УДК 621.3.05

Поиск оптимального количества резервирующих элементов посредством метода множителей Лагранжа с учетом меры неопределенности информации

Карандеев Денис Юрьевич
Хакасский государственный университет им. Н.Ф. Катанова
Аспирант

Калугин Дмитрий Анатольевич
Хакасский государственный университет им. Н.Ф. Катанова
Аспирант

Аннотация
В статье анализируется сфера применимости инструментов теории информации, обосновываемая законами распределения случайных величин. Предлагается методика поиска оптимального количества резервирующих элементов электрической сети на основе метода множителей Лагранжа с учетом меры неопределенности информации.
Ключевые слова: мера неопределенности информации, теория информации, надежность, оптимизация, метод множителей Лагранжа, резервирование

Finding the optimal number of reserve elements by the method of Lagrange multipliers taking into account the measure of the information uncertainty

Karandeev Denis Jurevich
Katanov Khakass State University
Postgraduate

Kalugin Dmitry Anatolyevich
Katanov Khakass State University
Postgraduate

Abstract
The article analyzes the scope of application of information theory tools, justified by the laws of distribution of random variables. A method of finding the optimal number of reserve elements of the electrical network based on the method of Lagrange multipliers taking into account the measure of information uncertainty is offered.
Keywords: information uncertainty measure, information theory, reliability, optimization, Lagrange multipliers method, reservation

На сегодняшний день среди актуальных задач по повышению качества анализа функционирующих систем различного рода, в том числе электрических сетей, можно отметить разработку новаторских методик по анализу данных сетей. На практике довольно часто возникает такая ситуация, когда уже у построенной и функционирующей системы начинают отказывать те или иные элементы, в силу стохастических и неопределенных возмущений и воздействий на них извне. Говоря про надежность распределительных сетей стоит отметить, что в нашей стране аварийность данных сетей в 2-7 раз выше, чем в зарубежных странах, вызвано это безусловно климатической составляющей. При этом в случае возникновения отказов, влияющих на отсутствие электроснабжения тех или иных потребителей, данные отказы должны устранить за минимально возможное время в зависимости от категории надежности. Одним из методов максимально снижающих опасность долговременного отсутствия электроснабжения потребителей электроэнергии является добавление в систему резервирующих элементов, при этом количество данных резервирующих элементов напрямую зависит от категории надежности снабжаемого электроэнергией потребителя (I, II и III) [1]. Всё это свидетельствуют в пользу разработки новаторских методик по расчету количества резервирующих элементов с применением новых инструментов и методов в расчетах. Одним из перспективных направлений в этой сфере можно назвать применение теории информации.

Инструменты теории информации. По своей сути процессы «старения» аналогичные тем, что проходят в живой природе, в какой-то мере можно отнести и к неживой, в частности, к сложносформированным функционирующим системам, например техническим системам, в том числе электрическим сетям. Данные процессы подчиняются кибернетическому и синергетическому подходам [2-5], однако данные подходы не позволяют решить данную задачу в численном эквиваленте. Поэтому более подходящим подходом к решению данного рода задач можно назвать применение инструментов из такой области знаний, как теория информации [6]. К основным инструментам теории информации относят количество информации и меру неопределенности информации. Впервые данные понятия были сопоставлены в 1948 году Клодом Элвудом Шенноном в работе [7], при этом по наставлению Джона фон Неймана термин противоположный информации он назвал «информационная энтропия». С его подачи энтропия стала использоваться как мера полезной информации в процессах передачи сигналов по проводам. Хотя до сих пор данное именование меры вызывает споры, в особенности данный термин не признают физики, у которых термин энтропия никак не сочетается с математическими расчетами из других областей знаний. В связи с этим более рационально данный термин называть «мера неопределенности информации». Следует подчеркнуть, что под информацией Шеннон понимал полезные для получателя сигналы. Шум и помехи Шеннон считал бесполезными. Если выходные сигналы аналогичны входным сигналам, то это свидетельствует об отсутствии информационной энтропии. Отсутствие шума говорит о наличии максимума информации. Взаимосвязь энтропии и информации нашло отражение в формуле:

$H + I = 1,$

где H – информационная энтропия (мера неопределенности информации), I – количество информации.

Позже эту взаимосвязь количественно обосновал Леон Бриллюэн [8-9], при этом количество информации в его работах именуется негэнтропией (наличие отрицательной приставки нег- (от negative) свидетельствует о противоположности энтропии). В работе [10] приводится обоснование взаимосвязи энтропии с негэнтропией в случае изменения состояния технической системы. Для большей наглядности данную взаимосвязь можно представить в виде соотношения «Инь и Ян» (базовой и древнейшей философской концепции в Даосской традиции), представленной на рис. 1.

Рисунок 1 - Взаимосвязь неопределенности и информации

Суть данного соотношения заключается в том, что изменение одной составляющей обратно пропорционально влияет на другую. Формула для вычисления количества информации в случае различных вероятностей событий была выведена Клодом Шенноном в середине XX века путем обобщения формулы Ральфа Винтона Лайона Хартли [11], выведенная в 1928 г. формула которого была применима лишь для равновероятных событий. Формула Клода Шеннона [12] имеет следующий вид:

$$I = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i \text{ , при условии } \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \qquad (1)$$

где I – количество информации; p_i – вероятность появления события i=1,2,...n.

Однако сам Клод Шеннон относил применимость данной формулы лишь к областям передачи сигналов и кодирования. Позже была многократно подтверждена обширность применимости данного выражения, а советский ученый Евгений Александрович Седов в 1982 издал книгу «Одна формула и весь мир. Книга об энтропии» [13], в которой утверждается универсальность понятия формулы расчета информационной энтропии.

Обоснованность применения. Обоснованность применения меры неопределенности информации обуславливается тем, что практически все данные, которыми оперируют различного рода технические системы, являются в той или иной мере неопределенными, то есть для их анализа можно воспользоваться формулой, разработанной Клодом Шенноном, позволяющей снять данную неопределенность и выразить количество информации в количественном виде и тем самым разграничить показатели по качественному признаку. Второй же причиной обоснованности применимости меры неопределенности информации можно назвать то, что данные измерения подчиняются законам распределения случайных величин. В частности даже классические расчеты структурной надежности базируются на экспоненциальный законе, где в основании логарифма выступает число Непера *e*. На практике инструменты теории информации стали применять в большом спектре областей, таких как экономика [14, 15], цветная металлургия [16], физика [17], прогнозирование электропотребления [18-19] и т.д. Особо стоит отметить перспективность применимости меры неопределенности информации в задачах прогнозирования параметров гидроагрегатов [20].

Анализ структурной надежности электрической сети. В статье [21] было представлено представление технической системы в виде графа, в статье же [22] продемонстрирован проведенный анализ методов оптимизации, с целью выбора наиболее рационального для решения поставленной оптимизационной задачи, далее в статьях [23, 24] были представлены разработанные методы по анализу структурной надежности технической системы. В качестве возможного инструмента по выражению структурной надежности в количественном виде предлагается использовать меру неопределенности информации. Разграничение по качественному признаку структурной надежности осуществляется по модернизированной формуле Клода Шеннона [25]:

$$H_{\Sigma} = \sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i + \sum_{i=1}^{n} q_i \log_2 q_i, \qquad (2)$$

Расчет количества информации, содержащейся в структуре электрической сети позволяет проводить сравнительный анализ и выбирать более надежные структуры в случае осуществления поиска, который производит проектировщик, некоторые этапы методики поиска описана в статье [26]. Если же задача заключается в анализе уже функционирующей сети, то возникает потребность проведения анализа сети и выявления наиболее слабых мест, требующих добавления резервирующих элементов. Данного рода анализ продемонстрирован в статье [27, 28]. Рассмотрим пример.

Пусть дана распределительная сеть в виде графа на рис. 1. Необходимо определить величину меры неопределенности информации для участков 0-3 (ветви 0-1 и 1-3) и 0-2. Сопоставить полученные результаты с граничным значением энтропии электроприемников в вершинах 2 и 3. Исходные данные задачи: вероятности работоспособного состояния элементов – p_1= 0,999, p_2=0,95, p_3= 0,995 (p_4 не рассматривается в расчетах).

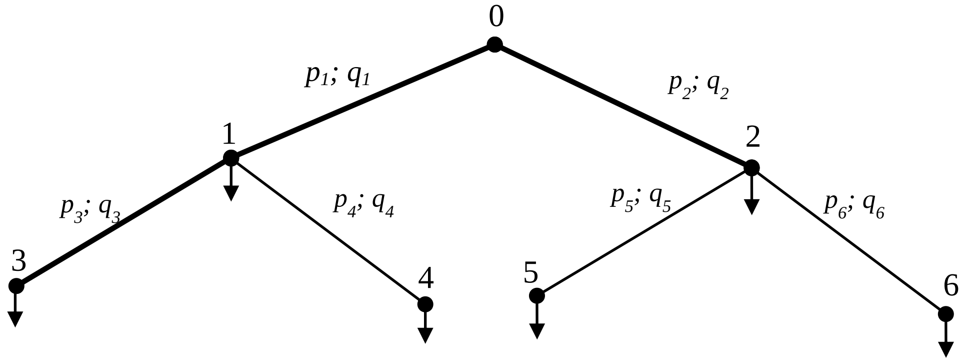

Рисунок 1 – Граф распределительной сети

Решение. Определим вероятности неработоспособного состояния элементов q_j=1-p_i: q_1= 0,001, q_2=0,05, q_3= 0,005.

Величины энтропии для выбранных нами элементов определим по выражениям: $H(p_i) = -p_i \log_2 p_i$; $H(q_i) = -q_i \log_2 q_i$.

Результат: $H(p_1) = 0.0014$; $H(q_1) = 0.01$; $H(p_2) = 0.0703$; $H(q_2) = 0.2161$; $H(p_3) = 0.0072$; $H(q_3) = 0.0382$.

Определим величины граничной энтропии для 2 и 3 электроприемников:

- примем граничные величины среднегодовой продолжительности неработоспособного состояния: для электроприемника 2 – M_{q2}=50 часов; для электроприемника 3 – M_{q3}= 100 часов. Также для работоспособного состояния: M_{p2}=T–M_{q2} = 8760–50 = 8710 часов; M_{p3}= 8660 часов;
- определим вероятности бесперебойного электроснабжения и допустимого отказа в электроснабжении:

- для электроприемника 2:

$p_2^0 = M_{p2}/T$ =8710/8760=0,9943; $q_2^0 = M_{q2}/T$ =50/8760=0,0057;

- для электроприемника 3:

$p_3^0 = M_{p3}/T$ =8660/8760=0,9886; $q_3^0 = M_{q3}/T$ =100/8760=0,0114;

- граничные величины энтропии:

- для электроприемника 2:

$$H^0(P_2) = -p_2^0 \log_2 p_2^0 = -0{,}9943 \log_2 0.9943 = 0.0082;$$

$$H^0(Q_2) = -q_2^0 \log_2 q_2^0 = -0.0057 \log_2 0.0057 = 0.0425.$$

- для электроприемника 3: $H^0(P_3) = 0.0164$; $H^0(Q_3) = 0.0736$.

Рассчитаем энтропию работоспособного или неработоспособного состояния для выбранных участков сети по (4) и (5):

- для работоспособного состояния участка 0-2: $H(P_{0-2}) = H(p_2) = 0.0703$;

- для неработоспособного состояния участка 0-2:

$H(Q_{0-2}) = H(q_2) = 0.2161$;

- для работоспособного состояния участка 0-3:

$$H(P_{0-3}) = p_3 H(p_1) + p_1 H(p_3) = 0.995 \cdot 0.0014 + 0.999 \cdot 0.0072 = 0.0086;$$

- для неработоспособного состояния участка 0-3:

$$H(Q_{0-3}) = H(q_1) + H(q_3) + (1-p_1)H(p_3) + (1-p_3)H(p_1) =$$
$$= 0.01 + 0.0382 + (1-0.999)\cdot 0.0072 + (1-0.995)\cdot 0.0014 = 0.0482.$$

Проверка выполненного расчета для участка 0-3:

$$H(P_{0-3}) + H(Q_{0-3}) = H(p_1) + H(q_1) + H(p_3) + H(q_3);$$
$$0.0086 + 0.0482 = 0.0014 + 0.01 + 0.0072 + 0.0382.$$

Сопоставление значений энтропии:

- для участка 0-2: $H(P_{0-2}) > H^0(P_2),\ H(Q_{0-2}) > H^0(Q_2)$;

- для участка 0-3: $H(P_{0-3}) < H^0(P_3);\ H(Q_{0-3}) < H^0(Q_3)$.

Из сопоставления значений энтропии между собой видно: условия по надежности для участка 0-3 распределительной сети выполняются, а для – 0-2 не выполняются. Следовательно, на участке 0-3 работу по обеспечению заданного уровня надежности следует признать удовлетворительной, на участке 0-2 – неудовлетворительной. На этом участке необходимо принять ряд мер по предупреждению непредвиденных ситуаций и устранению нежелательных последствий.

В статьях [26-28] было сформировано ограничение с учетом резервирующих элементов, формула которого представлена далее:

$$\begin{cases} q_1^{x_1} \log_2 q_1 \le H^0(Q_1); \\ \dots\dots\dots\dots \\ q_j^{x_j} \log_2 q_j \le H^0(Q_j); \\ \dots\dots\dots\dots \\ q_n^{x_n} \log_2 q_n \le H^0(Q_n); \end{cases} \qquad x_j \ge 0,\ j = 1,2,\dots,n, \tag{3}$$

Целевая же функция имеет следующий вид:

$$C(x_j) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min, \tag{4}$$

Однако, как видно, здесь отсутствует методика расчета количества резервирующих элементов. Важно понимать, что каждый резервирующих элемент приводит к лишним экономическим издержкам, поэтому очень важно правильно рассчитать минимально требуемое количество данных элементов, но при этом чтобы они позволяли удерживать систему на требуемом уровне надежности.

Поиск оптимального количества резервирующих элементов электрической сети посредством метода множителей Лагранжа. Как было упомянуто ранее одним из важных моментов при анализе структуры функционирующей системы является добавление резервирующих элементов в систему. Данное добавление обосновывается тем, что есть вероятность, что степень надежности системы будет не на достаточно высоком уровне. Продемонстрируем пример определения количества резервирующих элементов методом множителей Лагранжа, при этом для применения данного метода нужно учесть следующее допущение – ограничения представляют собой уравнение, а не неравенства.

Допустим у нас два последовательно соединенных элемента, в таком случае целевая функция и ограничение примут следующий вид:

$C(x_1) = c_1 x_1 + c_2 x_2$, зададим: c = 200 тыс. рублей,

$q_1^{x_1} \log_2 q_1 = H^0(Q_1)$, зададим: q_1 = 0.081, и q_2 = 0.082.

Примем граничные величины среднегодовой продолжительности неработоспособного состояния: для электроприемника 1 – M_{q1}= 80 часов.

Определим вероятности бесперебойного электроснабжения и допустимого отказа в электроснабжении:

- для электроприемника 1:

$p_1^0 = M_{p1} / T$ =8680/8760=0.9909; $q_1^0 = M_{q1} / T$ =0.009;

$H^0(Q_1) = -q_1^0 \log_2 q_1^0 = -0.009 \log_2 0.009 = 0.0612$..

$$C(x_j) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min,$$

$$-0.081^{x_1} \log_2 0.081 - 0.082^{x_2} \log_2 0.082 = 0.0612;$$

$$0.081^{x_1} \cdot 3.62 + 0.082^{x_2} \cdot 3.6 = 0.0612;$$

$$3.62 \cdot (0.081^{x_1} + 0.082^{x_2}) = 0.0612;$$

$$0.081^{x_1} + 0.082^{x_2} = 0.017.$$

Формула Лагранжа примет следующий вид:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = 200 \cdot x_1 + 200 \cdot x_2 + \lambda \cdot (0.081^{x_1} + 0.082^{x_2} - 0.017).$$

Далее дифференцируем по всем неизвестным и находим λ, вычисляем количество резервов, если их будет по 2 возможных резерва, то находим тот, который будет при минимуме затрат:

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_1} = 200 + \lambda \cdot (0.081^{x_1})' = 0$$

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_2} = 200 + \lambda \cdot (0.081^{x_2})' = 0$$

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial \lambda} = 0.081^{x_1} + 0.082^{x_2} - 0.017 = 0$$

$$L'(x_1) = 200 + (\lambda \cdot 0.08^{x_1})' = 0$$

$$L'(x_2) = 200 + (\lambda \cdot 0.082^{x_2})' = 0$$

$$L'(\lambda) = -0.082^{x_1} + 0.017 - 0.081^{x_2} + 0.018 = 0$$

$$L'(x_1) = 200 + (\lambda \cdot 0.081^{x_1})' = 0$$

$$\lambda \cdot (0.081^{x_1})' = -200$$

$$(0.081^{x_1})' = \frac{-200}{\lambda}$$

$$0.081^{x_1} \cdot \ln(0.081) = \frac{-200}{\lambda}$$

$$0.081^{x_1} = \frac{-79.5}{\lambda}$$

$$x_1 = \log_{0.08} 80 / \lambda$$

$$L'(x_2) = 200 + (\lambda \cdot 0.082^{x_2})' = 0$$

$$\lambda \cdot (0.082^{x_2})' = -200$$

$$(0.082^{x_2})' = \frac{-200}{\lambda}$$

$$0.082^{x_2} \cdot \ln(0.082) = \frac{-200}{\lambda}$$

$$0.082^{x_2} = \frac{-80}{\lambda}$$

$$x_2 = \log_{0.082} 80/\lambda$$

$$-0.082^{x^1} + 0.017 - 0.081^{x^2} + 0.018 = 0$$

Подставляем x_1 и x_2 и находим λ:

$$-0.08^{\log_{0.08}\frac{80}{\lambda}} + 0.017 - 0.082^{\log_{0.082}\frac{80}{\lambda}} + 0.018 = 0;$$

$$-\frac{80}{\lambda} + 0.017 - \frac{80}{\lambda} + 0.018 = 0$$

$$-\frac{160}{\lambda} = -0.034$$

$$\lambda = \frac{160}{0.034} = 4705.$$

Подставляем и находим x_1 и x_2:

$$x_1 = \log_{0.08} 80/\lambda = \log_{0.08} 0.017 = 1.613 \approx 2$$

$$x_2 = \log_{0.082} 80/\lambda = \log_{0.082} 0.017 = 1.629 \approx 2$$

Таким образом необходимое количество резервирующих элементов составляет 2.

Стоит отметить, что данное решение применимо лишь в том случае, когда в качестве ограничений выступают равенства, если же в качестве ограничений выступают неравенства, то необходимо воспользоваться теоремой Куна-Таккера и найти седловую точку функции Лагранжа.

Заключение. В результате можно констатировать, что сфера применимости меры неопределенности информации не ограничивается лишь областью теории информации, всё большее количество областей начинают применять её в решении своих задач. Проводимые исследования в области разработки методов по анализу структурной надежности электрической сети позволяют сделать вывод о возможностях выражения в количественном виде структурной надежности через меру неопределенности информации. Данное выражение позволяет проводить анализ структуры сети и выявлять наименее надежные участки. Разработанный же метод на основе метода множителей Лагранжа позволяет рассчитать оптимальное количество резервирующих элементов, необходимое для поддержания системы на требуемом уровне надежности.

Работа выполнена при поддержке Фонда содействия инновациям по программе "УМНИК" в рамках договора № 13138ГУ/2018 от 23.05.2018.

Библиографический список

1. Правила устройства электроустановок (ПУЭ), 2001 - 2004 г.г.
2. Винер Н. Кибернетика, или Управление и связь в животном и машине. М.: Советское радио, 1968.
3. Шаповалов В.И., Казаков Н.В. Законы синергетики и глобальные тенденции // Общественные науки и современность. 2002. №3. С. 141-148.
4. Чернавский Д. С. Синергетика и информация. Динамическая теория хаоса, М.: Наука, 2001. 105 с.
5. Колесников А.А. Синергетические методы управления сложными системами: Энергетические системы. М.: КомКнига, 2006.
6. Cover, Thomas M. and Joy A. Thomas. “Elements of Information Theory, second edition”, New Jersey: Wiley and Sons. 2006.
7. Shannon, C.E. “Mathematical Theory of Communication”, Bell System Tech. J., 1948, no. 27, pt. I., 379–423; pt. II., 623–656.
8. Бриллюэн Л. Наука и теория информации. М.: Наука, 1960. 392 с..
9. Бриллюэн Л. Научная неопределённость и информация. Пер. с англ. Изд.3. URSS. 2010. 272 с.
10. Dulesov A. S., Karandeev D. Y., Krasnova T. G. The evaluation of the correlation between entropy and negentropy in the structure of a technical system // MATEC Web Conf. International Conference on Modern Trends in Manufacturing Technologies and Equipment (ICMTMTE 2017). 2017. Т. 129. С. 1-4.
11. Hartley R.V.L. Transmission of Information // Bell System Technical Journal. 1928. Т. 7. №3. С. 535–563.
12. Shannon C.E. Communication Theory of Secrecy Systems // Bell System Technical Journal. 1949. Т. 28. С. 656-715.
13. Седов Е. А. Одна формула и весь мир: кн. об энтропии. М.: Знание, 1982. 175 с.
14. Попков А. Ю. Энтропийная модель инвестиционного портфеля // Автомат. и телемех. 2006. №9. С. 179–190.
15. Попова О. А. Анализ новых подходов к представлению неопределенности в данных для крупномасштабных систем // Управление развитием крупномасштабных систем MLSD'2015. С. 385-388.
16. Малышев В. П., Кажикенова С. Ш. Информационные оценки технологических переделов в цветной металлургии // Вестник Национальной инженерной академии наук. 2009. №2(32). С. 126-131.
17. Хармут Х. Применение методов теории информации в физике. М.: Мир, 1989. 334 с.
18. Андросик А. Б., Вологдин В. Н., Воробьев С. А. и др. Неопределенность информации в задаче прогнозирования: монография // Информационные технологии: приоритетные направления развития: Книга 7. Новосибирск: ЦРНС Из-во «Сибпринт», 2012. 176 с.
19. Хрусталев В. И. Мера неопределенности информации в задаче выбора прогнозных решений: Автореф. дис. … канд. техн. наук: 05.13.01. Абакан,

2012. 23 с.
20. Захарченко В. Е. Оценка достоверности информационного обеспечения АСУТП гидроагрегата на основе функционально-ориентированных нечётких математических моделей: Автореф. дис. … канд. техн. наук: 05.13.06. Самара, 2011. 20 с.
21. Карандеев Д.Ю. Проблематика осуществления имитационного моделирования распределительной сети // IV научно-практическая международная конференция молодых ученых «Прикладная математика и информатика: современные исследования в области естественных и технических наук». Ч.1. Секция II «Математическое моделирование в научных, технических и социально-экономических исследованиях». – Тольятти, 2018. С. 352-358.
22. Карандеев Д.Ю. Анализ методов оптимизации для решения задачи построения оптимальных структур технических систем // IV научно-практическая международная конференция молодых ученых «Прикладная математика и информатика: современные исследования в области естественных и технических наук». Ч.1. Секция I «Теоретические основы информационных технологий». Тольятти, 2018. С. 53-59.
23. Дулесов А.С., Карандеев Д.Ю. Построение оптимальной структуры технической системы методом «ветвей и границ» с учетом критериев экономичности и надежности // Надежность и безопасность энергетики. 2016. № 2 (33). С. 56-59.
24. Карандеев Д.Ю. Инструменты теории информации в задачах повышения надежности распределительных электрических сетей // Проспект Свободный – 2017. Материалы научной конференции, посвященной Году экологии в Российской Федерации, ХТИ - филиал СФУ, 2017 г. С. 9-13.
25. Дулесов А.С., Дулесова Н.В., Карандеев Д.Ю. Показатель разграничения уровня надежности технической системы по качественному признаку: энтропийный подход // Журнал «Фундаментальные исследования». 2016. № 2, (часть 3). С. 477-481.
26. Dulesov A.S., Karandeev D.J., Dulesova N.V. Optimal redundancy of radial distribution networks by criteria of reliability and information uncertainty // 3nd International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM). 2017. C. 1-4.
27. Dulesov A. S., Karandeev D. Y., Dulesova N. V. Reliability analysis of distribution network of mining enterprises electrical power supply based on measure of information uncertainty // IOP Conference Series: Earth and Environmental Science (EES). 2017. Т. 87. С. 1-6.
28. Карандеев Д. Ю. Учёт количества информации в задачах построения оптимальных структур распределительных сетей с резервированием // Вестник Хакасского государственного университета им. Н.Ф. Катанова, 2017. № 20. С. 16-19.