10,5800 | 1,7580 | 8,9850 | -0,3816 | b1 | |
| 8 | $\cos(\pi x_k/3)$ | 1,0000 | 0,5000 | -0,5000 | -1,0000 | -0,5000 | 0,5000 | 1,0000 | 0,5000 | -0,5000 | -1,0000 | -0,5000 | 0,5000 | | | |
| 9 | $y_k * \cos(\pi x_k/3)$ | -14,4000 | -6,1000 | 2,0150 | -7,0000 | -9,0450 | 13,9000 | 24,8000 | 11,9350 | -10,1000 | -10,5800 | 1,0150 | -8,9850 | -2,0908 | a2 | |
| 10 | $\sin(\pi x_k/3)$ | 0,0000 | 0,8660 | 0,8660 | 0,0000 | -0,8660 | -0,8660 | 0,0000 | 0,8660 | 0,8660 | 0,0000 | -0,8660 | -0,8660 | | | |
| 11 | $y_k * \sin(\pi x_k/3)$ | 0,0000 | -10,5655 | -3,4901 | 0,0000 | -15,6664 | -24,0755 | 0,0000 | 20,6720 | 17,4937 | 0,0000 | 1,7580 | 15,5625 | 0,2815 | b2 | |
| 12 | $\cos(\pi x_k/2)$ | 1,0000 | 0,0000 | -1,0000 | 0,0000 | 1,0000 | 0,0000 | -1,0000 | 0,0000 | 1,0000 | 0,0000 | -1,0000 | 0,0000 | | | |
| 13 | $y_k * \cos(\pi x_k/2)$ | -14,4000 | 0,0000 | 4,0300 | 0,0000 | 18,0900 | 0,0000 | -24,8000 | 0,0000 | 20,2000 | 0,0000 | 2,0300 | 0,0000 | 0,8583 | a3 | |
| 14 | $\sin(\pi x_k/2)$ | 0,0000 | 1,0000 | 0,0000 | -1,0000 | 0,0000 | 1,0000 | 0,0000 | -1,0000 | 0,0000 | 1,0000 | 0,0000 | -1,0000 | | | |
| 15 | $y_k * \sin(\pi x_k/2)$ | 0,0000 | -12,2000 | 0,0000 | -7,0000 | 0,0000 | 27,8000 | 0,0000 | -23,8700 | 0,0000 | 10,5800 | 0,0000 | 17,9700 | 2,2133 | b3 | |
| 16 | $\cos(2\pi x_k/3)$ | 1,0000 | -0,5000 | -0,5000 | 1,0000 | -0,5000 | -0,5000 | 1,0000 | -0,5000 | -0,5000 | 1,0000 | -0,5000 | -0,5000 | | | |
| 17 | $y_k * \cos(2\pi x_k/3)$ | -14,4000 | 6,1000 | 2,0150 | 7,0000 | -9,0450 | -13,9000 | 24,8000 | -11,9350 | -10,1000 | 10,5800 | 1,0150 | 8,9850 | 0,1858 | a4 | |
| 18 | $\sin(2\pi x_k/3)$ | 0,0000 | 0,8660 | -0,8660 | 0,0000 | 0,8660 | -0,8660 | 0,0000 | 0,8660 | -0,8660 | 0,0000 | 0,8660 | -0,8660 | | | |
| 19 | $y_k * \sin(2\pi x_k/3)$ | 0,0000 | -10,5655 | 3,4901 | 0,0000 | 15,6664 | -24,0755 | 0,0000 | 20,6720 | -17,4937 | 0,0000 | -1,7580 | 15,5625 | 0,2497 | b4 | |
| 20 | $\cos(5\pi x_k/6)$ | 1,0000 | -0,8660 | 0,5000 | 0,0000 | -0,5000 | 0,8660 | -1,0000 | 0,8660 | -0,5000 | 0,0000 | 0,5000 | -0,8660 | | | |
| 21 | $y_k * \cos(5\pi x_k/6)$ | -14,4000 | 10,566 | -2,015 | 0,00 | -9,045 | 24,076 | -24,800 | 20,672 | -10,100 | 0,000 | -1,015 | 15,562 | 1,583 | a5 | |
| 22 | $\sin(5\pi x_k/6)$ | 0,0000 | 0,5000 | -0,8660 | 1,0000 | -0,8660 | 0,5000 | 0,0000 | -0,5000 | 0,8660 | -1,0000 | 0,8660 | -0,5000 | | | |
| 23 | $y_k * \sin(5\pi x_k/6)$ | 0,0000 | -6,1000 | 3,4900 | 7,0000 | -15,6660 | 13,9000 | 0,0000 | -11,9350 | 17,4940 | -10,5800 | -1,7580 | 8,9850 | 0,8050 | b5 | |
| 24 | $\cos(\pi x_k)$ | 1,0000 | -1,0000 | 1,0000 | -1,0000 | 1,0000 | -1,0000 | 1,0000 | -1,0000 | 1,0000 | -1,0000 | 1,0000 | -1,0000 | | | |
| 25 | $y_k * \cos(\pi x_k)$ | -14,4 | 12,2 | -4,03 | -7 | 18,09 | -27,8 | 24,8 | -23,87 | 20,2 | -10,58 | -2,03 | 17,97 | 0,592 | a6 | |
| 26 | $\sin(\pi x_k)$ | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | | | |
| 27 | $y_k * \sin(\pi x_k)$ | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | b6 | |

Рисунок 1 – Вычисление коэффициентов Фурье

Таким образом, динамика изменения среднемесячных температур, наблюдавшихся в 2010 году, может быть описана следующими тригонометрическими многочленами:

$$Q_1(x) = 6,809 - 22,042 \cos \frac{\pi x}{6} - 0,382 \sin \frac{\pi x}{6},$$

$$Q_2(x) = Q_1(x) - 2,091 \cos \frac{\pi x}{3} + 0,282 \sin \frac{\pi x}{3},$$

$$Q_3(x) = Q_2(x) + 0,858 \cos \frac{\pi x}{2} + 2,213 \sin \frac{\pi x}{2},$$

$$Q_4(x) = Q_3(x) + 0,186 \cos \frac{2\pi x}{3} + 2,250 \sin \frac{2\pi x}{3},$$

$$Q_5(x) = Q_4(x) + 1,583 \cos \frac{5\pi x}{6} + 0,805 \sin \frac{5\pi x}{6},$$

$$Q_6(x) = Q_5(x) + 0,592 \cos \pi x.$$

Сравнив $Q_i(x_k)$ со значениями y_k (рис.2) и вычислив суммы квадратов отклонений $\delta_i = \sum_{k=0}^{11} (Q_i(x_k) - y_k)^2$ можно сделать вывод о том, что наилучшее приближение дает многочлен $Q_5(x_k)$.

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|----|---------------|-------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|---------|----|
| 46 | Q1(xk) | -15,2326 | -12,4703 | -4,5422 | 6,4276 | 17,4996 | 25,7071 | 28,8509 | 26,0887 | 18,1605 | 7,1907 | -3,8813 | -12,0888 | | |
| 47 | (Q1(xk)-yk)^2 | 0,6932 | 0,0731 | 0,2623 | 0,3276 | 0,3486 | 4,3802 | 16,4100 | 4,9225 | 4,1596 | 11,4872 | 3,4272 | 34,5889 | 81,0803 | 81 |
| 48 | Q2(xk) | -17,3234 | -13,2720 | -3,2530 | 8,5184 | 18,3013 | 24,4179 | 26,7601 | 25,2870 | 19,4497 | 9,2816 | -3,0796 | -13,3779 | | |
| 49 | (Q2(xk)-yk)^2 | 8,5464 | 1,1492 | 0,6038 | 2,3057 | 0,0446 | 11,4383 | 3,8419 | 2,0079 | 0,5630 | 1,6859 | 1,1017 | 21,0870 | 54,3754 | 82 |
| 50 | Q3(xk) | -16,4651 | -11,0587 | -4,1113 | 6,3051 | 19,1596 | 26,6313 | 25,9018 | 23,0737 | 20,3080 | 11,4949 | -3,9379 | -15,5913 | | |
| 51 | (Q3(xk)-yk)^2 | 4,2646 | 1,3026 | 0,0066 | 0,4829 | 1,1440 | 1,3659 | 1,2139 | 0,6341 | 0,0117 | 0,8370 | 3,6402 | 5,6584 | 20,5620 | 83 |
| 52 | Q4(xk) | -16,2793 | -10,9353 | -4,4205 | 6,4909 | 19,2829 | 26,3221 | 26,0876 | 23,1970 | 19,9988 | 11,6807 | -3,8146 | -15,9004 | | |
| 53 | (Q4(xk)-yk)^2 | 3,53159249 | 1,599385 | 0,152478 | 0,259143 | 1,423095 | 2,184175 | 1,657879 | 0,452931 | 0,040474 | 1,211601 | 3,184804 | 4,283088 | 19,9806 | 84 |
| 54 | Q5(xk) | -14,6958 | -11,9042 | -4,3258 | 7,2958 | 17,7942 | 28,0958 | 24,5042 | 24,1658 | 19,9042 | 10,8758 | -2,3258 | -17,6742 | | |
| 55 | (Q5(xk)-yk)^2 | 0,08751736 | 0,087517 | 0,087517 | 0,087517 | 0,087517 | 0,087517 | 0,087517 | 0,087517 | 0,087517 | 0,087517 | 0,087517 | 0,087517 | 1,0502 | 85 |
| 56 | Q6(xk) | -14,1041667 | -12,4958 | -3,73417 | 6,704167 | 18,38583 | 27,50417 | 25,09583 | 23,57417 | 20,49583 | 10,28417 | -1,73417 | -18,2658 | | |
| 57 | (Q6(xk)-yk)^2 | 0,08751736 | 0,087517 | 0,087517 | 0,087517 | 0,087517 | 0,087517 | 0,087517 | 0,087517 | 0,087517 | 0,087517 | 0,087517 | 0,087517 | 1,0502 | 86 |

Рисунок 2 – Вычисление суммы квадратов отклонений δ_i

Этот вывод подтверждают и графики, на которых изображены в сравнении исходная функция и полученный тригонометрический полином (рис.3).

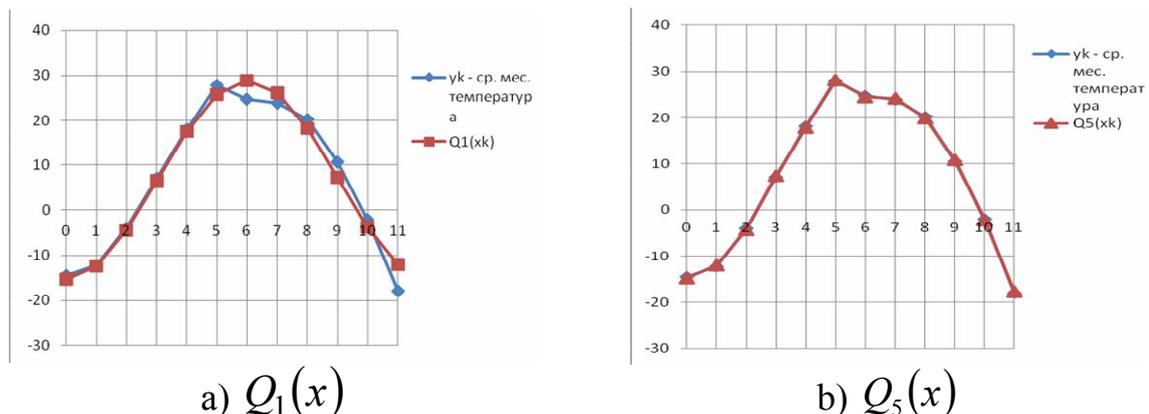


Рисунок 3 – Графики тригонометрических полиномов

Проведя аналогичные вычисления, были получены тригонометрические многочлены, описывающие динамику изменения среднемесячных температур, наблюдавшихся в 2011 году:

$$Q_5(x) = 7,222 - 19,966 \cos \frac{\pi x}{6} - 0,186 \sin \frac{\pi x}{6} - 1,785 \cos \frac{\pi x}{3} + \\ + 1,192 \sin \frac{\pi x}{3} - 1,073 \cos \frac{\pi x}{2} + 0,570 \sin \frac{\pi x}{2} + 0,578 \cos \frac{2\pi x}{3} + \\ + 1,238 \sin \frac{2\pi x}{3} - 0,861 \cos \frac{5\pi x}{6} - 0,544 \sin \frac{5\pi x}{6};$$

в 2012 году:

$$Q_5(x) = 6,700 - 21,398 \cos \frac{\pi x}{6} + 0,489 \sin \frac{\pi x}{6} - 2,440 \cos \frac{\pi x}{3} + \\ + 0,719 \sin \frac{\pi x}{3} + 0,352 \cos \frac{\pi x}{2} + 0,874 \sin \frac{\pi x}{2} - 0,269 \cos \frac{2\pi x}{3} + \\ + 1,087 \sin \frac{2\pi x}{3} + 1,063 \cos \frac{5\pi x}{6} + 0,134 \sin \frac{5\pi x}{6};$$

в 2013 году:

$$Q_5(x) = 6,474 - 21,025 \cos \frac{\pi x}{6} - 1,254 \sin \frac{\pi x}{6} - 2,512 \cos \frac{\pi x}{3} - \\ - 0,263 \sin \frac{\pi x}{3} + 0,041 \cos \frac{\pi x}{2} + 0,790 \sin \frac{\pi x}{2} - 0,690 \cos \frac{2\pi x}{3} + \\ + 0,434 \sin \frac{2\pi x}{3} + 0,167 \cos \frac{5\pi x}{6} + 0,493 \sin \frac{5\pi x}{6};$$

в 2014 году:

$$Q_5(x) = 7,468 - 21,760 \cos \frac{\pi x}{6} + 1,651 \sin \frac{\pi x}{6} - 3,532 \cos \frac{\pi x}{3} + \\ + 2,080 \sin \frac{\pi x}{3} - 0,698 \cos \frac{\pi x}{2} - 0,098 \sin \frac{\pi x}{2} + 0,390 \cos \frac{2\pi x}{3} - \\ - 0,092 \sin \frac{2\pi x}{3} + 0,893 \cos \frac{5\pi x}{6} + 0,984 \sin \frac{5\pi x}{6};$$

и в 2015 году:

$$Q_5(x) = 8,020 - 19,380 \cos \frac{\pi x}{6} - 0,592 \sin \frac{\pi x}{6} - 1,455 \cos \frac{\pi x}{3} + \\ + 2,642 \sin \frac{\pi x}{3} + 0,327 \cos \frac{\pi x}{2} + 0,084 \sin \frac{\pi x}{2} - 0,607 \cos \frac{2\pi x}{3} - \\ - 0,682 \sin \frac{2\pi x}{3} - 0,108 \cos \frac{5\pi x}{6} + 0,372 \sin \frac{5\pi x}{6};$$

В дальнейшем полученные результаты предполагается использовать для исследования динамики изменения год от года среднемесячных температур, используя теорию анализа временных рядов [5]. Интерес для практики (для составления прогнозов) представляют тенденции изменения температуры воздуха. Также планируется исследовать изменения количества осадков, выпадающих в летний и зимний период на территории области.

Библиографический список

1. Практическая значимость прогнозов погоды. Сайт Исследовательской Группы BusinessForecast.by. URL: <http://businessforecast.by/partners/publication/1204> (дата обращения 04.07.2016).
2. Предсказание погоды: методы, роль и значение прогнозов. URL: <http://pogodaprognoz.ru/blog/predskazanie-pogody-metody-rol-znachenie-prognozov> (дата обращения 04.07.2016).
3. Изменение климата.RU. URL: <http://www.climatechange.ru/node/117> (дата обращения 04.07.2016).
4. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения. М.: Наука, 1967. 368 с.
5. Афанасьев В.Н., Юзбашев М.М. Анализ временных рядов и прогнозирование: Учебник. М.: Финансы и статистика, 2001. 228 с.