УДК 519.86

Матричные экономико-математические модели в нечеткой постановке

Осипов Геннадий Сергеевич
Сахалинский государственный университет
Д.т.н., заведующий кафедрой Информатики

Вашакидзе Нателла Семеновна
Сахалинский государственный университет
Доцент кафедры Информатики

Филиппова Галина Викторовна
Сахалинский государственный университет
Доцент кафедры Информатики

Аннотация
В статье предлагается метод решения классических задач линейной алгебры в экономике в случае, когда исходная информация задана неточно, в виде треугольных нечетких чисел. Рассматриваются две задачи – линейная модель международной торговли (линейная модель обмена) и матричная модель межотраслевого баланса (модель Леонтьева).
Ключевые слова: модели линейной алгебры в экономике, нечеткие треугольные числа

Matrix economic-mathematical models in fuzzy setting

Osipov Gennadij Sergeevich
Sakhalin State University
Doctor of Technical Sciences, Head of the Department of Computer Science

Vashakidze Natella Semenovna
Sakhalin State University
Associate Professor, Department of Computer Science

Filippova Galina Viktorovna
Sakhalin State University
Associate Professor, Department of Computer Science

Abstract
The paper proposes a method for solving the classical problems of linear algebra in the economy when the initial information given is inaccurate, as the triangular fuzzy numbers. Two problems - linear model of international trade (linear model of exchange) and the matrix model of interbranch balance (Leontief model).
Keywords models of linear algebra in Economics, fuzzy triangular numbers

Матричные модели, используемые в экономике достаточно хорошо изучены, и имеют практическое применение. Однако, очевидно, что исходная информация в таких моделях практически всегда неточна и неполна. Получение решения с четкими числами не есть гарантия его правильности.

В настоящее время разработана методология решения задач с различными нечеткими числами [1] с помощью которых можно формализовать процесс обработки нечеткой, «мягкой» информации.

Такой подход широко используется в различных областях науки, техники и имеет достаточно весомый эффект. Например, он хорошо зарекомендовал себя в системах поддержки принятия решений [2, 3] и системах обеспечения безопасности сложных техногенных объектов [4]. Отдельным и весомым направлением использования треугольных и трапециевидных нечетких чисел представляют собой исследования социально-экономические систем [5, 6]

В статье предлагается алгоритм использования треугольных нечетких чисел для решения наиболее актуальных задач матричного анализа в экономике.

1. Линейная модель международной торговли в нечеткой постановке.

Рассмотрим экономическую систему из *n* стран, торгующих между собою. Каждая из стран располагает денежными средствами (торговым бюджетом), которые она может расходовать на покупку товаров (у этих *n* стран).

Торговля называется *бездефицитной*, если страна тратит на закупку не больше, чем получает выручки от торговли. Торговля для системы стран называется *сбалансированной*, если она является бездефицитной для всех стран системы.

Необходимо определить: каким должно быть соотношение торговых бюджетов стран системы, чтобы торговля между ними была сбалансированной (проблемы выбора системы стран для торговли).

Допущение: торговый бюджет все страны расходуют полностью.

Полагается известной нечеткая структурная матрица торговли $\tilde{A}=\left(\tilde{a}_{ij}\right)_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,n}}$, элементы которой $\tilde{a}_{ij}$ – нечеткие числа, определяющие долю торгового бюджета j-й страны, которую она тратит на закупку товаров у i-й страны.

Можно показать, что проблема выбора партнеров для торговли сводится к нахождению нечеткого собственного вектора $\tilde{x}$ структурной матрицы $\tilde{A}$, соответствующего ее собственному значению равному единице. Для нахождения компонент собственного вектора необходимо решить систему нечетких однородных линейных уравнений $\left(\tilde{A}-E\right)\tilde{x}=0$.

Введя простейшие арифметические операции с треугольными нечеткими числами [1], полученную систему нечетких однородных линейных алгебраических уравнений можно решить, например, методом Гаусса.

Пример. $\tilde{A} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} (4,0;4;4,0) & (2,8;3;3,1) & (5,8;6;6,1) \\ (3,8;4;4,2) & (5,8;6;6,2) & (5,9;6;6,2) \\ (3,9;4;4,4) & (2,9;3;3,3) & (0,0;0;0,0) \end{pmatrix}$.

Очевидно, общее решение системы уравнений будет иметь вид:

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1,43;1,50;1,56 \\ 1,99;2,00;2,02 \\ 1,00;1,00;1,00 \end{pmatrix}$$

Для сбалансированной торговли необходимо, чтобы торговые бюджеты стран соотносились как нечеткие числа 3:4:2. При начальных условиях, например, $\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3 = (15;18;21)$, частное решение найдется так:

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} 4,86;6;7,14 \\ 6,75;8;9,27 \\ 3,39;4;4,59 \end{pmatrix}.$$

2. Нечеткая линейная модель межотраслевого баланса

Рассмотрим стандартную модель Леонтьева с нечеткими числами: $\tilde{x} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{y}$, где $\tilde{x}$ – вектор валового выпуска; $\tilde{A} = \left(\tilde{a}_{ij}\right)_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,n}}$ – матрица коэффициентов прямых затрат (технологическая матрица); $\tilde{y}$ – вектор конечного продукта.

Очевидно, решение основной задачи производственного планирования найдется из системы уравнений вида $\left(E - \tilde{A}\right)\tilde{x} = \tilde{y}$.

Введя простейшие арифметические операции, например, с треугольными нечеткими числами, полученную систему линейных алгебраических уравнений можно решить с помощью матрицы коэффициентов полных затрат $\tilde{x} = \left(E - \tilde{A}\right)^{-1} \cdot \tilde{y} = \tilde{S}\tilde{y}$, по формулам Крамера, методом Гаусса и т.д.

Пример.

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} (0,27;0,30;0,33) & (0,15;0,20;0,25) \\ (0,10;0,15;0,20) & (0,08;0,10;0,12) \end{pmatrix},\ \tilde{y} = \begin{pmatrix} (275;300;325) \\ (90;\ 100;120) \end{pmatrix}.$$

Требуется найти плановые объемы валовой продукции отраслей, межотраслевые поставки и чистую продукцию. Решим задачу с помощью матрицы коэффициентов полных затрат.

$$\left(E - \tilde{A}\right) = \begin{pmatrix} (0,67;0,70;0,73) & (-0,25;-0,20;-0,15) \\ (-0,20;-0,15;-0,10) & (0,88;0,90;0,92) \end{pmatrix}$$

$$\tilde{S} = \left(E - \tilde{A}\right)^{-1} = \frac{1}{(0,54;0,60;0,66)}\begin{pmatrix} (0,88;0,90;0,92) & (0,15;0,20;0,25) \\ (0,10;0,15;0,20) & (0,67;0,70;0,73) \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} (1,34;1,50;1,71) & (0,23;0,33;0,46) \\ (0,15;0,25;0,37) & (1,02;1,17;1,35) \end{pmatrix}$$

Решение: $\tilde{x}=\tilde{S}\cdot\begin{pmatrix}(275;300;325)\\(90;\ 100;120)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\tilde{x}_1\\ \tilde{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(389,1;483,3;609,7)\\(133,7;191,7;282,8)\end{pmatrix}.$

Также решение может быть найдено методом Гаусса или по формулам Крамера.

Очевидно, межотраслевые поставки и чистая продукция отраслей найдутся по формулам:

$$\tilde{x}_{ij}=\tilde{a}_{ij}\cdot\tilde{x}_j\ \left(i,j=\overline{1,n}\right) \text{ и } \tilde{v}_j=\tilde{x}_j-\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_{ij}\ \left(j=\overline{1,n}\right).$$

Аналогично могут быть реализованы различные матричные модели в нечеткой постановке.

Библиографический список

1. Kaufman A. and Gupta M. M., Introduction to Fuzzy Arithmetic: Theory and Applications, Van Nostrand Reinhold, New York, NY, USA, 1991
2. Осипов Г.С., Вашакидзе Н.С., Филиппова Г.В. Технологии нечеткого логического вывода в системах принятия решений. // Технологии XXI века: проблемы и перспективы развития. Уфа: Аэтерна, 2016. с. 149-152
3. Osipov G. Multicriteria analysis with fuzzy criteria // Science and Practice: a new level of integration in the modern world. B&M Publishing, San Francisco, California. 2016. p.163-167
4. Осипов Г.С., Сазонов А.Е., Нечеткая экспертная система оценки уровня безопасности судоходных компаний/ Fuzzy expert system of shipping companies safety assessment // European research. 2016. № 3(14), с. 10-11. DOI: 10.20861/2410-2873-2016-14-002.
5. Osipov G.S. Multi-criteria analysis of systems at fuzzy criteria. Austrian Journal of Technical and Natural Sciences. 2016. № 3-4. p. 82-84.
6. Osipov G. Building rating with fuzzy initial information // Global competition on the markets for labor, education and innovations. B&M Publishing, San Francisco, California. 2016. p.4-9