УДК 517.928

Об асимптотике решения модельного уравнения Кэррера с малым параметром

Алымкулов Келдибай
Ошский государственный университет
д. ф.-м. наук, профессор кафедры

Султанова Насийпа Зулпукаровна
Ошский гуманитарный педагогический институт
старший преподаватель

Аннотация
Методом характеристик и методом фиктивного параметра строится асимптотика модельного уравнения Кэррера.
Ключевые слова: Модельное уравнение Кэррера, асимптотика решения, метод характеристик, метод фиктивного параметра, метод мажорант.

About an asymptotic of the solution of the model Karrier equation with a small parameter

Alymkulov Keldibaj
Osh State University
Professor

Sultanova Nasijpa Zulpukarovna
Osh Humanitarian Pedagogical Institute
Senior lecturer

Abstract
Here by the method of characteristics and the method of a fictitious parameter is constructed an asymptotic of the model Carrier equation.
Keywords: Carrier model equation, asymptotic of the solution, method of characteristic, fictitious parameter method, majorant method.

1.Введение

Рассмотрим следующую задачу [1, стр.61]:

$$z_x + \frac{1}{x} z(x,y) - \varepsilon z(x,y) z_y(x,y) = 0, \quad z(1,y) = f(y) \tag{1}$$

Здесь $u_x = \dfrac{\partial u}{\partial x},\ u_y = \dfrac{\partial u}{\partial y},\ x \in (1,\infty]$, $f(y) \in C^\infty[0,1]$, $0 < \varepsilon -$ малый параметр.

Требуется найти асимптотику решения задачи (1) при малом ε.

2. Классический метод малого параметра [2-4]

Решение этой задачи будем искать в виде:

$$z(x,y)=z^0(x,y)+\varepsilon z^1(x,y)+\varepsilon^2 z^2(x,y)+\varepsilon^3 z^3(x,y)+...+\varepsilon^n z^{(n)}(x,y)+..., \qquad (2)$$

Начальные данные для $z^{(k)}(x,y)-(k=0,1,2,...)$ берется в виде:

$$z^{(k)}(1,y)=0,(k=1,2,...) \qquad z^{(0)}(1,y)=f(y)$$

Тогда для функций $z^{(k)}(x,y)-(k=0,1,2,...)$ имеем следующие уравнения:

$$Lz^{(0)}(x,y)=z_x{}^0+\frac{1}{x}z^0(x,y)=0 \quad z^0(1,y)=f(y) \qquad (3.0)$$

$$Lz^{(1)}(x,y)=z^0(x,y)z^0y(x,y)=0 \quad z^1(1,y)=0 \qquad (3.1)$$

$$Lz^{(2)}(x,y)=+z^0(x,y)z_y^{(1)}(x,y)+z_y^0(x,y)z^{(1)}(x,y), \quad z^1(1,y)=0 \qquad (3.2)$$

$$Lz^{(3)}(x,y)=z^0(x,y)z_y^{(2)}(x,y)+z^{(1)}(x,y)z_y^{(1)}(x,y)+z_y^0(x,y)z^{(2)}(x,y), \quad z^2(1,y)=0 \qquad (3.3)$$

$$Lz^{(n)}(x,y)=\sum_{\substack{i+j=n-1\\ i=0}} z^{(i)}(x,y)z_y^{(j)}(x,y), \quad z^n(1,y)=0 \qquad (3.n)$$

Решая эти задачи, получим

$$z^{(0)}(x,y)=f(y)x^{-1}, \qquad (4.0)$$

$$z^{(1)}(x,y)=x^{-1}\int_1^x f(y)f'(y)\frac{1}{s}ds=f(y)f'(y)x^{-1}\ln x,\ x\to 0 \qquad (4.1)$$

$$z^{(2)}(x,y)=g_2(y)x^{-1}\ln^2 x,\ x\to 0 \quad (g_2(y)=f(y)(f(y)f'(y))'+f(y)(f'(y))^2)$$

Пусть

$$z^{(k)}(x,y)=g_n(y)x^{-1}\ln^k x,\ x\to 0 \quad (k=0,1,...,n) \qquad (4.к)$$

здесь $g_n(y)$ известная функция формула , справедлива для (k=1,2,…,n), тогда докажем, что эта формула справедлива и для k=n+1.

Уравнение для определения $z^{(n+1)}(x,y)$ запишется в виде

$$Lz^{(n+1)}(x,y)=-\sum_{\substack{i+j=n\\ i,j\ge 0}} z^{(i)}(x,1)z_y^{(i)}(x,y), \quad z^{(n+1)}(1,y)=0$$

или с учетем (4.k) в виде

$$Lz^{(n+1)}(x,y)=G_{n+1}(y)x^{-2}\ln^n x, \qquad z^{(n+1)}(1,y)=0$$

где $G_{n+1}(y)-$ известная функция

Решая эту задачу, имеем

$$z^{(n+1)}(x,y)=x^{-1}\int_1^x G_{n+1}(y)s^{-1}\ln^n s ds=G_{n+1}(y)x^{-1}\ln^{n+1}x,\ x\to 0$$

То есть, формула (4.к) доказана.

Ряд (2) можно переписать в виде

$$z(x,y)=x^{-1}\left[f(y)+f_1(y)\varepsilon\ln x+g_2(y)(\varepsilon\ln x)^2+...+g_n(y)(\varepsilon\ln x)^n+...\right], x\to 0 \qquad (5)$$

где $g_n(y)$ - известные функции.

Этот ряд будет асимптотическим рядом только на отрезке $x \in [1, x_0(\varepsilon))$, $x_0(\varepsilon) = e^{\frac{\delta(\varepsilon)}{\varepsilon}} = e^{\varepsilon^{-\alpha}}$ $(0 < \alpha < 1)$, т.е. в точке $\tilde{x} = e^{\frac{1}{\varepsilon}}$ теряется асимптотический характер этого ряда. Справедлива

Теорема 1. Ряд (9) для решения задачи (1) является асимптотическим рядом на большом, но конечном отрезке $[1,\varepsilon^{-\alpha}],0<\alpha<1$.

Строгое доказательство этой теоремы доказывается методом мажорант. Можно показать, что метод растяжения координат или метод Лайтхилла [4] также не дает решение этой задачи на всем требуемом отрезке.

Чтобы получить асимптотику решения этой задачи на всем отрезке $x \in [1,\infty)$ применим метод характеристик [5].

3. Метод характеристик

Чтобы применить этот метод , сначала компактизируем бесконечный отрезок $[1,\infty)$, то есть сводим его к конечному отрезку с преобразованием $x = t^{-1}$. Тогда, задача (1) - (2) приводится к следующей задаче

$$t^2 \frac{\partial u(t,y)}{\partial t} - tu(t,y) + u(t,y)u_y(t,y) = 0,\ u(1,y) = f(y) \tag{6}$$

Здесь опять сделаем подстановку

$$u(t,y) = t\,z(t,y)$$

Тогда, (10) примет вид

$$tz_t(t,y) = -\varepsilon\, z(t,y) z_y(t,y),\ z(1,y) = f(y) \tag{7}$$

Эту задачу решим методом характеристик [5]. Рассмотрим характеристическую систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dt}{ds} = t,\ \frac{dy}{ds} = -\varepsilon z, \qquad \frac{dz}{ds} = \frac{\partial z}{\partial t}\frac{dt}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{ds} = 0$$

Начальную функцию $z(1,y) = f(y)$ параметризируем через параметр $\tau = y \in [0,1]$: следующим образом

$$t = 1,\ \ y = \tau,\ \ z(1,y) = f(\tau) \tag{8}$$

Пусть точке $t = 1$ соответствует $s = 0$, тогда интегрируя (2) имеем $t = e^s$, $y = \tau - \varepsilon s\, f(\tau)$, $z = f(\tau)$

или

$$z = f(\tau), \qquad y = \tau - \varepsilon \ln t\, f(\tau) \tag{9}$$

Уравнение (9) даёт параметрическое представление решения $z = z(t,y)$.

Проверим, что (9) действительно удовлетворяет уравнению (7).

Из (9) имеем

$$z_t = f'(\tau)\tau_t,\ \ z_y = f(\tau)\tau_y \tag{10}$$

$$0 = \tau_t - \varepsilon \ln t\, f'(\tau)\tau_t - \varepsilon f(\tau)\frac{1}{t} = (1 - \varepsilon f'(\tau)\ln t)\tau_t - \frac{\varepsilon f(\tau)}{t}$$

$$1 = \tau_y (1 - \varepsilon \ln\, f'(\tau)$$

то есть

$$\tau_t = \frac{\varepsilon f(\tau)}{t(1-\varepsilon f'(\tau)\ln t)}, \quad \tau_y = \frac{1}{1-\varepsilon \ln t\, f'(\tau)} \qquad (11)$$

Подставляя (11) в (10), затем в уравнение (7) имеем

$$\frac{t\varepsilon\, f(\tau)}{t(1-\varepsilon \ln t\, f'(\tau))} - \frac{\varepsilon\, f(\tau)}{1-\varepsilon \ln t\, f'(\tau)} \equiv 0$$

При этом мы предполагаем, что

$$1-\varepsilon \ln t\, f'(\tau) \neq 0 \qquad (12)$$

Таким образом, доказана.

Теорема 2. Пусть выполнено условие (12), тогда параметрическое решение задачи (7) представимо в виде (9).

Уравнение (9) представим в виде

$$z = f(y+\varepsilon \ln t \cdot z) \qquad (13)$$

Далее, предположим, что $f(y)$ является аналитической функцией. Тогда (9) можно представить в виде

$$z = f(y) + f_1(y)\varepsilon \ln t \cdot z + ... + f_n(y)(\varepsilon \ln t \cdot z)^n + ..., \qquad (14)$$

где $f_k(y) = \frac{1}{k!} f^{(k)}(y).$

Также предположим, что

$$\mu = -\varepsilon \ln t << 1. \qquad (15)$$

Асимптотику функции z ищем в виде ряда

$$z = f(y) + \mu z_1(y) + \mu^2 z_2(y) + ... , \qquad (16)$$

где $z_i(y)$ – пока неопределенные функции.

Подставляя (12) в (14) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ, единственным образом определяем неизвестные функции $z_i(y)$.

Действительно, тогда имеем:

$$z_1(y) = f(y)f'(y), \quad z_2(y) = \left(f'(y)\right)^2 + f_2(y)z_1^2(y), ...$$

Доказательство сходимости ряда (12) можно доказать методом мажорант. В самом деле, пусть

$$\left|f_k(y)\right| \le \frac{M}{\rho} \quad (0<\rho<1)$$

в окрестности точки $f(y)$. Тогда мажорантным уравнением для (9) является уравнение

$$u = M + \frac{M\mu u}{1-\mu u}.$$

Если $2\mu u \le 1,$ то это уравнение можно усилить и получим

$$u = M + 2\mu u$$

или еще

$$|z| \le u \le 2M$$

ряд (12) сходиться равномерно при $\mu M \le \frac{1}{2}$.

Справедлива.

Теорема 3. Пусть $f(y)$ является аналитический функцией и $-2\varepsilon \ln t M \le 1,$ где $|f(y)| \le M$. Тогда решение задачи (7) разлагается в сходящийся ряд (12) на отрезке $(e^{-\frac{1}{\varepsilon}},1]$.

Замечание. Это ряд не сходится в точке $t=0$.

Если $-\varepsilon \ln t = 1 \Leftrightarrow t = e^{-\frac{1}{\varepsilon}}$, то $z = f(-y+z).$ (17)

Пусть это уравнение имеет единственное решение

$$z = \eta(y). \tag{18}$$

Пусть, теперь $0 < t = e^{-1/\varepsilon} < 1$. Введем параметр : $\lambda = \dfrac{1}{-\varepsilon \ln t}$.

Предположим, что обратная функция f^{-1} существует и аналитическая. Уравнение (5) запишем в виде

$$z = \lambda y - \lambda \varphi(z), \quad \left(\varphi(z) = f^{-1}(z)\right) \tag{19}$$

Решение этого уравнения разлагаем в асимптотический ряд по малому параметру λ методом фиктивного параметра [6].

Введем в уравнение (19) фиктивный параметр ρ:

$$z = \lambda y - \lambda \rho \varphi(z), \tag{20}$$

где ρ изменяется отрезке $[0,1]$. Решение уравнения (20) разлагаем по степеням малого параметра $\rho,$ затем покажем, что этот ряд сходится на отрезке $\rho \in [0,1]$. Решение ищем в виде ряде

$$z = \lambda y + Z_1(y)\rho + Z_2(y)\rho^2 + \dots \tag{21}$$

Подставляя (21) в (20), неизвестные функции $z_i(y)$ определяем единственным образом:

$$Z_1(y) = -\lambda \varphi(\lambda y), \;\; Z_2(y) = -\lambda \varphi'(\lambda y) z_1 - \frac{\lambda}{2!}\varphi''(\lambda y) z_1^2, \dots$$

Сходимость ряда (21) для $0 \le \rho \le 1$ доказывается методом мажорант и в результате мы получим следующую теорему.

Теорема 3. Пусть $f^{-1}(y)$ существует является аналитической функцией. Тогда решение задачи (1) на отрезке $\left[0, e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\right)$ представляется сходящимся ря

$$z = \lambda y + Z_1(y,\lambda) + Z_2(y,\lambda) + \dots \; .$$

Окончательно, мы получим следующую теорему.

Теорема. Пусть функция $f(y)$ и $f^{-1}(y)$ являются аналитическими функциями, тогда решение задачи (1) можно представить в виде

$$z(t,y) = \begin{cases} f(y) + \mu z_1(y) + \mu^2 z_2(y) + \dots, & e^{-1/\varepsilon} < t \le 1, \\ \eta(y) & t = e^{-1/\varepsilon}, \\ \lambda y + Z_1(y,\lambda) + Z_2(y,\lambda) \dots, \;\; \lambda = \dfrac{1}{-\varepsilon \ln t}, & 0 \le t < e^{-1/\varepsilon} \end{cases} \tag{22}$$

Пример 1. Пусть $z(1,y) = y.$ Тогда $z = \tau, \quad y = z - \varepsilon \ln t \, z,$

отсюда $z(t,y)=\dfrac{y}{1-\varepsilon\ln t}$.

Условие (8) выполнено.

Пример 2. $z(1,y)=y^2-1$

Условие (8) также выполнено.

Уравнение (5) примет вид

$$z=(y+\varepsilon\ln t\cdot z)^2-1$$

Отсюда

$$z=(\varepsilon\ln t)^{-2Y}\frac{1}{2}[1-2y\varepsilon\ln t-\{(1-2y\varepsilon\ln t)^2-4\varepsilon^2\ln^2 t(y^2-1)\}^{-1/2}]$$

Заключение

Таким образом, построена асимптотика по малому параметра модельного уравнения Кэрьера методом характеристики и использованием метода фиктивного параметра. Приведены примеры.

Библиографический список

1. Hinch E.J. Perturbation methods. Cambridge univers. press, 1981,160 p.
2. Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач, М.: Физматгиз, 1989, 336 с.
3. Ильин А.М., Данилин А.Р. Асимптотические методы в анализе. М.: Физматлит, 2009 .
4. Alymkulov K., Tursunov D. A. Perturbed differential equations with singularly points. в книге Recent studies in Perturbation Theory, 2017, p.1-42. DOI: 10.5772/65624.
5. Zauderer E. Partial Differential Equations of Applied Mathematics. John Willey & Sons, INC., 1989, 910 p.
6. Alymkulov K., Tolubaev J., Solution of the Lagerstrom model problem // Math.Note, 1994. Vol.56, No.4, pp. 3-8.