УДК 517.968

Об одном классе линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода на оси

Асанов А.
Кыргызско-Турецкий Манас университет

Орозмаматова Жыпаргул Шермаматовна
Ошский технологический университет

Аннотация
В данной статье построены регуляризирующие операторы, доказаны теоремы единственности и получены оценки устойчивости решений для одного класса линейных уравнений третьего рода Фредгольма на оси.
Ключевые слова: линейные интегральные уравнения, уравнения третьего рода, единственность решений, регуляризирующие операторы, оценка устойчивости.

About one class of the linear integral equations of Fredgolm of the third kind the axis

Asanov A.
Kyrgyz-Turkish Manas University

Orozmamatova Jipargul Shermamatovna
Osh Technological University

Abstract
In this paper, regularizing operators are constructed, uniqueness theorems are proved, and estimates of the stability of solutions for one class of linear equations of the third kind of Fredholm on the axis are obtained.
Keywords: linear integral equations, equations of the third kind, uniqueness of solutions, regularizing operators, stability estimation.

Рассмотрим уравнение вида

$$Ku \equiv a(t)u(t) + \int_{-\infty}^{\infty} K(t,s)u(s)ds = f(t), \quad t \in (-\infty,\infty), \tag{1}$$

где, $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |K(t,s)|^2 dtds < \infty$,

$$K(t,s) = \begin{cases} A(t,s), & -\infty < s \le t < \infty, \\ B(t,s), & -\infty < t \le s < \infty. \end{cases} \tag{2}$$

Предполагается, что $A(t,s), B(t,s), a(t) u f(t)$-данные функции, $u(t)-$искомая функция. Всюду будем предполагать, что функция $a(t)$-непрерывная ограниченная функция на $(-\infty,\infty)$ и $a(t)\geq 0$ при всех $t\in(-\infty,\infty)$.

Отметим, что интегральные уравнения первого и третьего родов или интегральные уравнение сводящиеся к ним ранее изучались частности в [1-8], где были получены теоремы единственности устойчивости и регуляризации. В данном случае, исследованы вопросы устойчивость и регуляризации в пространстве $L_2(-\infty,\infty)$.

В силу (2) уравнение (1) запишем в виде

$$a(t)u(t)+\int_{-\infty}^{t} A(t,s)u(s)ds+\int_{t}^{\infty} B(t,s)u(s)ds=f(t). \tag{3}$$

Умножая обе части (3) на $u(t)$ и интегрируя по t получим

$$\begin{gathered}\int_{-\infty}^{\infty} a(t)|u(t)|^2 dt+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{t} A(t,s)u(s)u(t)dsdt+\\+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{t}^{\infty} B(t,s)u(s)u(t)dsdt=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)u(t)dt.\end{gathered} \tag{4}$$

Применяя формулу Дирихле, из (4) имеем

$$\begin{gathered}\int_{-\infty}^{\infty} a(t)|u(t)|^2 dt+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{t} \left[A(t,s)+B(s,t)\right]u(s)u(t)dsdt=\\=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)u(t)dt.\end{gathered} \tag{5}$$

Обозначим

$$H(t,s)=\frac{1}{2}\left[A(t,s)+B(s,t)\right],\quad (t,s)\in G=\{(t,s):-\infty<s\leq t<\infty\}. \tag{6}$$

Тогда из (5) имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(t)|u(t)|^2 dt+2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H(t,s)u(s)u(t)dsdt=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)u(t)dt.$$

Из условия (2) и обозначения (6), вытекает, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{t} H^2(t,s)dsdt<+\infty. \tag{7}$$

Введём новую функцию $M(t,s)$следующим образом

$$M(t,s)=\begin{cases}H(t,s), & -\infty<s\leq t<\infty,\\ H(s,t), & -\infty<t\leq s<\infty.\end{cases} \tag{8}$$

Ясно, что

$$M(t,s)=M(s,t),\quad (t,s)\in R\times R.$$

Нетрудно убедиться в справедливости равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|M(t,s)|^2 dsdt<\infty.$$

Тогда, известно, что

$$M(t,s)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi_i(t)\varphi_i(s)}{\lambda_i} \tag{9}$$

где, $\lambda_1,\lambda_2,...-$характеристические числа ядра $M(t,s)$, расположенные в порядке возрастания их модулей, $|\lambda_1|\leq|\lambda_2|\leq...$ и $\varphi_1(t),\varphi_2(t)...$ – соответствующие ортонормированные собственные функции.

Теорема 1. Пусть $M(t,s)$- полное ядро и $0<\lambda_1\leq\lambda_2\leq...$. Тогда решение уравнения (1) в пространстве $L_2(-\infty,\infty)$ единственно.

Доказательство. Пусть уравнение (1) при $f(t)\equiv 0$ имеет ненулевое решение $u(t)\in L_2(-\infty,\infty)$ т.е.

$$a(t)u(t)+\int_{-\infty}^{\infty}K(t,s)u(s)ds=f(t)\equiv 0, t\in(-\infty,\infty).$$

Отсюда

$$\int_{-\infty}^{\infty}a(t)|u(t)|^2 dt+2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}H(t,s)u(s)u(t)dsdt=0. \tag{10}$$

Учитывая (7), (8) и (9) из (10) получим

$$\int_{-\infty}^{\infty}a(t)|u(t)|^2 dt+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\phi_i(t)u(t)dt\right|^2=0.$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_i(t)u(t)dt=0, \quad (i=1,2...).$$

Следовательно, $u(t)=0$ при всех $t\in(-\infty,\infty)$. Теорема 1 доказана.

В дальнейшем будем считать, что все характеристические числа λ_v матричного ядра $M(t,s)$ положительны.

Семейство множеств корректностей, зависящее от параметра α, выделим следующим образом:

$$M_\alpha=\left\{u(t)\in L_2(-\infty,\infty): \sum_{v=1}^{\infty}\lambda_v^\alpha\left|u^{(v)}\right|^2\leq c\right\},$$

где, $c>0, \quad 0<\alpha<\infty,$

$$u^{(v)}=\int_{-\infty}^{\infty}u(t)\varphi_v(t)dt, \tag{11}$$

Ясно, что если $u(t)\in M_\alpha$, то

$$\|u(t)\|^2 \le c\lambda_1^{-\alpha}, \text{ где } \|u(t)\| = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| u(t)^2 \right| dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Будем предполагать, что $f(t) \in K(M_\alpha)$. Тогда уравнение (1) имеет решение $u(t) \in M_\alpha$ и справедливо.

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(t)|u(t)|^2 dt + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} \left| \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\phi_i(t)dt \right|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)u(t)dt.$$

Отсюда используя неравенства Гельдера, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(t)|u(t)|^2 dt + \sum_{v=1}^{\infty} \lambda_v^{-1} \left| u^{(v)} \right|^2 \le \| f(t)\| \cdot \|u(t)\|. \qquad (12)$$

С другой стороны

$$\|u(t)\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|u_i|^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}}}{\lambda_i^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}} \lambda_i^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} |u_i|^{\frac{2}{1+\alpha}} \le \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|u_i|^2}{\lambda_i} \right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{\alpha} |u_i|^2 \right)^{\frac{1}{1+\alpha}}.$$

Здесь мы применили неравенство Гёльдера при $p = 1 + a, q = \frac{(1+\alpha)}{\alpha}$ Учитывая $u(t) \in M_\alpha$ и (12), из последнего неравенства имеем

$$\|u(t)\|^2 \le c^{\frac{1}{1+\alpha}} \left(\| f(t)\| \|u(t)\| \right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

Отсюда получим следующую оценку устойчивости.

$$\|u(t)\| \le c^{\frac{1}{2+\alpha}} \| f(t)\|^{\frac{\alpha}{2+\alpha}}, \quad 0 < \alpha < \infty. \qquad (12)$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. Пусть оператор М порожденным матричным ядром $M(t,s)$ положительный, где $M(t,s)$ определен по формуле (9).Тогда на множестве $K(M_\alpha)$оператор K^{-1}, обратный K, равномерно непрерывен с гёльдеровым показателем $\frac{\alpha}{2+\alpha}$, т.е. справедлива оценка (12).

Покажем, что решение системы уравнений

$$(\varepsilon + a(t))u(t,\varepsilon) + \int_{-\infty}^{\infty} K(t,s)u(s,\varepsilon)ds = f(t), t \in (-\infty, \infty), \varepsilon > 0$$

(13) будет регуляризирующим для уравнения (1) на множестве M_α.

В самом деле, сделав следующую подстановку в уравнение (13)

$$u(t,\varepsilon) = u(t) + \xi(t,\varepsilon),$$

где, $u(t) \in M_\alpha$ - решение уравнения (1), получим

$$(\varepsilon + a(t))\xi(t,\varepsilon) + \int_{-\infty}^{\infty} K(t,s)\xi(s,\varepsilon)ds = -\varepsilon u(t).$$

Умножая последнее уравнение на $\xi(t,\varepsilon)$ и интегрируя, от -∞ до +∞ учитывая (2) и (9) имеем

$$\varepsilon\left\|\xi(t,\varepsilon)\right\|^2 + \int_{-\infty}^{\infty} a(s)\left|\xi(s,\varepsilon)\right|^2 ds +$$

$$+\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_\nu^{-1}\left|\xi_\nu(\varepsilon)\right|^2 \le \varepsilon\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|u^{(\nu)}\right|\left|\xi_\nu(\varepsilon)\right|, \tag{14}$$

где, $\xi_i(\varepsilon)$ – коэффициенты Фурье для функции $\xi(t,\varepsilon)$, по ортонормированной системе $\{\varphi_\nu(t)\}$. т.е. $\xi_\nu(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty}\xi(t,\varepsilon)\phi_\nu(t)dt.$

Применяя неравенство Гёльдера при $p = q = \frac{1}{2}$, из (14) получим

$$\left\|\xi(t,\varepsilon)\right\| \le \left\|u(t)\right\|, \tag{15}$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_\nu^{-1}\left|\xi_\nu(\varepsilon)\right|^2 \le \varepsilon\left\|u(t)\right\|^2 \le \varepsilon c\lambda_1^{-\alpha}, \varepsilon > 0, \tag{16}$$

с другой стороны

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|u^{(\nu)}\right|\left|\xi_\nu(\varepsilon)\right| = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\left|\xi_\nu(\varepsilon)\right|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}}{\lambda_\nu^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}}\cdot\lambda_\nu^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}\left|u^{(\nu)}\right|^{\frac{1}{1+\alpha}}\left|\xi_\nu(t,\varepsilon)\right|^{\frac{1}{1+\alpha}}\left|u^{(\nu)}\right|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

Отсюда, после применения к правой части обобщенного неравенства Гёльдера при $p = \frac{2(1+\alpha)}{\alpha}, q = 2(1+\alpha), m = 2(1+\alpha), n = \frac{2(1+\alpha)}{\alpha}$ имеем

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|u^{(\nu)}\right|\left|\xi_\nu(\varepsilon)\right| \le \left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|\xi_\nu(\varepsilon)\right|^2\lambda_\nu^{-1}\right)^{\frac{a}{(1+\alpha)2}}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_\nu^{\alpha}\left|u^{(\nu)}\right|^2\right)^{\frac{1}{(1+\alpha)2}}\left\|\xi(t,\varepsilon)\right\|^{\frac{1}{1+\alpha}}\left\|u(t)\right\|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|u^{(\nu)}\right|\left|\xi_\nu(\varepsilon)\right| \le \left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|\xi_\nu(\varepsilon)\right|^2\lambda_\nu^{-1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_\nu^{\alpha}\left|u^{(\nu)}\right|^2\right)^{\frac{1}{q}}\left\|\xi(t,\varepsilon)\right\|^{\frac{2}{q}}\left\|u(t)\right\|^{\frac{2}{p}}.$$

Далее в силу $u(t) \in M_\alpha$, (15) и (16) из последнего неравенства имеем

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|u^{(\nu)}\right|\left|\xi_\nu(\varepsilon)\right| \le \left(\varepsilon c\lambda_1^{-\alpha}\right)^{\frac{1}{p}}c^{\frac{1}{q}}\left\|u(t)\right\|^{\frac{2}{q}+\frac{2}{p}},$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|u^{(\nu)}\right|\left|\xi_\nu(\varepsilon)\right| \le \left(\varepsilon c\lambda_1^{-\alpha}\right)^{\frac{1}{p}}c^{\frac{1}{q}}(c\lambda_1^{-\alpha})^{\frac{p+q}{pq}},$$

Отсюда, подставляя $p=\frac{2(1+\alpha)}{\alpha}, q=2(1+\alpha)$, получим

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|u^{(\nu)}\right|\left|\xi_{\nu}(\varepsilon)\right|\leq c^{\frac{1}{2(1+\alpha)}}(c\lambda_1^{-\alpha})^{\frac{1}{2}}(\varepsilon c\lambda_1^{-\alpha})^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}. \tag{17}$$

т.е.

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|u^{(\nu)}\right|\left|\xi_{\nu}(\varepsilon)\right|\leq c^{\frac{1}{2(1+\alpha)}}c^{\frac{1}{2}}c^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}\lambda_1^{\frac{-\alpha}{2}}\lambda_1^{-\frac{\alpha^2}{2(1+\alpha)}}\varepsilon^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}},$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|u^{(\nu)}\right|\left|\xi_{\nu}(\varepsilon)\right|\leq c\lambda_1^{\frac{-\alpha(2\alpha+1)}{1+\alpha}}\varepsilon^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}. \tag{18}$$

Учитывая (18), из (14) имеем

$$\left\|u(t,\varepsilon)-u(t)\right\|\leq c^{\frac{1}{2}}\lambda_1^{\frac{-\alpha(2\alpha+1)}{4(1+\alpha)}}\varepsilon^{\frac{\alpha}{4(1+\alpha)}},\quad 0<\alpha<\infty. \tag{19}$$

Таким образом, доказана.

Теорема 3. Пусть оператор M порожденный матричным ядром $M(t,s)$ положительный и $f(t)\in K(M_{\alpha})$. Тогда справедлива оценка (19), где u(t,ε) – решение уравнение (13) u(t) – решение уравнение (1) $M(t,s)$определен по формуле (9).

Библиографический список

1. Лаврентьев М.М. Об интегральных уравнениях первого рода. ДАН СССР. 1959. 127, №1. С. 31-33.
2. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука 1980.
3. Иманалиев М.И., Асанов А. О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода. ДАН СССР. 1989. Т. 309. № 5. С. 1052-1055.
4. Asanov A., M. Haluk Chelik, Kadenova Z. A. Uniqueness and Stability of Solutions of Linear Integral Equations of the First Kind with Two Variables // International journal of contemporary mathematical sciences Vol. 7, 2013, no. 19, 907 – 914. HIKARI Ltd.
5. Asanov A., Kadenova Z. A. Uniqueness and Stability of Solutions for Certain Linear Equations of the First Kind with Two Variables // Bulletin of Peoples Friendship of Russia. Moscow, Russia, 2013, №3. С. 30-36.
6. Иманалиев М.И., Асанов А. Регуляризация и единственность решений систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода // Докл. РАН 2007. Т. 415, № 1. С. 14-17.
7. Иманалиев М.И., Асанов А. О решениях систем линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода // Докл. РАН 2010. Т. 430, № 6. С. 1-4.

8. Иманалиев М.И., Асанов А., Асанов Р.А. Об одном классе систем линейных и нелинейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода с многоточечными особенностями // Дифференциальные уравнения, 2018, Т. 54, № 3, С. 387-397.