УДК 512.5

Уникальные матрицы

Попов Иван Николаевич
Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова
к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры математики

Аннотация
В статье определяется уникальная матрица как матрица, в которой каждый квадрат имеет уникальную сумму, отличную от других возможных сумм квадратов данной матрицы. Другими словами уникальная матрица – матрица, в которой квадраты имеют попарно различные суммы. Приводятся примеры уникальных матриц, элементы которых есть неотрицательные целые степени натуральных чисел и числа Фибоначчи.
Ключевые слова: матрица, подматрица, квадрат матрицы, числа Фибоначчи.

Unique matrices

Popov Ivan Nikolaevich
Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov
Candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, associate professor of the Department of Mathematics

Abstract
The paper defines a unique matrix as a matrix in which each square has a unique sum different from other possible sums of squares of the given matrix. In other words, a unique matrix is a matrix in which squares have pairwise different sums. Examples of unique matrices whose elements are non-negative integer powers of natural numbers and Fibonacci numbers are given.
Keywords: matrix, submatrix, square matrix, Fibonacci number.

Введение

Подматрицу $\begin{pmatrix} a_{is} & a_{it} \\ a_{js} & a_{jt} \end{pmatrix}$ матрицы A размерности $m \times n$, где $1 \le i \le m$, $1 \le j \le m$, $1 \le s \le n$, $1 \le t \le n$, $i < j$, $s < t$, назовем квадратом и обозначим $A(i,s;\ i,t;\ j,s;\ j,t)$. По формуле $mn(m-1)(n-1)/4$ вычисляется количество квадратов матрицы A. Сумма квадрата $A(i,s;i,t;j,s;j,t)$ – число, равное $(a_{is}+a_{jt}+a_{it}+a_{js})/2$, которое обозначим $\mathrm{Sum}(A(i,s;\ i,t;\ j,s;\ j,t))$.

Количество квадратов матрицы A, сумма каждого из которых равна sum, обозначим $v_A(\mathrm{sum})$.

Число, которое является суммой некоторого квадрата данной матрицы, назовем возможным значением суммы квадрата этой матрицы. Можно сказать, что число sum является возможным значением суммы некоторого квадрата матрицы A, если $v_A(\mathrm{sum}) \geq 1$.

В работах [2-6] описываются квадраты матриц и их характеристики.

Если множество всех возможных значений сумм квадратов матрицы A обозначить V_A, то справедлива формула

$$\sum_{\mathrm{sum} \in V_A} v(\mathrm{sum}) = \frac{mn(m-1)(n-1)}{4}.$$

Квадрат матрицы назовем уникальным, если его сумма среди всех сумм квадратов этой матрицы встречается единственный раз. Матрицу, в которой все квадраты являются уникальными, назовем уникальной матрицей.

Другими словами, матрица A является уникальной, если для любого ее квадрата $A(i,s;\ i,t;\ j,s;\ j,t)$ выполняется равенство

$$v(\mathrm{Sum}(A(i,s;\ i,t;\ j,s;\ j,t))) = 1.$$

Для произвольной матрицы размерности $m \times n$ количество возможных значений сумм ее квадратов не превышает количества ее квадратов. Если же матрица является уникальной, то число возможных значений равно числу ее квадратов, то есть равно числу $mn(m-1)(n-1)/4$. Верно и обратное: если множество всех попарно различных возможных значений сумм квадратов матрицы равно количеству ее квадратов, то матрица является уникальной.

Очевидно, что любая матрица размерности 2×2 является уникальной.

Пример. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{pmatrix}.$$

В данной матрице можно выделить 6 квадратов, суммы которых равны 5, 18, 21, 77, 80 или 93. Отсюда данная матрица является уникальной.

Если же

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то множество возможных значений сумм квадратов этой матрицы состоит из чисел 1, 2 и 3. При этом $v_A(1) = v_A(3) = 1$ и $v_A(2) = 4$. Количество квадратов в данной матрице равно 6. Поэтому данная матрица уникальной не является. ■

Цель статьи – предложить примеры некоторых уникальных матриц.

1. Матрицы со степенями натуральных чисел в качестве элементов

Пусть a – натуральное число, отличное от 1.

Известно, что любое целое число можно разделить с остатком на число, отличное от нуля, причем единственным образом. Если b – натуральное число, то его можно записать в виде

$$b = b_0 + b_1 \cdot a + b_2 \cdot a^2 + b_3 \cdot a^3 + \ldots + b_{k-1} \cdot a^{k-1} + b_k \cdot a^k,$$

где k – неотрицательное целое число, $b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{k-1}, b_k \in \{0;1;2;\ldots;a-1\}$.

Введем в рассмотрение матрицу $A(a)$ размерности $m \times n$ вида

$$A(a)=\begin{pmatrix} a^1 & a^2 & \dots & a^{n-1} & a^n \\ a^{n+1} & a^{n+2} & \dots & a^{2n-1} & a^{2n} \\ \dots & & & & \\ a^{(m-2)n+1} & a^{(m-2)n+2} & \dots & a^{mn-n-1} & a^{mn-n} \\ a^{(m-1)n+1} & a^{(m-1)n+2} & \dots & a^{mn-1} & a^{mn} \end{pmatrix}.$$

В этой матрице ij-элемент равен $a^{(i-1)n+j}$, где $1\le i\le m$, $1\le j\le n$. Тогда

$$A(a)(i,s;\ i,t;\ \ j,s;\ \ j,t)=\begin{pmatrix} a^{(i-1)n+s} & a^{(i-1)n+t} \\ a^{(j-1)n+s} & a^{(j-1)n+t} \end{pmatrix}$$

и

$$\mathrm{Sum}(A(a)(i,s;\ i,t;\ \ j,s;\ \ j,t))=\frac{(a^{in}+a^{jn})(a^s+a^t)}{2a^n},$$

где $1\le i\le m$, $1\le j\le m$, $1\le s\le n$, $1\le t\le n$, $i<j$, $s<t$. Заметим, что сумма квадрата $A(a)(i,s;\ i,t;\ \ j,s;\ \ j,t)$ есть число целое.

Примерами рассматриваемых матриц являются

$$A(2)_{3\times 4}=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 & 16 \\ 32 & 64 & 128 & 256 \\ 512 & 1024 & 2048 & 4096 \end{pmatrix} \text{ и } A(3)_{2\times 3}=\begin{pmatrix} 3 & 9 & 27 \\ 81 & 243 & 729 \end{pmatrix}.$$

Для любого квадрата матрицы $A(a)$ его сумма есть сумма попарно различных четырех натуральных степеней натурального числа a, отличного от 1. Поэтому каждый квадрат матрицы $A(a)$ является уникальным, значит, матрицы $A(a)$ является уникальной.

Суммы квадратов матрицы $A(a)$ принимают целые значения из отрезка

$$\left[\frac{(a^n+1)\cdot(a+1)\cdot a}{2};\frac{(a^n+1)\cdot(a+1)\cdot a^{(m-1)n-1}}{2}\right].$$

При этом их количество равно $mn(m-1)(n-1)/4$.

Пример. Матрица $A(2)_{3\times 4}$ является уникальной. Суммы ее квадратов принимают значения 51, 85, 102, 153, 170, 204, 771, 816, 1285, 1360, 1542, 1632, 2113, 2448, 2570, 2720, 3084, 3264. Количество возможных сумм равно числу 16, которое совпадает с количеством квадратов данной матрицы. ■

По аналогии с матрицей $A(a)$ можно определить матрицу $A(a^k)$, где $k\in N$, в которой 1,1-элемент равен a^k, а все остальные элементы этой матрицы равны a^{k+1}, a^{k+2} и так далее. При этом все суммы квадратов матрицы $A(a^k)$ будут целыми числами. Если же в качестве числа k взять 0, то ряд квадратов будут иметь дробные суммы. В любом случае матрица $A(a^k)$ является уникальной.

2. Матрицы с числами Фибоначчи в качестве элементов

Числа Фибоначчи задаются рекуррентной формулой

$$f_1 = 1,\ \ f_2 = 1,\ \ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n,\ \ n \ge 3,$$

Получаем следующую последовательность чисел:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, …

Подробнее о числах Фибоначчи можно ознакомиться в книге [1].

Рассмотрим матрицу F размерности $m \times n$ вида

$$F = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_{n-1} & f_n \\ f_{n+1} & f_{n+2} & \cdots & f_{2n-1} & f_{2n} \\ \dots & & & & \\ f_{(m-2)n+1} & f_{(m-2)n+2} & \cdots & f_{mn-n-1} & f_{mn-n} \\ f_{(m-1)n+1} & f_{(m-1)n+2} & \cdots & f_{mn-1} & f_{mn} \end{pmatrix},$$

где f_i – i-е число Фибоначчи, $i \in \{1;2;3;\dots;mn\}$.

Пример. Матрица F размерности 3×4 имеет вид

$$F_{3\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 8 & 13 & 21 \\ 34 & 55 & 89 & 144 \end{pmatrix}.$$

Суммы квадратов матрицы $F_{3\times 4}$ принимаю значения

$$\frac{15}{2}, \frac{21}{2}, 12, 15, \frac{33}{2}, \frac{39}{2}, \frac{91}{2}, 51, 63, \frac{141}{2}, \frac{147}{2}, \frac{165}{2}, 91, \frac{203}{2}, 102, 114, 119, \frac{267}{2}.$$

Количество возможных значений сумм равно 18, что совпадает с числом квадратов данной матрицы. Поэтому матрица $F_{3\times 4}$ является уникальной. ■

Покажем, что любая матрица $F_{m\times n}$ является уникальной.

Для чисел Фибоначчи справедливы утверждения.

• Если a, b – числа Фибоначчи, $a < b$, то $b = a + c$, $c \in N$.

Так как $a < b$, то $b - a \in N$.

• Если a, b, c – числа Фибоначчи, $a < b < c$, то $c = a + b + d$, $d \in N \bigcup \{0\}$.

Рассмотрим случаи.

1. $c = b + a$, a, b, c – последовательные числа Фибоначчи. Тогда $d = 0$.

2. $c = b + s$, s, b, c – последовательные числа Фибоначчи, $s > a$. Тогда $s = a + d$, $d \in N$; $c = b + a + d$.

3. $c = s + t$, t, s, c – последовательные числа Фибоначчи и $s > b$, $t > a$. Тогда $s = b + d_1$, $t = a + d_2$, $d_1, d_2 \in N$; $c = b + a + d$, $d = d_1 + d_2$.

Выберем два квадрата F_a и F_b в матрице $F_{m\times n}$,

$$F_a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \text{ и } F_b = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}.$$

На рисунке 1 изображены два из возможных расположений квадратов F_a и F_b в матрице $F_{m\times n}$.

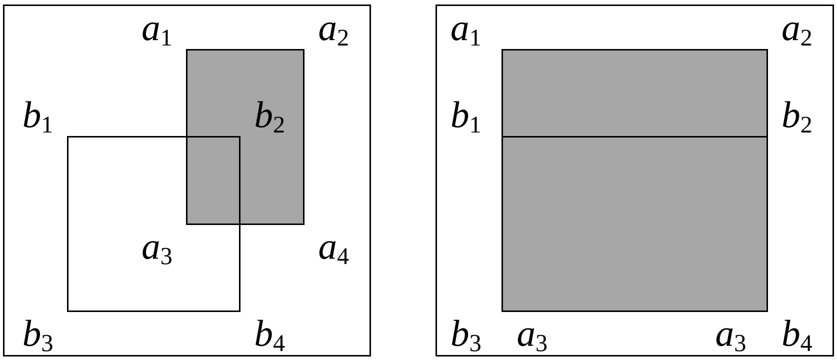

Рисунок 1 – Возможные расположения двух квадратов в матрице $F_{m \times n}$

По левой части рисунка 1 можем записать неравенства

$$a_1 < b_1,\ a_2 < b_2,\ a_3 < b_3,\ a_4 < b_4;$$

по правой части – равенства и неравенства

$$a_1 < b_1,\ a_2 < b_2,\ a_3 = b_3,\ a_4 = b_4.$$

Из этих соотношений получаем, что $\mathrm{Sum}(F_a) \neq \mathrm{Sum}(F_b)$.

На рисунке 2 представлены возможные расположения квадратов F_a и F_b в матрице $F_{m \times n}$: затемненным прямоугольником изображен квадрат F_a, светлым – квадрат F_b. Здесь считается, что, меняя цвета квадратов F_a и F_b, действительно получаем все комбинации двух квадратов в матрице $F_{m \times n}$.

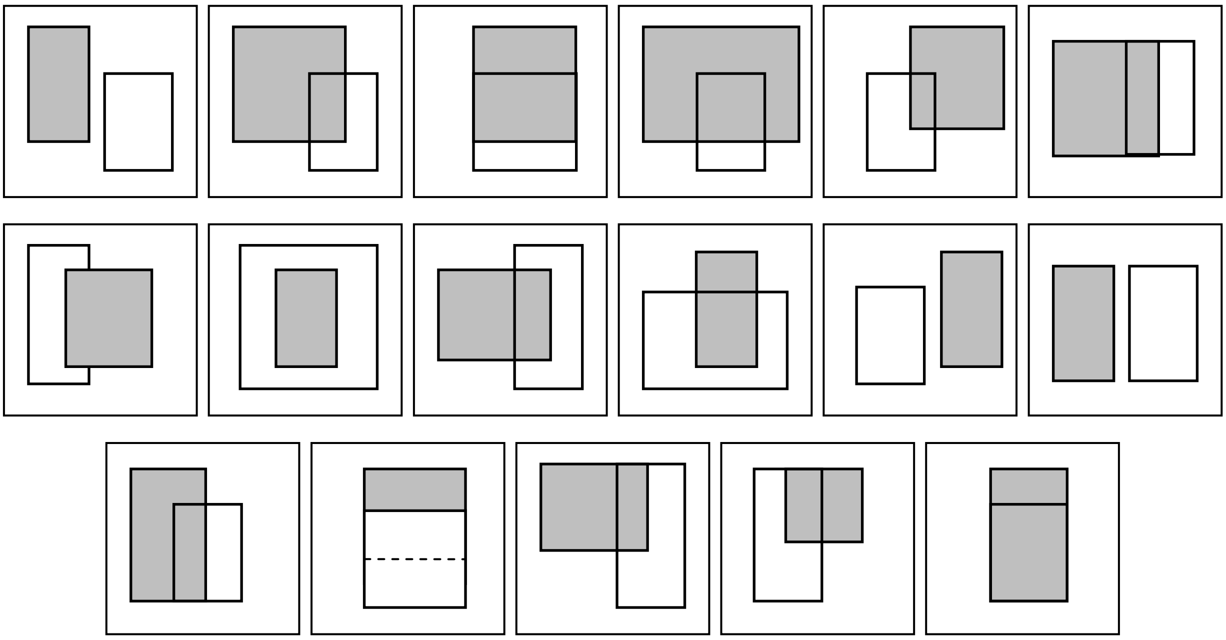

Рисунок 2 – Расположение двух квадратов в матрице $F_{m \times n}$

Пусть F_a и F_b – различные квадраты и $\mathrm{Sum}(F_a) = \mathrm{Sum}(F_b)$. Тогда

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4.$$

Из расположения квадратов F_a и F_b (кроме крайне правого в нижнем ряду, соответствующего правой части рисунка 1) получаем равенство

$$b_3 = a_1 + a_2 + d_1,\ b_4 = a_3 + a_4 + d_2,\ d_1, d_2 \in N \cup \{0\}.$$

Поэтому

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = b_1 + b_2 + a_1 + a_2 + d_1 + a_3 + a_4 + d_2,$$
$$0 = b_1 + b_2 + d_1 + d_2,$$

что не так. Пришли к противоречию. Значит, квадраты F_a и F_b в матрице $F_{m\times n}$ совпадают. Следовательно, матрица $F_{m\times n}$ является уникальной.

Суммы квадратов матрицы $F_{m\times n}$ принадлежат отрезку

$$\left[\frac{2+f_{n+3}}{2};\ \frac{f_{mn-n+1}+f_{mn+1}}{2}\right].$$

Из уникальности матрицы $F_{m\times n}$ следует, что суммы ее квадратов принимают столько значений из этого отрезка, сколько всего квадратов у матрицы $F_{m\times n}$.

Определим матрицу $F(k)$, в которой 1,1-элемент – число Фибоначчи f_k, остальные элементы этой матрицы равны числам f_{k+1}, f_{k+2} и так далее, где $k \in N$. Например,

$$F(6)_{2\times 5} = \begin{pmatrix} 8 & 13 & 21 & 34 & 55 \\ 89 & 144 & 233 & 377 & 610 \end{pmatrix}.$$

Матриц $F(k)$ для любого $k \in N$ является уникальной.

Заключение

В данной статье для образования матриц использованы классические последовательности чисел со свойствами, предопределяющими уникальность этих матриц. Очевидно, что для построения уникальных матриц найдется ряд других числовых последовательностей и их комбинаций.

Например, можно сформулировать вопрос об уникальности матрицы

$$A(p_1; p_2; \ldots; p_m)_{m\times n} = \begin{pmatrix} p_1^s & p_1^{s+1} & \cdots & p_1^{s+n-1} \\ p_2^s & p_2^{s+1} & \cdots & p_2^{s+n-1} \\ \cdots & & & \\ p_m^s & p_m^{s+1} & \cdots & p_m^{s+n-1} \end{pmatrix},$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_m$ – попарно различные простые числа, $s \in N$. Решение этого вопроса, очевидно, сводится к решению вопроса об уникальности матрицы $A(p_1; p_2)$ размерности $2\times n$.

В общем случае можем считать, что числа $p_1, p_2, \ldots, p_m$ не обязательно являются простыми, вопрос же остается прежним.

Библиографический список

1. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. М.: Наука, 1978. 144 с.
2. Попов И.Н. Группы RC и RCD: монография. Архангельск: КИРА, 2014. 192 с.
3. Попов И.Н. Квадраты матриц // Научно-исследовательская деятельность школьников в области математики, прикладной математики и

информатики: материалы Шестой региональной научно-практической конференции. Часть II / сост. С.Н. Котова; отв. ред. М.В. Шабанова; Сев. (Арктич.) федер. ун-т им. М.В. Ломоносова. Архангельск: САФУ, 2014. С. 119-127.

4. Попов И.Н. Суммы квадратов матрицы // Постулат. 2018. № 4-1 (30). С. 47. URL: http://e-postulat.ru/index.php/Postulat/article/view/1367/1398
5. Попов И.Н. Квадраты матрицы определенной суммы // Постулат. 2018. № 5-1. С.27 URL: http://e-postulat.ru/index.php/Postulat/article/view/1461/1493
6. Попов И.Н. Квадраты матрицы со знакопеременными элементами // Постулат. 2018. № 6. С. 24. URL: http://e-postulat.ru/index.php/Postulat/article/view/1606/1640