УДК 512.5

Суммы квадратов подматриц: множество невозможных сумм квадратов

Попов Иван Николаевич
Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова
к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры математики

Аннотация
В работе изложены результаты по исследованию сумм квадратов матриц как подматриц матрицы с неотрицательными целыми числами, составленные из соседних строк и столбцов. Акцентируется внимание на свойства множества невозможных сумм квадратов, элементы которого есть числа, которые не могут быть суммами квадратов. Выявлены условия, при которых множество является непустым, установлена его симметричность и симметричность величины, равной количеству квадратов определенной суммы, относительно середины отрезка возможных значений сумм квадратов матрицы.
Ключевые слова: матрица, подматрица, квадрат матрицы.

The sum of the squares of the submatrices: set of missing elements

Popov Ivan Nikolaevich
Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov
Candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, associate professor of the Department of Mathematics

Abstract
The paper presents the results of the study of sums of matrix squares as sub-matrices of a matrix with non-negative integers composed of adjacent rows and columns. Attention is paid to the properties of the set of impossible sums of squares, the elements of which are numbers that cannot be sums of squares. The conditions under which the set is non-empty are revealed, its symmetry and symmetry of the value equal to the number of squares of a certain sum, relative to the middle of the segment of possible values of the sums of squares of the matrix are established.
Keywords: matrix, submatrix, square matrix.

Введение

Пусть A – числовая матрица размерности $m \times n$. Подматрица

$$A(i,s;\ i,t;\ j,s;\ j,t) = \begin{pmatrix} a_{is} & a_{it} \\ a_{js} & a_{jt} \end{pmatrix}$$

матрицы A, где $1 \le i < j \le m$ и $1 \le s < t \le n$, называется квадратом. Число

$$\operatorname{sum}(A(i,s;\ i,t;\ j,s;\ j,t))=\frac{a_{is}+a_{it}+a_{js}+a_{jt}}{2}$$

называется суммой квадрата $A(i,s;\ i,t;\ j,s;\ j,t)$.

Символом $v(\operatorname{sum})$ обозначим количество квадратов матрицы A, суммы которых равны числу sum.

Величина $v(\operatorname{sum})$ называется симметричной, если для некоторого числа a справедливо равенство $v(2a-\operatorname{sum})=v(\operatorname{sum})$ для всех чисел sum.

Числовыми характеристиками квадратов матрицы являются:

- наименьшее $\operatorname{sum}_{\min}$ и наибольшее $\operatorname{sum}_{\max}$ значения сумм квадратов;
- множество значений сумм квадратов $\operatorname{sum}\in[\operatorname{sum}_{\min};\operatorname{sum}_{\max}]$;
- множество значений величины $v(\operatorname{sum})$ при $\operatorname{sum}\in[\operatorname{sum}_{\min};\operatorname{sum}_{\max}]$;
- симметричность величины $v(\operatorname{sum})$ на отрезке $[\operatorname{sum}_{\min};\operatorname{sum}_{\max}]$.

Пусть R – матрица размерности $m\times n$, в которой числа от 0 до $mn-1$ расставлены следующим образом:

$$R_{m\times n}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & j & \dots & n-1 \\ n & n+1 & \dots & n+j & \dots & n+(n-1) \\ 2n & 2n+1 & \dots & 2n+j & \dots & 2n+(n-1) \\ \dots & & & & & \\ (i-1)n & (i-1)n+1 & \dots & (i-1)n+j & \dots & (i-1)n+(n-1) \\ \dots & & & & & \\ (m-1)n & (m-1)n+1 & \dots & (m-1)n+j & \dots & (m-1)n+(n-1) \end{pmatrix}.$$

В работах [1, 2, 3, 5] изложены результаты исследований сумм квадратов матрицы R.

В матрице R выделим подматрицу $R(w;u;v)$, состоящую из элементов последовательных ее строк и столбцов, размерности $u\times v$, где $2\le u\le m$ и $2\le v\le n$,

$$R_{u\times v}(w;u;v)=$$

$$=\begin{pmatrix} w & w+1 & \dots & w+j & \dots & w+(v-1) \\ n+w & n+w+1 & \dots & n+w+j & & n+w+(v-1) \\ 2n+w & 2n+w+1 & \dots & 2n+w+j & & 2n+w+(v-1) \\ \dots & & & & & \\ (i-1)n+w & (i-1)n+w+1 & \dots & (i-1)n+w+j & & (i-1)n+w+(v-1) \\ \dots & & & & & \\ (u-1)n+w & (u-1)n+w+1 & \dots & (u-1)n+w+j & \dots & (u-1)n+w+(v-1) \end{pmatrix},$$

где $0\le i\le u-1$ и $0\le j\le v-1$.

Область изменения чисел u и v зависит от числа w. Число w может принадлежать с 1 по $m-1$ строке и с 1 по $n-1$ столбцу. Разделим число w на число n с остатком: $w = nq + r$. Поэтому число w расположено в $q+1$ строке и $r+1$ столбце матрице R. Тогда

$$2 \le u \le m - q \text{ и } 2 \le v \le n - r,$$

где $0 \le q \le m-2$ и $0 \le r \le n-2$.

Для матрицы $R(w;u;v)$ справедливо:

- $R(w;u;v)_{ij} = (i-1)n + (j-1) + w$,
- $R(w;u;v)(i_1, j_1;\ i_1, j_2;\ i_2, j_1;\ i_2, j_2) =$
$$= \begin{pmatrix} (i_1-1)n + (j_1-1) + w & (i_1-1)n + (j_2-1) + w \\ (i_2-1)n + (j_1-1) + w & (i_2-1)n + (j_2-1) + w \end{pmatrix},$$
- $\mathrm{sum}(R(w;u;v)(i_1, j_1;\ i_1, j_2;\ i_2, j_1;\ i_2, j_2)) =$
$$= R(w;u;v)_{i_1,j_1} + R(w;u;v)_{i_2,j_2} = R(w;u;v)_{i_1,j_2} + R(w;u;v)_{i_2,j_1},$$
- $\mathrm{sum}(R(w;u;v)(i_1, j_1;\ i_1, j_2;\ i_2, j_1;\ i_2, j_2)) =$
$$= (i_1 + i_2)n + (j_1 + j_2) + 2(w - n - 1),$$

где $1 \le i \le u$ и $1 \le j \le v$, $1 \le i_1 < i_2 \le u$ и $1 \le j_1 < j_2 \le v$. Здесь i, i_1, i_2 – номера строк матрицы $R(w;u;v)$, j, j_1, j_2 – номера ее столбцов. Обозначив $x = i_1 + i_2$ и $y = j_1 + j_2$, получаем формулу для вычисления сумм квадратов матрицы

$$\mathrm{sum} = nx + y + 2(w - n - 1),\ 3 \le x \le 2u - 1,\ 3 \le y \le 2v - 1.$$

Заметим, что суммы квадратов матрицы $R(w;u;v)$ есть целые числа.

Для матрицы $R(w;u;v)$ так же справедливо следующее:

$$\mathrm{sum}_{\min} = (1+2)n + (1+2) + 2(w - n - 1) = n + 2w + 1,$$

$$\mathrm{sum}_{\max} = ((u-1) + u)n + ((v-1) + v) + 2(w - n - 1) = 2(un + v + w) - 3(n+1),$$

то есть

$$\mathrm{sum}_{\min} = n + 2w + 1,\ \mathrm{sum}_{\max} = 2(un + v + w) - 3(n+1).$$

Отрезок $[\mathrm{sum}_{\min}; \mathrm{sum}_{\max}]$ для матрицы $R(w;u;v)$ назовем отрезком возможных значений сумм ее квадратов. Очевидно, что вне этого отрезка величина $v(\mathrm{sum})$ равна 0.

1. Множество не возможных сумм квадратов матрицы $R(w;u;v)$

Множество значений, которые не могут принимать суммы квадратов матрицы $R(w;u;v)$ из отрезка $[\mathrm{sum}_{\min}; \mathrm{sum}_{\max}]$, обозначим $ME(R(w;u;v))$ (сокращенное от Missing elements). Другими словами,

$$ME(R(w;u;v)) = \{\mathrm{sum} \in [\mathrm{sum}_{\min}; \mathrm{sum}_{\max}] \mid v(\mathrm{sum}) = 0\}.$$

Определим количество элементов во множестве $ME(R(w;u;v))$.

Количество целых чисел в отрезке $[\mathrm{sum}_{\min}; \mathrm{sum}_{\max}]$ равно

$$\mathrm{sum}_{\max} - \mathrm{sum}_{\min} + 1 = 2n(u-2) + 2(v-2) + 1.$$

Видим, что количество чисел в этом отрезке не зависит от числа w, а зависит от размерности подматрицы $R(w;u;v)$.

Так как $3 \le i_1 + i_2 \le 2u - 1$ и $3 \le j_1 + j_2 \le 2v - 1$, то суммы $i_1 + i_2$ и $j_1 + j_2$ могут принимать $2u - 3$ и $2v - 3$ целочисленных значений соответственно, и по формуле $(i_1+i_2)n+(j_1+j_2)+2(w-n-1)$ можно получить $(2u-3)(2v-3)$ целых чисел.

Множество $ME(R(w;u;v))$ является не пустым, если

$$\text{sum}_{\max}-\text{sum}_{\min}+1>(2u-3)(2v-3).$$

Заметим, что $(\text{sum}_{\max}-\text{sum}_{\min}+1)-(2u-3)(2v-3)=2(n+3-2v)(u-2)$. Тогда множество $ME(R(w;u;v))$ является не пустым, если $2(n+3-2v)(u-2)>0$.

Итак,

$$|ME(R(w;u;v))|=\begin{cases} 0, & 2(n+3-2v)(u-2)\le 0; \\ 2(n+3-2v)(u-2), & 2(n+3-2v)(u-2)>0. \end{cases}$$

Множество $ME(R(w;u;v))$ состоит из четного количества чисел.

Видим, что $ME(R(w;u;v))\ne\varnothing$, если

$$\begin{cases} n+3-2v>0, \\ u-2>0, \\ 2\le v\le n-r, \\ 2\le u\le m-q \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} v<(n+3)/2, \\ 2\le v\le n-r, \\ 2<u\le m-q, \end{cases}$$

где $w=nq+r$, $0\le r\le n-1$.

Заметим, что $ME(R(w;2;v))=\varnothing$ для допустимых значений w и v.

Фиксируя параметр $u\ge 3$, получаем, что величина $2(n+3-2v)(u-2)$ принимает наибольшее значение при $v=2$, равное $2(n-1)(u-2)$, которое положительно. Отсюда множество $ME(R(w;u;2))$ содержит наибольшее количество элементов по сравнению со всеми остальными непустыми множествами $ME(R(w;u;v))$.

Пусть $ME(R(w;u;v))\ne\varnothing$ и $ME(R(w;u;v+1))\ne\varnothing$. Тогда

$$|ME(R(w;u;v+1))|=2(n+3-2(v+1))(u-2)=2(n+3-2v)(u-2)-4(u-2),$$

то есть

$$|ME(R(w;u;v+1))|=|ME(R(w;u;v))|-4(u-2).$$

Следовательно, количество чисел во множестве $ME(R(w;u;v))$ убывает при увеличении параметра v на единицу на одну и ту же величину $4(u-2)$.

Отметим, что если $\text{sum}\in ME(R(w;u;v+1))$, то $\text{sum}\in ME(R(w;u;v))$, значит, $ME(R(w;u;v+1))\subseteq ME(R(w;u;v))$, следовательно,

$$ME(R(w;u;v))\subseteq ME(R(w;u;2))$$

для всех допустимых значений параметра u.

Если $v=2$, то формула для вычисления сумм квадратов матрицы $R(w;u;v)$ примет вид

$$\text{sum}=nx+y+2(w-n-1)=n(x-2)+2w+1,$$

так как $3\le y\le 2v-1$ и поэтому $y=3$. Придавая x целые значения из отрезка $[3;2u-1]$, получаем множество значений сумм квадратов матрицы $R(w;u;v)$

$$\{n+2w+1;2n+2w+1;\ldots;(2u-3)n+2w+1\}.$$

Тогда

$$ME(R(w;u;2))=$$
$$=[n+2w+1;2(un+v+w)-3(n+1)]\setminus\{n+2w+1;2n+2w+1;\ldots;(2u-3)n+2w+1\}.$$

При $u\ge 3$ справедливо равенство

$$|ME(R(w;u;2))|=2(n-1)(u-2).$$

2. Симметричность величины $v(\mathrm{sum})$

Серединой отрезка $[\mathrm{sum}_{\min};\mathrm{sum}_{\max}]$ является число

$$\frac{\mathrm{sum}_{\min}+\mathrm{sum}_{\max}}{2}=\frac{2(un+v+w)-3(n+1)+n+2w+1}{2}=n(u-1)+(v-1)+2w.$$

Пусть sum_1 и sum_2 – числа, симметричные относительно середины отрезка $[\mathrm{sum}_{\min};\mathrm{sum}_{\max}]$, то есть относительно числа $n(u-1)+(v-1)+2w$. Тогда

$$\mathrm{sum}_1+\mathrm{sum}_2=2(n(u-1)+(v-1)+2w).$$

Рассмотрим уравнения с ограничениями на переменные:

$$\begin{cases} nx_1+y_1+2(w-n-1)=\mathrm{sum}_1, \\ nx_2+y_2+2(w-n-1)=\mathrm{sum}_2, \\ 3\le x_1\le 2u-1,\ 3\le x_2\le 2u-1, \\ 3\le y_1\le 2v-1,\ 3\le y_2\le 2v-1. \end{cases}$$

Так как $\mathrm{sum}_2=-\mathrm{sum}_1+2(n(u-1)+(v-1)+2w)$, то

$$\begin{cases} n(x_1-2)+(y_1-2)=\mathrm{sum}_1-2w, \\ n(2u-x_2)+(2v-y_2)=\mathrm{sum}_1-2w, \\ 1\le x_1-2\le 2u-3,\ 1\le 2u-x_2\le 2u-3, \\ 1\le y_1-2\le 2v-3,\ 1\le 2v-y_2\le 2v-3. \end{cases}$$

Учитывая, что x_1-2 и $2u-x_2$, так же как и y_1-2 и $2v-y_2$, принадлежат одному и тому же отрезку, то заключаем, что уравнение

$$n(x_1-2)+(y_1-2)=\mathrm{sum}_1-2w$$

имеет столько же решений, что и уравнение

$$n(2u-x_2)+(2v-y_2)=\mathrm{sum}_1-2w.$$

Значит, уравнения

$$nx_1+y_1+2(w-n-1)=\mathrm{sum}_1 \text{ и } nx_2+y_2+2(w-n-1)=\mathrm{sum}_2$$

имеют одинаковое количество решений при ограничениях

$$\begin{cases} 3\le x_1\le 2u-1,\ 3\le x_2\le 2u-1, \\ 3\le y_1\le 2v-1,\ 3\le y_2\le 2v-1. \end{cases}$$

Между парами переменных x_1, x_2 и y_1, y_2 устанавливается связь:

$$x_1-2=2u-x_2 \text{ и } y_1-2=v-y_2$$

или

$$x_2=2u+2-x_1 \text{ и } y_2=2v+2-y_1.$$

Итак, справедливо равенство

$$v(\mathrm{sum})=v(2(n(u-1)+(v-1)+2w)-\mathrm{sum}),\quad \mathrm{sum}\in[\mathrm{sum}_{\min};\mathrm{sum}_{\max}].$$

Поэтому величина $v(\mathrm{sum})$ симметрична относительно середины отрезка $[\mathrm{sum}_{\min};\mathrm{sum}_{\max}]$.

Получаем: если $v(\mathrm{sum})=0$, то $v(2(n(u-1)+(v-1)+2w)-\mathrm{sum})=0$, или если $\mathrm{sum}\in ME(R(w;u;v))$, то $2(n(u-1)+(v-1)+2w)-\mathrm{sum}\in ME(R(w;u;v))$. Следовательно, множество $ME(R(w;u;v))$ симметрично относительно числа $n(u-1)+(v-1)+2w$.

Пример. Рассмотрим матрицу $R_{5\times 12}$,

$$R_{5\times 12}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 \\ 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 29 & 30 & 31 & 32 & 33 & 34 & 35 \\ 36 & 37 & 38 & 39 & 40 & 41 & 42 & 43 & 44 & 45 & 46 & 47 \\ 48 & 49 & 50 & 51 & 52 & 53 & 54 & 55 & 56 & 57 & 58 & 59 \end{pmatrix}.$$

Пусть $w=14$. Разделим число w на число n с остатком: $14=12\cdot 1+2$, $q=1$ и $r=2$. Тогда $ME(R(14;u;v))\neq\varnothing$, если

$$\begin{cases} v<(12+3)/2, \\ 2\le v\le 12-2, \\ 2<u\le 5-1, \end{cases} \quad \begin{cases} v\le 7, \\ 2\le v\le 10, \\ 2<u\le 4, \end{cases}$$

то есть $v\in\{2;3;4;5;6;7\}$ и $u\in\{3;4\}$.

При $u=3$ количество чисел во множестве $ME(R(14;3;v))$ убывает на величину, равную $4(u-2)=4$; при $u=4$ количество элементов во множестве $ME(R(14;4;v))$ убывает на величину, равную $4(u-2)=8$.

Наибольшее количество элементов содержат множества $ME(R(14;3;2))$ и $ME(R(14;4;2))$ при фиксированных $u=3$ и $u=4$ соответственно:

$$|ME(R(14;3;2))|=2(n-1)(u-2)=2(12-1)(3-2)=22,$$
$$|ME(R(14;4;2))|=2(n-1)(u-2)=2(12-1)(4-2)=44.$$

Получаем таблицу 1 с данными о количестве элементов во множестве $ME(R(14;u;v))$ для определенных значений u и v.

Таблица 1 – Число элементов множества $ME(R(14;u;v))$

u/v	2	3	4	5	6	7
3	22	18	14	10	6	2
4	44	36	28	20	12	4

Суммы квадратов матрицы

$$R(14;3;2)=\begin{pmatrix} 14 & 15 \\ 26 & 27 \\ 39 & 39 \end{pmatrix}$$

могут принимать значения, которые вычисляются по формуле:

$$\mathrm{sum} = n(x-2) + 2w + 1 = 12(x-2) + 29,\ 3 \le x \le 5.$$

Конкретно, суммы могут принимать значения 41, 53 и 65. Так как в этом случае отрезок возможных значений сумм квадратов матрицы $R(14;3;2)$ совпадает с отрезком $[41;65]$, то множество $ME(R(14;3;2))$ имеет вид

$$ME(R(14;3;2)) = [41;65] \setminus \{41;53;65\} =$$

$$= \{42;43;44;45;46;47;48;49;50;51;52;54;55;56;57;58;59;60;61;62;63;64\}.$$

Рассмотрим подматрицу $R(14;3;5)$ матрицы $R_{5\times 12}$,

$$R(14;3;5) = \begin{pmatrix} 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 26 & 27 & 28 & 29 & 30 \\ 38 & 39 & 40 & 41 & 42 \end{pmatrix}.$$

Отрезком возможных значений сумм квадратов матрицы $R(14;3;5)$ является отрезок $[41;71]$ с серединой 56. В таблице 2 представлены данные по суммам и количествам сумм определенной величины, на рисунке 1 – графическое представление данных этой таблицы.

Таблица 2 – Суммы квадратов и число квадратов с данной суммой

sum	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56
v(sum)	1	1	2	2	2	1	1	0	0	0	0	0	1	1	2	2
sum	71	70	69	68	67	66	65	64	63	62	61	60	59	58	57	56
v(sum)	1	1	2	2	2	1	1	0	0	0	0	0	1	1	2	2

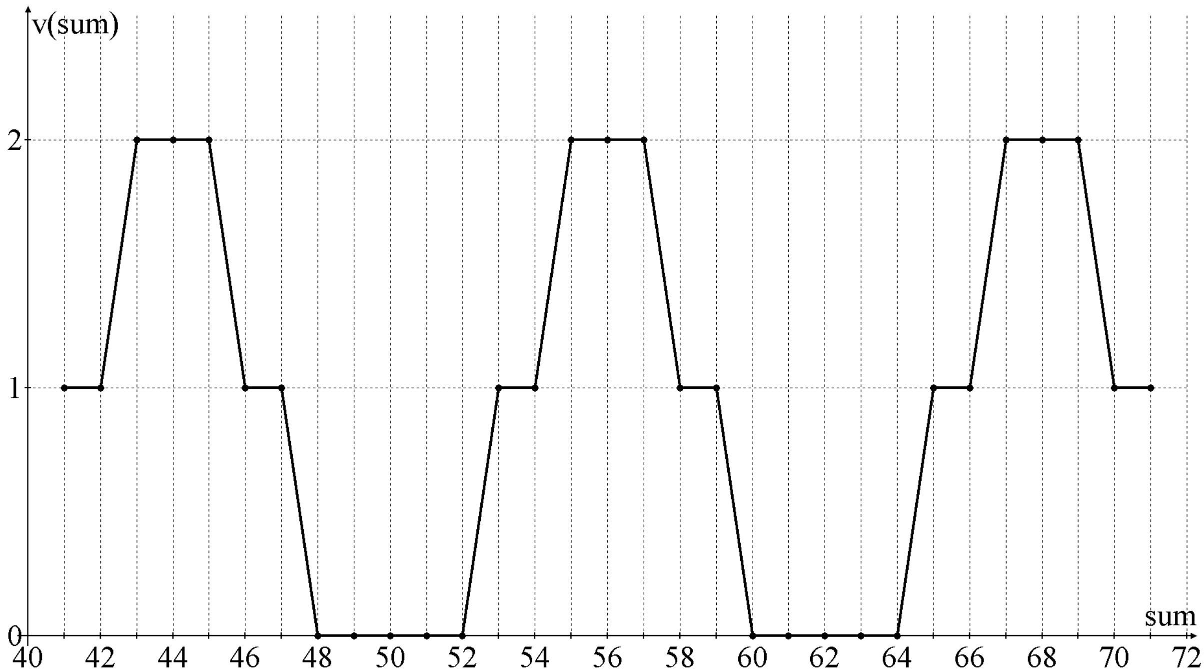

Рисунок 1 – Графическое представление данных таблицы 2

Суммы квадратов матрицы $R(14;3;5)$ не могут принимать значения из множества $\{48;49;50;51;52;60;61;62;63;64\} \subset [41;71]$.

Величина $v(\text{sum})$ симметрична относительно числа 56.

Для матрицы $R_{5\times 12}$ справедлива цепочка включений:

$$ME(R(14;3;7)) \subset ME(R(14;3;6)) \subset ME(R(14;3;5)) \subset ME(R(14;3;4)) \subset$$
$$\subset ME(R(14;3;3)) \subset ME(R(14;3;2));$$

- $ME(R(14;3;7)) = \{52;64\}$;
- $ME(R(14;3;6)) = \{50;51;52;62;63;64\}$;
- $ME(R(14;3;5)) = \{48;49;50;51;52;60;61;62;63;64\}$;
- $ME(R(14;3;4)) = \{46;47;48;49;50;51;52;58;59;60;61;62;63;64\}$;
- $ME(R(14;3;3)) = \{44;45;46;47;48;49;50;51;52;56;57;58;59;60;61;62;63;64\}$.

Для матрицы

$$R(14;3;7) = \begin{pmatrix} 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 26 & 27 & 28 & 29 & 30 & 31 & 32 \\ 38 & 39 & 40 & 41 & 42 & 43 & 44 \end{pmatrix},$$

получаем следующие числовые характеристики ее квадратов, отраженные в таблице 3 и на рисунке 2. Отрезком возможных значений является $[41;75]$.

Таблица 3 – Суммы квадратов и число квадратов с данной суммой

sum	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58
$v(\text{sum})$	1	1	2	2	3	3	3	2	2	1	1	0	1	1	2	2	3	3
sum	75	74	73	72	71	70	69	68	67	66	65	64	63	62	61	60	59	58
$v(\text{sum})$	1	1	2	2	3	3	3	2	2	1	1	0	1	1	2	2	3	3

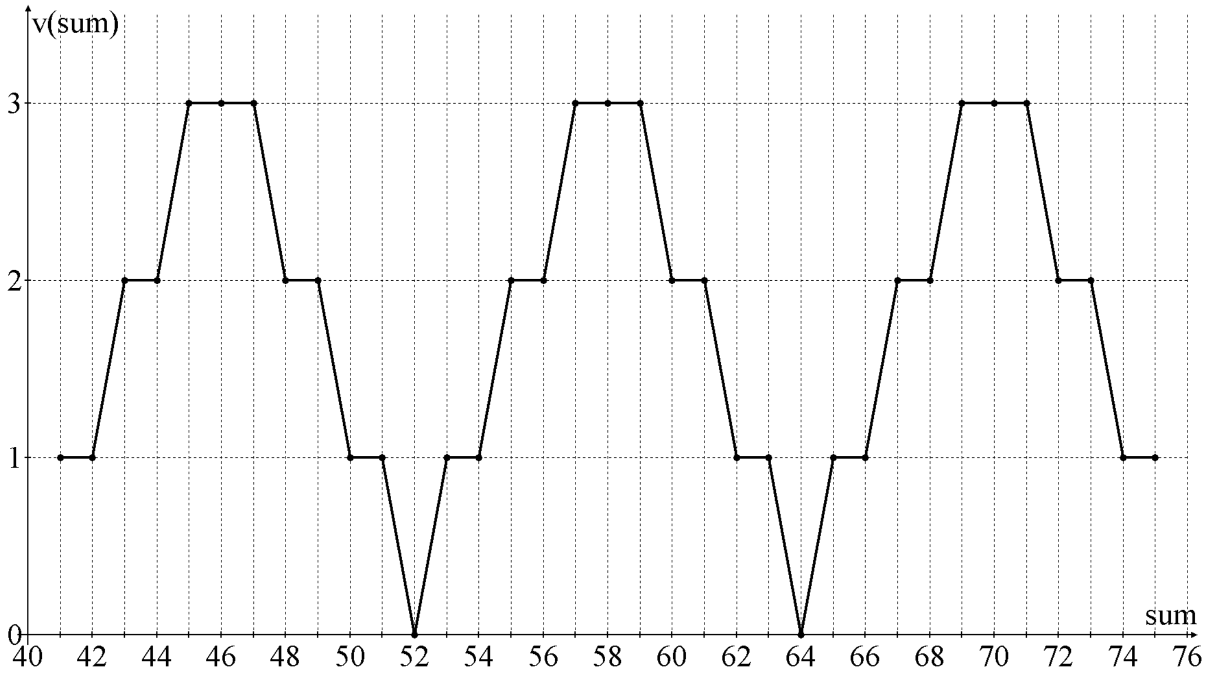

Рисунок 2 – Графическое представление данных таблицы 3

Суммы квадратов матрицы $R(14;3;7)$ не могут принимать значения из множества $\{52;64\}\subset[41;75]$, принадлежащие отрезку $[41;75]$.

Величина $v(\text{sum})$ симметрична относительно числа 58.

Для матрицы

$$R(14;3;8)=\begin{pmatrix} 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 \\ 26 & 27 & 28 & 29 & 30 & 31 & 32 & 33 \\ 38 & 39 & 40 & 41 & 42 & 43 & 44 & 45 \end{pmatrix}$$

получаем следующие числовые характеристики ее квадратов, отраженные в таблице 4 и на рисунке 3.

Отрезком возможных значений является $[41;77]$.

Таблица 4 – Суммы квадратов и число квадратов с данной суммой

sum	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
v(sum)	1	1	2	2	3	3	4	3	3	2	2	1	2	1	2	2	3	3	4
sum	77	76	75	74	73	72	71	70	69	68	67	66	65	64	63	62	61	60	59
v(sum)	1	1	2	2	3	3	4	3	3	2	2	1	2	1	2	2	3	3	4

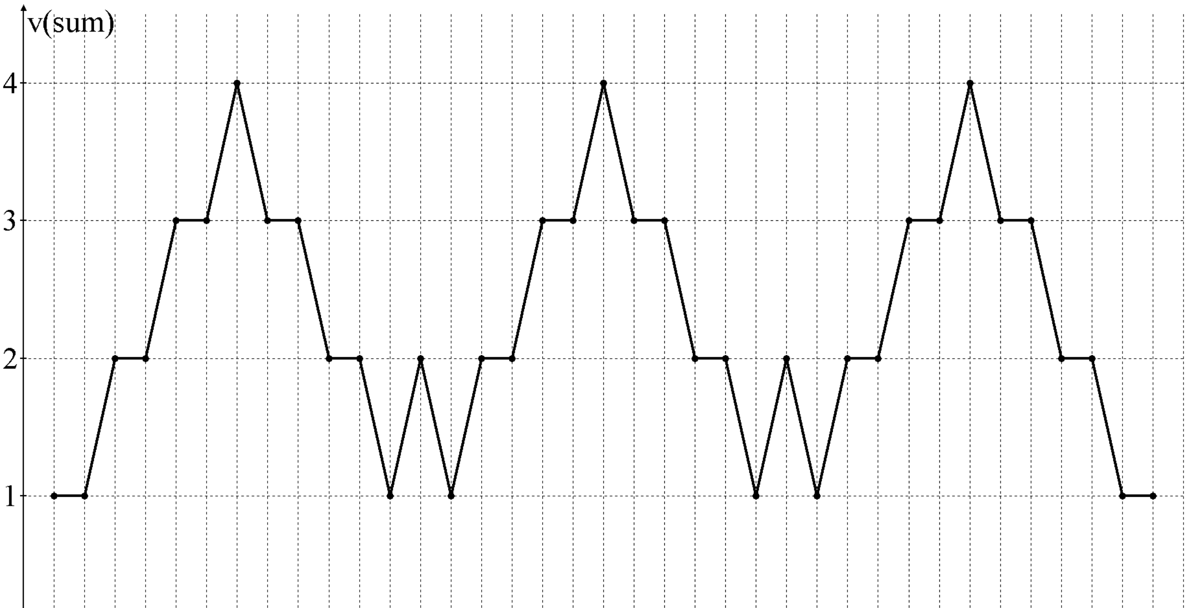

Рисунок 3 – Графическое представление данных таблицы 4

Суммы квадратов матрицы $R(14;3;8)$ принимают все целочисленные значения из отрезка $[41;77]$. Величина $v(\text{sum})$ симметрична относительно числа 59. ■

Заключение

В работе [4] исследуемой матрицей является матрица C аналогичная матрице R с тем отличием, что в матрице C нечетные числа записываются со знаком «минус». Для подматриц матрицы C можно поставить вопрос о строении множества ME. Такой же вопрос можно сформулировать и для подматриц уникальных матриц, рассмотренных в работе [6].

Библиографический список

1. Попов И.Н. Группы RC и RCD: монография. Архангельск: КИРА, 2014. 192 с.
2. Попов И.Н. Квадраты матриц // Научно-исследовательская деятельность школьников в области математики, прикладной математики и информатики: материалы Шестой региональной научно-практической конференции. Часть II / сост. С.Н. Котова; отв. ред. М.В. Шабанова; Сев. (Арктич.) федер. ун-т им. М.В. Ломоносова. Архангельск: САФУ, 2014. С. 119-127.
3. Попов И.Н. Квадраты матрицы определенной суммы // Постулат. 2018. № 5. URL: http://e-postulat.ru/index.php/Postulat/article/view/1461/1493
4. Попов И.Н. Квадраты матрицы со знакопеременными элементами // Постулат. 2018. № 6. URL: http://e-postulat.ru/index.php/Postulat/article/view/1606/1640
5. Попов И.Н. Суммы квадратов матрицы // Постулат. 2018. № 4. URL: http://e-postulat.ru/index.php/Postulat/article/view/1367/1398
6. Попов И.Н. Уникальные матрицы // Постулат. 2018. № 7. URL: http://e-postulat.ru/index.php/Postulat/article/view/1771/1805