УДК 519.1

Прикладной характер коэффициентов разложения функции

Попов Иван Николаевич
Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова
к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры математики

Аннотация
В статье изложены результаты по определению коэффициентов разложения квадратов функций, являющихся суммами прямых и обратных величин, равных степеням переменной с неотрицательными целыми показателями, и коэффициентов натуральных степеней функции, равной сумме прямой и обратной величинам и единицы, связав их с числом минимальных маршрутов движения короля на бесконечной шахматной доске.
Ключевые слова: функция, комбинаторика, биномиальный коэффициент, полиномиальная формула, количество минимальных маршрутов фигур на шахматной доске.

The applied nature of the expansion coefficients of the functions

Popov Ivan Nikolaevich
Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov
Candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, associate professor of the Department of Mathematics

Abstract
The article presents the results of determining the coefficients of the decomposition of squares of functions, which are the sums of direct and inverse quantities equal to the powers of a variable with non-negative integers, and the coefficients of the natural powers of the function equal to the sum of the direct and inverse values and units, linking them with the number of minimum routes of the king on an infinite chessboard.
Keywords: function, combinatorics, binomial coefficient, polynomial formula, minimal routes of pieces on the chessboard.

Введение

Классические функции такие, как экспонента, синус, косинус и многие другие, обладают замечательными во многих смыслах разложениями через целые степени переменной, входящей в их запись [2, 4]. Привлекая свойства этих функций, нетрудно найти разложения их квадратов, кубов и так далее.

В ряде задач коэффициенты разложений тех или иных функции через целые степени переменных играют особую роль. Например, число k-мерных граней в n-мерном кубе, где $k \in \{0;1;2;\ldots;n\}$, равняется соответствующему коэффициенту в разложении функции $f(x)=(2+x)^n$ по неотрицательным целым степеням переменной x, которое имеет вид

$$f(x)=(2+x)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot 2^{n-k} \cdot x^k,$$

где биномиальные коэффициенты C_n^k вычисляются по формуле

$$C_n^k=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}.$$

Поэтому требуемое число граней в кубе равно $2^{n-k}\cdot C_n^k$. Для случая $n=4$ получаем набор коэффициентов: 16, 32, 24, 8, 1, откуда в тессеракте (то есть в четырехмерном кубе) содержится 16 вершин и 32 ребра [2].

Другим примером является задача об определении количества решений диофантовых линейных уравнений в неотрицательных целых числах. Если необходимо определить число решений уравнения $2x_1+4x_2+5x_3+7x_4=200$, то следует определить коэффициент при x^{200} в разложении функции

$$f(x)=\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{1-x^4}\cdot\frac{1}{1-x^5}\cdot\frac{1}{1-x^7}.$$

Компьютерные расчеты показывают, что искомый коэффициент равняется числу 5438 [3, 6].

К уравнениям такого рода сводятся хорошо известные олимпиадные и занимательные задачи о мелочи, суть которых состоит в нахождении числа способов размена определенной суммы денег мелкими монетами (например, определение числа способов выдать 14 копеек монетами, используя монеты достоинством только в 3 и 5 копеек).

В частном случае, когда выясняется количество решений уравнения $x_1+x_2+\ldots+x_k=n$ в неотрицательных целых числах, искомое количество равно C_{n+k-1}^n.

Функции изначально могут быть заданы в виде суммы целых степеней переменной. Такими функциями являются функции $f_n(x)$ вида

$$f_n(x)=x^n+x^{n-1}+\ldots+x^2+x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\ldots+\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{1}{x^n},\ n\in N,\ x\in R\setminus\{0\}.$$

Эти функции являются суммами прямых и обратных величин. В частности,

$$f_1(x)=x+1+\frac{1}{x},$$

$$f_2(x)=x^2+x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2},$$

$$f_3(x)=x^3+x^2+x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}.$$

Целью статьи – описать свойства коэффициентов функций $f_n^2(x)$ и $f_1^n(x)$ для произвольного неотрицательного целого числа n, и показать роль коэффициентов разложения функции $f_1^n(x)$ через целые степени переменной x для решения задачи об определении количества минимальных маршрутов шахматного короля.

1. Свойства функций $f_n(x)$

1) Для всех действительных чисел a и b, что $a \cdot b = 1$, верно равенство

$$f_n(a) = f_n(b).$$

2) Справедливо равенство $f_n(1) = 1 + 2n$, так как количество слагаемых в записи функции $f_n(x)$ равно $2n+1$.

3) Справедливо равенство

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{2n+1}-1}{x^n \cdot (x-1)}, & x \neq 1; \\ 1+2n, & x = 1. \end{cases}$$

При $x \neq 1$ функция $f_n(x)$ – сумма геометрической прогрессии, поэтому

$$f_n(x) = \frac{1}{x^n} \cdot \left(x^{2n} + x^{2n-1} + \ldots + x + 1\right) = \frac{1}{x^n} \frac{x^{2n+1}-1}{x-1} = \frac{x^{2n+1}-1}{x^n \cdot (x-1)}.$$

При $x = 1$ получаем результат, равный $2n+1$.

В частности, верно равенство

$$f_n(-1) = (-1)^n.$$

4) Справедливо равенство $f_{n+1}(x) = f_n(x) + x^{n+1} + \dfrac{1}{x^{n+1}}$, так как

$$f_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(x^k + \frac{1}{x^k}\right),$$

$$f_{n+1}(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) = x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} + 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) =$$

$$= x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} + f_n(x).$$

2. Квадрат функций $f_n(x)$

Одно из свойств функций $f_n(x)$ связано с их квадратами.

Вычислим квадраты функций $f_n(x)$ для некоторых значений n и выпишем наборы коэффициентов при степенях переменной x по убыванию показателей:

$$f_1^2(x) = x^2 + 2x + 3 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^2},$$

набор коэффициентов: 1, 2, 3, 2, 1;

$$f_2^2(x)=x^4+2x^3+3x^2+4x+5+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^4},$$

набор коэффициентов: 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1;

$$f_3^2(x)=x^6+2x^5+3x^4+4x^3+5x^2+6x+7+\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{4}{x^3}+\frac{3}{x^4}+\frac{2}{x^5}+\frac{1}{x^6},$$

набор коэффициентов: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.

Можем заметить закономерность в значениях коэффициентов в разложении квадрата функции $f_n(x)$ по степеням переменной x.

Докажем, что справедливо равенство

$$f_n^2(x)=x^{2n}+2x^{2n-1}+3x^{2n-2}+\ldots+2nx+(2n+1)+$$
$$+\frac{2n}{x}+\ldots+\frac{3}{x^{2n-2}}+\frac{2}{x^{2n-1}}+\frac{1}{x^{2n}}$$

или

$$f_n^2=2n+1+\sum_{k=1}^{2n}(2n+1-k)\cdot\left(x^k+\frac{1}{x^k}\right).$$

Наборы коэффициентов будут иметь вид:

$$1, 2, 3, \ldots, 2n, 2n+1, 2n, \ldots, 3, 2, 1.$$

Вначале покажем, что справедлива рекуррентная формула

$$f_{n+1}^2(x)=f_n^2(x)+f_{2n+2}(x)+f_{2n+1}(x),\ n\in N.$$

Действительно,

$$f_{n+1}^2(x)=\left(f_n(x)+x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}\right)^2=$$

$$=f_n^2(x)+\left(x^{n+1}\right)^2+\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right)^2+2f_n(x)\cdot x^{n+1}+2f_n(x)\cdot\frac{1}{x^{n+1}}+2x^{n+1}\cdot\frac{1}{x^{n+1}}=$$

$$=f_n^2(x)+x^{2n+2}+\frac{1}{x^{2n+2}}+2+$$
$$+2x^{n+1}\cdot\left(1+\sum_{k=1}^{n}\left(x^k+\frac{1}{x^k}\right)\right)+2\frac{1}{x^{n+1}}\cdot\left(1+\sum_{k=1}^{n}\left(x^k+\frac{1}{x^k}\right)\right)=$$

$$=f_n^2(x)+x^{2n+2}+\frac{1}{x^{2n+2}}+2+2x^{n+1}+2\frac{1}{x^{n+1}}+$$
$$+2\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(x^{n+1+k}+x^{n+1-k}\right)+2\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{x^{n+1+k}}+\frac{1}{x^{n+1-k}}\right)=$$

$$=f_n^2(x)+2\left(x^{2n+2}+x^{2n+1}+\ldots+x+1+\frac{1}{x}+\ldots+\frac{1}{x^{2n+1}}+\frac{1}{x^{2n+2}}\right)-$$
$$-\left(x^{2n+2}+\frac{1}{x^{2n+2}}\right)=$$

$$= f_n^2(x) + 2f_{2n+1}(x) - \left(x^{2n+2} + \frac{1}{x^{2n+2}}\right) =$$

$$= f_n^2(x) + 2f_{2n+1}(x) - \left(f_{2n+2}(x) - f_{2n+1}(x)\right) = f_n^2(x) + f_{2n+2}(x) + f_{2n+1}(x).$$

Рассмотренное рекуррентное равенство можно доказать и используя свойство 3 функции $f_n(x)$, рассмотрев два случая $x \neq 1$ и $x = 1$.

Докажем основное равенство. Воспользуемся методом математической индукции по числу n.

База индукции обосновывается конкретным вычислением для случая $n = 2$.

Допустим, что верно равенство

$$f_n^2(x) = 2n + 1 + \sum_{k=1}^{2n} (2n + 1 - k) \cdot \left(x^k + \frac{1}{x^k}\right).$$

Докажем равенство

$$f_{n+1}^2(x) = 2(n+1) + 1 + \sum_{k=1}^{2(n+1)} (2(n+1) + 1 - k) \cdot \left(x^k + \frac{1}{x^k}\right).$$

Получаем:

$$f_{n+1}^2(x) = f_n^2(x) + f_{2n+2}(x) + f_{2n+1}(x) =$$

$$= 2n + 1 + \sum_{k=1}^{2n} (2n + 1 - k) \cdot \left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) + 1 + \sum_{k=1}^{2n+2} \left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) + 1 + \sum_{k=1}^{2n+1} \left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) =$$

$$= 2(n+1) + 1 + \sum_{k=1}^{2n} (2n + 1 - k) \cdot \left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) + \sum_{k=1}^{2n} \left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) + \sum_{k=1}^{2n} \left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) +$$

$$+ \left(x^{2n+2} + \frac{1}{x^{2n+2}}\right) + \left(x^{2n+1} + \frac{1}{x^{2n+1}}\right) + \left(x^{2n+1} + \frac{1}{x^{2n+1}}\right) =$$

$$= 2(n+1) + 1 + x^{2n+2} + 2x^{2n+1} + \sum_{k=1}^{2n} (2(n+1) + 1 - k)\left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) + \frac{2}{x^{2n+1}} + \frac{1}{x^{2n+2}} =$$

$$= 2(n+1) + 1 + \sum_{k=1}^{2(n+1)} (2(n+1) + 1 - k) \cdot \left(x^k + \frac{1}{x^k}\right).$$

Индукционный переход доказан.

Следовательно, равенство справедливо для любого $n \in N$.

3. Бином Ньютона. Минимальные пути шахматной ладьи

Бином Ньютона позволяет вычислять натуральные степени суммы двух слагаемых:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^0 b^n + C_n^1 a^1 b^{n-1} + C_n^2 a^2 b^{n-2} + \ldots + C_n^n a^n b^0 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$

Коэффициенты в разложении C_n^k записываются в таблицу, называемую треугольником Паскаля, представленную на рисунке 1, считая, что первая строка содержит коэффициенты при $n = 0$ (поэтому нумерация строк ведется с нуля), вторая – при $n = 1$ и так далее [5].

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
 & & & & & & \ldots & & & & & &
\end{array}
$$

Рисунок 1 – Треугольник Паскаля

Числа в треугольнике Паскаля, начиная со второй строки, равны сумме двух ближайших, рядом стоящих, чисел предыдущей строки (считая, что числа вне треугольника равны нулю). Например,

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6.$$

Сумма биномиальных коэффициентов C_n^k для определенного числа n равна 2^n,

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n.$$

Это означает, что в треугольнике Паскаля сумма всех чисел определенной строки равна степени числа 2. Например,

$$1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64 = 2^6.$$

Есть достаточно много литературы, в которых опубликованы задачи, связанные с шахматными фигурами и доской (конечной или бесконечной). Одним из требований в таких задачах является описать движения фигур на шахматной доске или их возможное количество с определенными условиями. Примером условия может являться минимальность количества пройденных клеток, исходя из заложенных правил движения фигуры по шахматной доске.

Распространенной задачей о числе минимальных путей, получаемых при движении фигур на шахматной доске, является задача о движении ладьи. На рисунках 2 и 3 числа в клетках указывают количество минимальных путей, получаемых при движении ладьи по клеткам шахматной доски.

 ISSN 2414-4487

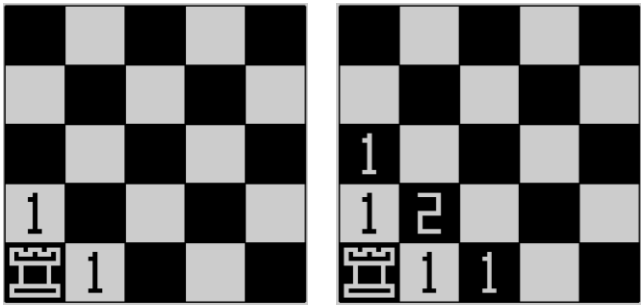

Рисунок 2 – Количество минимальных путей за 1 и 2 шага ладьи

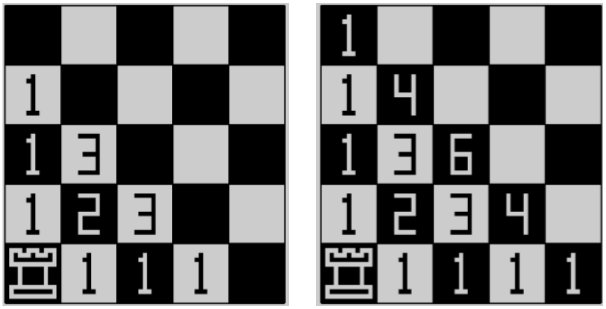

Рисунок 3 – Количество минимальных путей за 3 и 4 шага ладьи

Как видим, числа совпадают с биномиальными коэффициентами.

Задача об определении количества минимальных путей при движении ладьи эквивалентна задаче о движении по городу, формулировка которой звучит следующим образом.

Город имеет вид прямоугольника, разделенного улицами на квадраты. Число таких улиц в направлении с севера на юг равно n, а в направлении с востока на запад – k. Сколько имеется кратчайших дорог от одной из вершин прямоугольника до противоположной?

На рисунке 4 указан город с 4 улицами с севера на юг и 5 улицами с востока на запад и изображены три примера минимальных маршрутов.

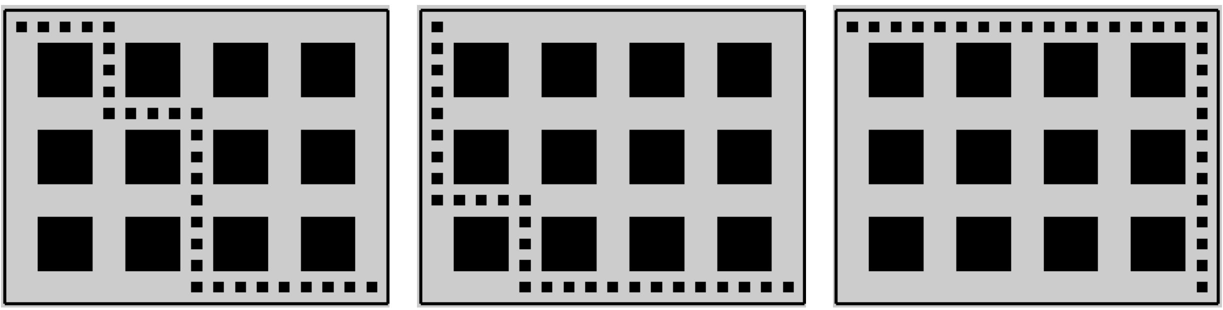

Рисунок 4 – Город с указанными тремя минимальными маршрутами

На рисунке 5 в перекресках города указаны числа, равные количеству минимальных маршрутов, ведущих в них, считая, что маршруты ведутся из северо-западного угла города. Каждое число в перекрестке (за исключением находящихся в первых горизонтальной и вертикальной улицах, в которых указаны единицы) равно сумме чисел в двух ближайщих перекрестках (один из которых находится на севере города, другой – на западе).

 ISSN 2414-4487

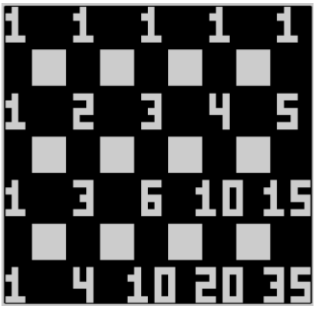

Рисунок 5 – Количество минимальных маршрутов

Ответом в данной частной задаче является число 35. Ответом в задаче, сформулированной в общем виде, является число $C_{n+k-2}^{k-1} = C_{n+k-2}^{n-1}$.

Задача о числе минимальных маршрутов в городе трансформируется в задачу об определении числа способов прочтения слова АБРАКАДАБРА на амулете (рисунок 6), читая это слово сверху вниз, беря в каждой строке по одной ближайшей букве к уже выбранной.

А
Б Б
Р Р Р
А А А А
К К К К К
А А А А А А
Д Д Д Д Д
А А А А
Б Б Б
Р Р
А

Рисунок 6 – Амулет «АБРАКАДАБРА»

4. Натуральная степень функции $f_1(x)$

Обобщением бинома Ньютона является формула

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)^n = \sum_{\substack{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k \in N\bigcup\{0\}, \\ \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k=n}} C_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k} \cdot a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_k^{\alpha_k},$$

$C_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k} = \dfrac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_k!}$ [2]. Число слагаемых в разложении равно числу решений уравнения $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = n$, которое равно $C_{n+k-1}^{n} = \dfrac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}$.

Справедливо равенство

$$\sum_{\substack{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k \in N\bigcup\{0\}, \\ \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k=n}} C_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k} = k^n.$$

Определим связь коэффициентов в разложениях $f_1^{n+1}(x)$ и $f_1^{n}(x)$.

Введем следующее обозначение:

$$f_1^n(x)=\left(x^{-1}+1+x\right)^n=S_{-n}^n x^{-n}+S_{-n+1}^n x^{-n+1}+\ldots+S_k^n x^k+\ldots+S_{n-1}^n x^{n-1}+S_n^n x^n,$$

$$f_1^n(x)=\left(x^{-1}+1+x\right)^n=\sum_{k=-n}^{n} S_k^n x^k .$$

Здесь S_k^n – коэффициенты разложения функции $f_1^n(x)$ по целым степеням переменной x, $n\in N\bigcup\{0\}$ и $k\in\{-n;-n+1;-n+2;\ldots;n\}$.

С одной стороны,

$$f_1^{n+1}(x)=\left(x^{-1}+1+x\right)^{n+1}=\left(x^{-1}+1+x\right)\cdot f_1^n=\left(x^{-1}+1+x\right)\cdot\sum_{k=-n}^{n} S_k^n x^k=$$

$$=\sum_{k=-n}^{n} S_k^n x^{k-1}+\sum_{k=-n}^{n} S_k^n x^k+\sum_{k=-n}^{n} S_k^n x^{k+1}=$$

$$=S_{-n}^n x^{-n-1}+\left(S_{-n+1}^n+S_{-n}^n\right)x^{-n}+\left(S_{-n+2}^n+S_{-n+1}^n+S_{-n}^n\right)x^{-n+1}+$$
$$+\left(S_{-n+3}^n+S_{-n+2}^n+S_{-n+1}^n\right)x^{-n+2}+\ldots+\left(S_n^n+S_{n-1}^n+S_{n-2}^n\right)x^{n-1}+$$
$$+\left(S_{n+1}^n+S_{n-1}^n\right)x^n+S_n^n x^{n+1}.$$

С другой стороны,

$$f_1^{n+1}(x)=\left(x^{-1}+1+x\right)^{n+1}=\sum_{k=-n-1}^{n+1} S_k^{n+1} x^k .$$

Приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях x, получаем

$S_{-n-1}^{n+1}=S_{-n}^n,$

$S_{-n}^{n+1}=S_{-n+1}^n+S_{-n}^n,$

$S_{-n+1}^{n+1}=S_{-n+2}^n+S_{-n+1}^n+S_{-n}^n,$

$S_{-n+2}^{n+1}=S_{-n+3}^n+S_{-n+2}^n+S_{-n+1}^n,$

…

$S_{n-1}^{n+1}=S_n^n+S_{n-1}^n+S_{n-2}^n,$

$S_n^{n+1}=S_n^n+S_{n-1}^n,$

$S_{n+1}^{n+1}=S_n^n.$

Так как $f_1^n(x)=f_1^n(x^{-1})$, то коэффициенты при x^k и x^{-k} равны между собой, то есть $S_k^n=S_{-k}^n$ для всех $k\in\{-n;\ldots;n\}$.

Для всех $n\in N$ справедливы равенства:

- $S_{-n}^n=S_n^n=1;$
- $S_{-n+1}^n=S_{n-1}^n=n;$
- $S_{-n+2}^n=S_{n-2}^n=C_{n+1}^2=\dfrac{n(n+1)}{2}.$

Коэффициенты разложения функции $f_1^n(x)$ через степени переменной x можно записать в таблицу, представленную на рисунке 7, пологая, что первая строка содержит коэффициенты разложения при $n=0$ (поэтому нумерация строк ведется с нуля), вторая – при $n=1$ и так далее.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & 1 & 1 & & & & \\
 & & & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & & & \\
 & & 1 & 3 & 6 & 7 & 6 & 3 & 1 & & \\
 & 1 & 4 & 10 & 16 & 19 & 16 & 10 & 4 & 1 & \\
1 & 5 & 15 & 30 & 45 & 51 & 45 & 30 & 15 & 5 & 1 \\
 & & & & & \dots & & & & &
\end{array}$$

Рисунок 7 – Таблица коэффициентов разложения $f_1^n(x)$

Каждое число есть сумма чисел, расположенных в предыдущей строке над этим числом и над его соседями справа и слева (отсутствующие числа считаются равными нулю). Например,

$$f_1^3(x)=\left(x+1+\frac{1}{x}\right)^3=x^3+3x^2+6x+7+\frac{6}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}.$$

Так как $f_1^n(1)=3^n$, то справедливо равенство

$$\sum_{k=-n}^{n}S_k^n=S_{-n}^n+S_{-n+1}^n+\ldots+S_{n-1}^n+S_n^n=3^n.$$

Это означает, что сумма чисел в каждой строке треугольника на рисунке 7 равна степени числа 3. Например,

$$1+5+15+30+45+51+45+30+15+5+1=243=3^5=f_1^5(1).$$

Используя обобщение бинома Ньютона, получаем:

$$\left(\frac{1}{x}+1+x\right)=\sum_{\substack{\alpha,\beta,\gamma\in N\bigcup\{0\},\\ \alpha+\beta+\gamma=n}}C_{\alpha,\beta,\gamma}\cdot x^{-\alpha}\cdot 1^{\beta}\cdot x^{\gamma}=\sum_{\substack{\alpha,\beta,\gamma\in N\bigcup\{0\},\\ \alpha+\beta+\gamma=n}}C_{\alpha,\beta,\gamma}\cdot x^{\gamma-\alpha}.$$

Обозначим: $k=\gamma-\alpha$. Тогда $k\in\{-n;\ldots;n\}$ и

$$\begin{cases}\gamma-\alpha=k,\\ \alpha+\beta+\gamma=n;\end{cases}\quad\begin{cases}\gamma=k+\alpha,\\ \beta=n-k-2\alpha.\end{cases}$$

Учитывая, что $\alpha,\beta,\gamma\in N\bigcup\{0\}$, получаем:

$$\begin{cases}\alpha\ge 0,\\ \beta\ge 0,\\ \gamma\ge 0,\\ \alpha\le n;\end{cases}\quad\begin{cases}\alpha\ge 0,\\ n-k-2\alpha\ge 0,\\ k+\alpha\ge 0,\\ \alpha\le n;\end{cases}\quad\begin{cases}\alpha\ge 0,\\ 2\alpha\le n-k,\\ \alpha\ge -k,\\ \alpha\le n.\end{cases}$$

Рассмотрим случая.

1) $k \geq 0$.

Тогда

$$\begin{cases} \alpha \geq 0, \\ 2\alpha \leq n-k, \\ \alpha \geq -k, \\ \alpha \leq n; \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha \geq 0, \\ \alpha \leq \left[\dfrac{n-k}{2}\right], \end{cases} \quad \alpha \in \left[0; \left[\dfrac{n-k}{2}\right]\right],$$

где $[x]$ – целая часть действительного числа x (наибольшее целое число, не превышающее данного числа x).

2) $k < 0$.

Тогда

$$\begin{cases} \alpha \geq 0, \\ 2\alpha \leq n-k, \\ \alpha \geq -k, \\ \alpha \leq n, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha \geq -k, \\ \alpha \leq \left[\dfrac{n-k}{2}\right], \end{cases} \quad \alpha \in \left[-k; \left[\dfrac{n-k}{2}\right]\right].$$

Итак,

- если $k \geq 0$, то $S_k^n = \sum\limits_{\alpha=0}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} \dfrac{n!}{\alpha! \cdot (n-k-2\alpha)! \cdot (k+\alpha)!}$;
- если $k < 0$, то $S_k^n = \sum\limits_{\alpha=-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} \dfrac{n!}{\alpha! \cdot (n-k-2\alpha)! \cdot (k+\alpha)!}$.

Заметим, что

$$\underset{k \geq 0}{\sum_{\alpha=0}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} \frac{n!}{\alpha! \cdot (n-k-2\alpha)! \cdot (k+\alpha)!}} = \underset{k<0}{\sum_{\alpha=-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} \frac{n!}{\alpha! \cdot (n-k-2\alpha)! \cdot (k+\alpha)!}}.$$

Действительно,

1) число слагаемых в каждой сумме равно $\left[\dfrac{n-k}{2}\right]+1$: в первой сумме параметр α принимает целые значения из отрезка $\left[0; \left[\dfrac{n-k}{2}\right]\right]$, во второй – значения, полученные сдвигом вправо на число $|k|$ всех значений параметра α первой суммы;

2) если для суммы, стоящей справа, ввести обозначение $t = k + \alpha$, то из неравенства $-k \leq \alpha \leq \dfrac{n-k}{2}$ получаем неравенство $0 \leq t \leq \left[\dfrac{n+k}{2}\right] = \left[\dfrac{n-|k|}{2}\right]$; при этом $\alpha = t - k$ и

$$\sum_{\substack{\alpha=-k \\ k<0}}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} \frac{n!}{\alpha!\cdot(n-k-2\alpha)!\cdot(k+\alpha)!} = \sum_{\substack{t=0 \\ k<0}}^{\left[\frac{n-|k|}{2}\right]} \frac{n!}{(t-k)!\cdot(n-k-2(t-k))!\cdot t!} =$$

$$= \sum_{\substack{t=0 \\ k<0}}^{\left[\frac{n-|k|}{2}\right]} \frac{n!}{(|k|+t)!\cdot(n+k-2t)!\cdot t!} = \sum_{\substack{t=0 \\ k<0}}^{\left[\frac{n-|k|}{2}\right]} \frac{n!}{t!\cdot(n-|k|-2t)!\cdot(|k|+t)!} =$$

$$= \sum_{\substack{\alpha=0 \\ k\geq 0}}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} \frac{n!}{\alpha!\cdot(n-k-2\alpha)!\cdot(k+\alpha)!}.$$

Преобразуем выражение для подсчета коэффициента S_k^n:

$$\frac{n!}{\alpha!\cdot(n-k-2\alpha)!\cdot(k+\alpha)!} = \frac{n!}{\alpha!\cdot(n-(2\alpha+k))!\cdot((k+2\alpha)-\alpha)!} =$$

$$= \frac{n!}{(k+2\alpha)!\cdot(n-(2\alpha+k))!} \cdot \frac{(k+2\alpha)!}{\alpha!\cdot((k+2\alpha)-\alpha)!} = C_n^{k+2\alpha} \cdot C_{k+2\alpha}^{\alpha}.$$

Обобщая, получаем формулу для определения коэффициента S_k^n:

$$S_t^n = \sum_{k=t}^{\left[\frac{n+t}{2}\right]} C_n^{2k-t} \cdot C_{2k-t}^{k}, \quad t \in [-n; n].$$

Этот результат можно получить, вычисляя $f_1^n(x)$, используя формулу бинома Ньютона в следующем виде:

$$\left(x^{-1}+x+1\right)^n = \left(\left(x^{-1}+x\right)+1\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (x^{-1}+x)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left(C_n^k \cdot \sum_{r=0}^{k} C_k^r x^{2r-k}\right) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{r=0}^{k}\left(C_n^k \cdot C_k^r x^{2r-k}\right).$$

Отсюда и получаем обобщенную формулу для вычисления S_t^n, обозначив $t = 2r-k$ и выразив параметр r.

Видим, числа S_t^n тесно связаны с биномиальными коэффициентами.

5. Минимальные пути шахматного короля

В то время как ладья может двигаться только по горизонтали или вертикали, король может делать ход и по диагонали. Поэтому количество способов добраться от клетки к клетке за минимальное число пройденных клеток (ходов) у короля больше, чем у ладьи [1].

Рассмотрим бесконечную шахматную доску, на одной из клеток которой расположен король. Количество минимальных путей, ведущих от исходной клетки до любой другой за 1, 2, 3 и 4 хода короля, указаны числами в клетках на рисунках 8 и 9. В клетке, занятой королем, записано число 1.

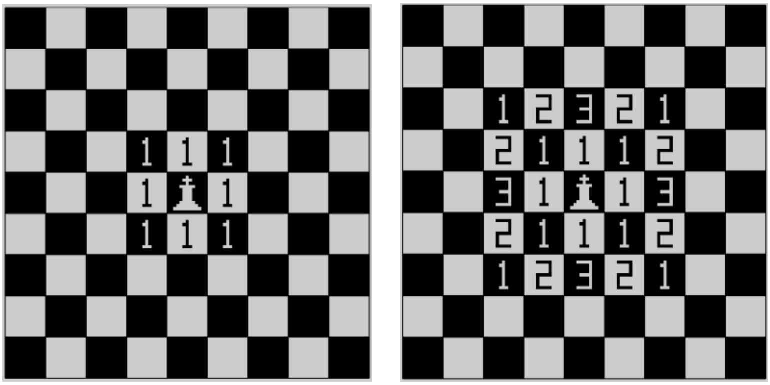

Рисунок 8 – Количество минимальных путей за 1 и 2 шага короля

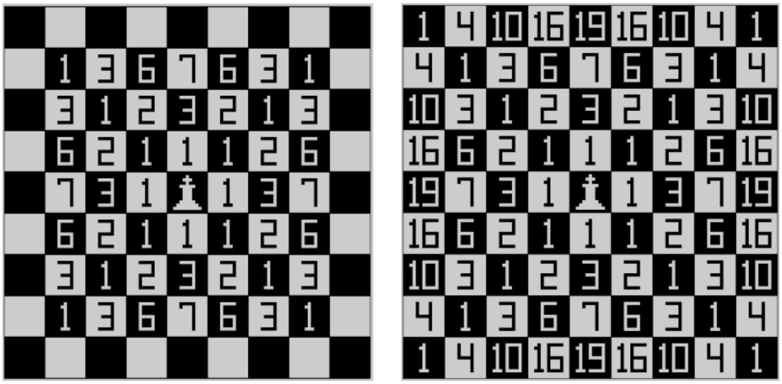

Рисунок 9 – Количество минимальных путей за 3 и 4 шага короля

Числа минимальных путей при движении короля совпадают с числами, представленными на рисунке 7, поэтому равны коэффициентам разложения функции $f_1^n(x)$ через степени переменной x, и таблицу, изображенную на рисунке 7, назовем треугольником Паскаля движения короля.

Заключение

Для генерации последовательностей, элементами которых являются количества минимальных маршрутов при движении шахматного короля, можно воспользоваться разложением натуральной степени функции вида

$$f(x) = x^2 + x + 1.$$

Если обозначить

$$f^n(x) = \left(x^2 + x + 1\right)^n = S_0^n + S_1^n x + S_2^n x^2 + \ldots + S_{2n-1}^n x^{2n-1} + S_{2n}^n x^{2n},\ n \in N \bigcup \{0\},$$

то можно показать, что выполняются равенства

$S_0^{n+1} = S_0^n$,

$S_1^{n+1} = S_1^n + S_0^n$,

$$S_2^{n+1} = S_2^n + S_1^n + S_0^n,$$
$$S_3^{n+1} = S_3^n + S_2^n + S_1^n,$$
$$\ldots$$
$$S_{2n-1}^{n+1} = S_{2n-1}^n + S_{2n-2}^n + S_{2n-3}^n,$$
$$S_{2n}^{n+1} = S_{2n}^n + S_{2n-1}^n + S_{2n-2}^n,$$
$$S_{2n+1}^{n+1} = S_{2n}^n + S_{2n-1}^n,$$
$$S_{2n+2}^{n+1} = S_{2n}^n.$$

При этом

$$S_0^n = 1,\ S_{2n}^n = 1,\ S_1^n = S_{2n-1}^n = n,\ S_k^n = S_{2n-k}^n \text{ для } k \in \{0;1;2;\ldots;2n\}.$$

Исходя из этого, коэффициенты разложения функции $\left(x^2 + x + 1\right)^n$ совпадают с числами из треугольника Паскаля, представленного на рисунке 7.

Можно сформулировать задачу об определении числа минимальных маршрутов, получаемых при движении шахматного слона на доске (конечной или бесконечной). Заметим, что слон может двигаться только либо по белым, либо по черным клеткам.

На рисунке 10 числа в клетках бесконечной шахматной доски равны количествам минимальных маршрутов передвижения слона (на левой части рисунка – за один или два шага, на правой – за три или четыре шага), считая, что слон занимает черную клетку (поэтому в белых клетка записаны нули).

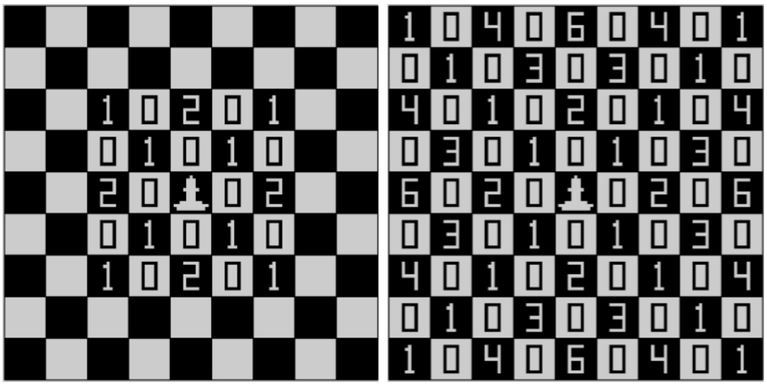

Рисунок 10 – Количество минимальных путей за 1, 2 , 3 и 4 шага слона

В клетке, в которой расположен слон, записано число 1.

Возводя функцию $f(x) = x^2 + 1$ в неотрицательную целую степень n и раскладывая по степеням переменной x, получаем:

$$f^n(x) = \left(x^2 + 1\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{2k}.$$

При всех нечетных степенях переменной x коэффициенты равны 0. Таблица коэффициентов разложения функции $f^n(x)$ по переменной x представлена на рисунке 11 (счет строк ведется с 0).

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1\ \ 0\ \ 1 \\
1\ \ 0\ \ 2\ \ 0\ \ 1 \\
1\ \ 0\ \ 3\ \ 0\ \ 3\ \ 0\ \ 1 \\
1\ \ 0\ \ 4\ \ 0\ \ 6\ \ 0\ \ 4\ \ 0\ \ 1 \\
\ldots
\end{array}
$$

Рисунок 11 – Таблица коэффициентов разложения функции $\left(x^2+1\right)^n$

Видим, что коэффициенты разложения совпадают со значениями на рисунке 10, поэтому коэффициенты равны количествам минимальных путей движения слона на шахматной доске. Назовем эту таблицу треугольником Паскаля движения слона.

В заключении сформулируем задачу о количестве минимальных путей, которые получаются при движении коня на бесконечной шахматной доске, рассматривая классическое определение хода коня: из угловой клетки в противоположную угловую клетку прямоугольника 2×3 или 3×2. При этом совершить такой переход (из угла в угол) конь может двумя способами, двигаясь по или против часовой стрелке.

Движения ладьи и короля порождают треугольники Паскаля. Движения коня, как мы понимаем, также порождают подобную таблицу, но с учетом своеобразного движения коня за один ход, существенно отличающегося от ходов ладьи и короля, ее построить относительно просто нет возможности. Для того чтобы добраться до соседних клеток коню следует вначале попасть на клетки шахматной доски, значительно удаленные от выбранной клетки.

На рисунке 12 указаны восемь крестовых клеток, отмеченных «Х», на которые возможны переходы коня за один ход.

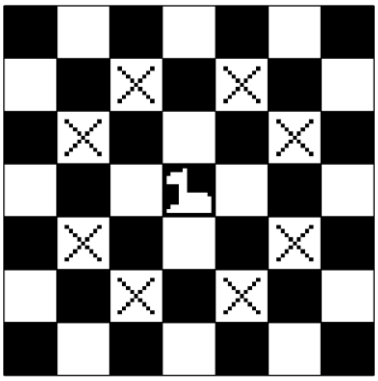

Рисунок 12 – Ходы коня за один шаг

Как отмечалось, за один ход конь может добраться до крестовой клетки шахматной доски двумя способами.

Рисунок 12 указывает способ определения числа минимальный путей при движении коня. Если считать, что в крестовых клетках записаны числа, равные количествам минимальных путем, сделанных конем за n ходов, то в клетке, в которой на рисунке находится изображение коня, будет записано число, равное минимальному числу путей, сделанных конем за $n+1$ ход. При этом это число будет равно удвоенной сумме чисел в крестовых клетках. Используя этот простой факт, построена компьютерная программа для определения количества минимальных путей движения коня по бесконечной шахматной доске за заданное число ходов. Результатом программы является рисунок 13. Конь начинает свое движение из клетки оранжевого цвета. Цвета на рисунке 13 означают:

– количество минимальных путей за ноль ходов;
– количество минимальных путей за один ход;
– количество минимальных путей за два хода;
– количество минимальных путей за три хода.

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	8	0	24	0	24	0	8	0	0	0	0
0	0	0	24	0	48	0	48	0	48	0	24	0	0	0
0	0	24	0	24	4	48	8	48	4	24	0	24	0	0
0	8	0	24	8	72	8	48	8	72	8	24	0	8	0
0	0	48	4	72	0	2	8	2	0	72	4	48	0	0
0	24	0	48	8	2	8	96	8	2	8	48	0	24	0
0	0	48	8	48	8	96	1	96	8	48	8	48	0	0
0	24	0	48	8	2	8	96	8	2	8	48	0	24	0
0	0	48	4	72	0	2	8	2	0	72	4	48	0	0
0	8	0	24	8	72	8	48	8	72	8	24	0	8	0
0	0	24	0	24	4	48	8	48	4	24	0	24	0	0
0	0	0	24	0	48	0	48	0	48	0	24	0	0	0
0	0	0	0	8	0	24	0	24	0	8	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Рисунок 13 – Количество минимальных путей при движении коня до 3 ходов

Нули на доске означают, что конь добирается до них за большее число шагов. Увеличивая число ходов, нули будут заменяться числами, которые при увеличении числа ходов уже не будут изменяться. При перемещении ладьи или короля таких ситуаций на шахматной доске не образуется, что связано с возможностью перемещения этих фигур от клетки до ближайшей клетки. Например, если коню дать возможность сделать 4, 5 или 6 ходов, то получаем рисунок 14. Цвета на рисунке 14 означают:

– количество минимальных путей за четыре хода;
– количество минимальных путей за пять ходов;
– количество минимальных путей за шесть ходов.

15360	800	64	1920	192	3040	256	3200	256	3040	192	1920	64	800	15360
800	96	2720	192	8	288	24	384	24	288	8	192	2720	96	800
64	2720	128	24	384	48	448	48	448	48	384	24	128	2720	64
1920	192	24	512	24	4	48	8	48	4	24	512	24	192	1920
192	8	384	24	8	72	8	48	8	72	8	24	384	8	192
3040	288	48	4	72	864	2	8	2	864	72	4	48	288	3040
256	24	448	48	8	2	8	96	8	2	8	48	448	24	256
3200	384	48	8	48	8	96	1	96	8	48	8	48	384	3200
256	24	448	48	8	2	8	96	8	2	8	48	448	24	256
3040	288	48	4	72	864	2	8	2	864	72	4	48	288	3040
192	8	384	24	8	72	8	48	8	72	8	24	384	8	192
1920	192	24	512	24	4	48	8	48	4	24	512	24	192	1920
64	2720	128	24	384	48	448	48	448	48	384	24	128	2720	64
800	96	2720	192	8	288	24	384	24	288	8	192	2720	96	800
15360	800	64	1920	192	3040	256	3200	256	3040	192	1920	64	800	15360

Рисунок 14 – Количество минимальных путей при движении коня до 6 ходов

Рисунки 13 и 14 центрально симметричны. Одну из частей рисунка 14 выпишем отдельно в виде таблицы, изображенной на рисунке 15.

1
8 96 8
864 2 8 2 864
8 72 8 48 8 72 8
512 24 4 48 8 48 4 24 512
128 24 384 48 448 48 448 48 384 24 128
96 2720 192 8 288 24 384 24 288 8 192 2720 96
15360 800 64 1920 192 3040 256 3200 256 3040 192 1920 64 800 15360
…

Рисунок 14 – Количество минимальных путей при движении коня

Эту таблицу и назовем треугольником Паскаля движения коня.

Основной вопрос задачи заключается в определении функций $f_n(x)$ от одной переменной, где $n \in N \cup \{0\}$, разложения которых по целым степеням переменной содержат коэффициенты, которые равны числам из таблицы на рисунке 14. Например,

$f_0(x) = x^{\alpha_{01}}$, $\alpha_{01} \in Z$;

$f_1(x) = 8x^{\alpha_{11}} + 96x^{\alpha_{12}} + 8x^{\alpha_{13}}$, $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13} \in Z$;

$f_2(x) = 864x^{\alpha_{21}} + 2x^{\alpha_{22}} + 8x^{\alpha_{23}} + 2x^{\alpha_{24}} + 864x^{\alpha_{25}}$, $\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}, \alpha_{24}, \alpha_{25} \in Z$.

Также можно сформулировать вопрос о сумме всех чисел одной строки треугольника Паскаля движения коня.

Задачу о движении коня по шахматной доске можно сформулировать и не для классического случая.

Библиографический список

1. Гик Е.Я. Шахматы и математика. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1983. 176 с.
2. Иванов Б.Н. Дискретная математика. Алгоритмы и программы. М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. 288 с.
3. Колчар М.А., Попов И.Н. Количество решений линейного диофантова уравнения // Научно-исследовательская деятельность школьников в области математики, прикладной математики и информатики: материалы Пятой региональной научно-практической конференции / сост. С.Н. Котова; отв. ред. М.В. Шабанова; Сев. (Арктич.) федер. ун-т им. М.В. Ломоносова. Архангельск: ИПЦ САФУ, 2013. С. 115-128.
4. Нефедов В.Н., Осипова В.А. Курс дискретной математики. М.: Изд-во МАИ, 1992. 264 с.
5. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. СПб.: Питер, 2003. 304 с.
6. Хаггарти Р. Дискретная математика для программистов. М.: Техносфера, 2005. 400 с.