Постулат. 2018. №12 ISSN 2414-4487
УДК 517.968

О регуляризации по Лаврентьеву нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода на оси

Камбарова Айсалкын Даминовна
Ошский государственный университет
Старший преподаватель

Аннотация
В данной работе построен регуляризирующий оператор по М.М. Лаврентьеву и доказана теорема единственности для решения нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода на оси.
Ключевые слова: нелинейные, интегральные, уравнения Вольтерра, первого рода, решения, регуляризация, единственность.

On regularization for the Lavrentiev of nonlinear integral equations of Volterra of the first kind on axis

Kambarova Aisalkyn Daminovna
Osh State University
Senior lector

Abstract
In this work the regularizing operator according to M.M.Lavrentyev is constructed and the theorem of uniqueness for the solution of the nonlinear integrated equations of Volterra of the first sort on an axis is proved.
Keywords: nonlinear, integrated, Volterra equation, the first sort, the decision, , regularization, uniqueness

Рассмотрим уравнение

$$\int_{-\infty}^{t} K\big(t,s,u(s)\big)ds = f(t), \qquad t\epsilon(-\infty,+\infty). \tag{1}$$

где $K(t,s,u)$ и $f(t)-$ заданные функции, $u(t)-$неизвестная функция.

Различные вопросы для интегральных уравнений Вольтерра первого и третьего рода исследованы в работах [1-6]. В частности в работе [4] доказаны теоремы единственности и построен регуляризирующий оператор для систем интегральных уравнений Вольтерра первого рода на отрезке. В данной работе построен регуляризирующий оператор и доказана теорема единственности для решения уравнения (1).

Наряду с уравнением (1) будем рассматривать уравнение

$$\varepsilon v(t,\varepsilon) + \int_{-\infty}^{t} K(t,s,v(s,\varepsilon))ds = f(t) + \varepsilon u_0, \qquad (2)$$

где $0 < \varepsilon -$ малый параметр $, u_0 = \lim_{t\to-\infty} u(t), u(t) -$решение уравнения (1).

Всюду будем предполагать, что

$$K(t,s,u) = K(t,s)\ u + K_1(t,s,u), (t,s,u) \epsilon\ G \times R, \qquad (3)$$

где G={(t,s):-∞<s≤t<+∞}.

Введем обозначения:

1) Обозначим через $C(-\infty,+\infty)$ пространство всех функций $u(t)$ –непрерывных и ограниченных на $(-\infty,+\infty)$, $\|\cdot\|_C -$ норма в $C(-\infty,+\infty)$, т.е. для любого
$$u(t)\epsilon C(-\infty,+\infty)$$
$$\|u(t)\|_C = \sup_{t\epsilon(-\infty,\infty)} |u(t)|.$$
2) Через $L_1(-\infty,+\infty)$ обозначим пространство всех функций $u(t)$ таких, что
$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|dt < \infty.$$
3) Обозначим через $C_0(-\infty,+\infty)$ пространство всех функций $u(t)\epsilon C(-\infty,+\infty)$, таких что $\lim_{t\to-\infty} u(t), =\ u_0 \epsilon R$.
$$\|u(t)\|_C = \sup_{t\epsilon(-\infty,\infty)} |u(t)|.$$
4) Через $L_{1,loc}(-\infty,+\infty)$обозначим пространство всех функций $u(t)$, таких, что для любого $T\epsilon(-\infty,+\infty)$
$$\int_{-\infty}^{T} |u(t)|dt < \infty.$$
5) Обозначим через $C_0^{\gamma}(-\infty,+\infty), 0 < \gamma \le 1$,пространство всех функций $u(t)\epsilon C_0(-\infty,+\infty)$,таких, что для любых $t_1, t_2 \epsilon(-\infty,+\infty)$
$$|u(t_1) - u(t_2)| \le M_0 \left| \int_{t_1}^{t_2} K(s,s)ds \right|^{\gamma},$$

где положительная постоянная M_0 не зависит от t_1, t_2, но зависит только от $u(t), K(t,t)\epsilon\ \ L_{1,loc}(-\infty,+\infty)$и $K(t,t) \ge 0$ при всех$t\ \epsilon\ (-\infty,+\infty)$.

Предположим выполнение следующих условий:

a) $K(t,t)$≥0 при всех t $\epsilon\ (-\infty,+\infty)$
$$\int_{-\infty}^{t} K(t,s)\ ds \epsilon C(-\infty,+\infty), K(t,t) \epsilon L_{1,loc}(-\infty;+\infty)$$
b) для любых $t_1, t_2 \epsilon(-\infty;+\infty)$,

$$|K(t_1,s)-K(t_2,s)|\le l(s)\left|\int\limits_{t_1}^{t_2}K(s,s)ds\right|,$$

где 0≤ $l(t)$при всех t $\epsilon\ (-\infty,+\infty), l(t)\epsilon L_1(-\infty;+\infty)$.

с) при $t_2\ge t_1$ для любых *(t_1,s), (t_2,s)∈G,* и *(t_1,s,u_1) ,(t_1,s,u_2), (t_2,s,u_1), (t_2,s,u_2)∈G× R* справедлива оценка

$$|K(t_1,s,u_1)-K_1(t_1,s,u_2){-}K_1(t_2,s,u_1)+$$
$$+K_1(t_2,s,u_2)|\le l_1(\text{s})|\int_{t_1}^{t_2}K(s,s)ds||\,u_1\text{-}u_2|,$$

$K_1(t,t,u)$=0 при всех (t,u) ϵR^2, $K_1(t,s,0)$=0 при (t,*s*)∈*G*.

Решение уравнения (2) будем искать в виде

$$\nu(t,\varepsilon)=u(t)+\xi(t,\varepsilon). \tag{4}$$

Подставляя (4) в (2) имеем

$$\xi(t,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{t}K(s,s)\xi(s,\varepsilon)ds-\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{t}[K(t,s)-K(s,s)]\xi(s,\varepsilon)ds-$$

1ε−∞tK1t,s,us++ξs,ε−K1t,s,usds+ u0−ut.

Отсюда, используя резольвенту $R(t,s,\varepsilon)=-\frac{1}{\text{ε}}K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}$ядра $\left[-\frac{1}{\text{ε}}K(s,s)\right]$ имеем

$$\xi(t,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^{t}[K(t,s)-K(s,s)]\xi(s,\varepsilon)ds-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^{t}\left[K_1\big(t,s,u(s)+\xi(s,\varepsilon)\big)-K_1\big(t,s,u(s)\big)\right]ds+[u_0-u(t)]+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{1}{\varepsilon}K(\tau,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau}\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^{\tau}[K(\tau,s)-K(s,s)]\xi(s,\varepsilon)dsd\tau+$$

$$+\int_{-\infty}^{t}\frac{1}{\varepsilon}K(\tau,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau}\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{\tau}[K_1(\tau,s,u(s)+\xi(s,\varepsilon))-$$

K1τ,s,us]dsdτ-

$$-\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{t}K(\tau,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau}[u_0-u(\tau)]d\tau. \tag{5}$$

Применяя формулу Дирихле, последнее уравнение запишем в виде

$$\xi(t,\varepsilon)=\int\limits_{-\infty}^{t}H(t,s,\varepsilon)\xi(s,\varepsilon)ds+\int_{-\infty}^{t}P(t,s,\xi(s,\varepsilon),\varepsilon)ds+$$

$$+\varphi(t,\varepsilon),\qquad t\epsilon(-\infty,+\infty), \tag{6}$$

где

$$H(t,s,\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}[K(t,s)-K(s,s)] +$$
$$+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_s^t K(\tau,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau}[K(\tau,s)-K(s,s)]\,d\tau,$$
$$(t,s)\epsilon G, \tag{7}$$

$$P(t,s,\xi(s,\varepsilon),\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}\left[K_1\big(t,s,u(s)+\xi(s,\varepsilon)\big)-K_1\big(t,s,u(s)\big)\right]+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_s^t K(\tau,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau}[K_1(\tau,s,u(s)+\xi(s,\varepsilon))-K_1\big(\tau,s,u(s)\big)]d\tau, \tag{8}$$

$$\varphi(t,\varepsilon) = u_0 - u(t) - \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^t K(\tau,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau}[u_0-u(\tau)]d\tau,\ t\epsilon R. \tag{9}$$

Теорема. Пусть выполняются условия a), b),c) и $u(t)\epsilon C_0^\gamma(-\infty,+\infty)$, где $u(t)-$ решение уравнения (1). Тогда решение $\nu(t,\varepsilon)$ уравнения (2) при $\varepsilon\to 0$ стремится к

решению $u(t)$уравнения (1). При этом справедлива оценка

$$\|\nu(t,\varepsilon)-u(t)\|_C \le M_2\varepsilon^\gamma, \tag{10}$$

где $M_2 = M_0M_1\exp\{\int_{-\infty}^{\infty}[l(s)+l_1(s)]ds\}, \forall t_1,t_2\epsilon(-\infty;+\infty)$,

$$|u(t_1)-u(t_2)| \le M_0\left|\int_{t_1}^{t_2}K(s,s)ds\right|^\gamma, M_1 = \sup_{\nu\ge 0}(e^{-\nu}\nu^\gamma) + \int_0^\infty e^{-\nu}\nu^\gamma d\nu.$$

Доказательство. Учитывая формулы

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau}d\tau = 1-e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}$$
$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^t K(\tau,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau}d\tau = 1-e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^t K(\tau,\tau)d\tau}$$

из (7) и (8) и (9) получим

$$H(t,s,\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}[K(t,s)-K(s,s)]e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}-$$
$$-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^t K(\tau,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau}[K(t,s)-K(\tau,s)]d\tau, \tag{11}$$

$$P(t,s,\xi(s,\varepsilon),\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}\left[K_1\big(t,s,u(s)+\xi(s,\varepsilon)\big)-K_1\big(t,s,u(s)\big)\right]e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_s^t K(\tau,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau}[K_1\big(t,s,u(s)+\xi(s,\varepsilon)\big)-K_1\big(t,s,u(s)\big)-$$
$$-K_1\big(\tau,s,u(s)+\xi(s,\varepsilon)\big)+K_1\big(\tau,s,u(s)\big)]d\tau, \tag{12}$$

$$\varphi(t,\varepsilon) = -[u(t)-u_0]e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^t K(\tau,\tau)d\tau}-$$
$$-\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^t K(\tau,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau}[u(t)-u(\tau)]\,d\tau\,. \tag{13}$$

Учитывая условие б), из (11) имеем

$$|H(t,s,\varepsilon)| \le l(s)[\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau]e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau} +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau}\ l(s)[\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau]d\tau =$$

$$= l(s)[\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau]e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}$$

$$+\ l(s)\int_s^t \left[\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau\right] d_\tau\left[e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau}\right].$$

Отсюда интегрируя по частям, получим

$$|H(t,s,\varepsilon)| \le l(s)\int_s^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau}K(\tau,\tau)d\tau = l(s)\left[1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}\right].$$

Из последнего неравенства имеем

$$|H(t,s,\varepsilon)| \le l(s), (t,s)\epsilon G. \qquad (14)$$

Теперь найдем оценку функции $P(t,s,\xi(s,\varepsilon),\varepsilon)$ из (12)

$$\left|\,P(t,s,\xi(s,\varepsilon),\varepsilon)\,\right| = \left|\,\frac{1}{\varepsilon}\left[K_1\big(t,s,u(s)+\xi(s,\varepsilon)\big) - -K_1\big(s,s,u(s) +\right.\right.$$

+ξs,ε+K1s,s,us−K1t,s,use−1εstKτ,τdτ-

$$-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_s^t K(\tau,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau}[K_1\big(t,s,u(s)+\xi(s,\varepsilon)\big) - K_1\big(t,s,u(s)\big)-$$

$$-K_1\big(\tau,s,u(s)+\xi(s,\varepsilon)\big) + K_1\big(\tau,s,u(s)\big)]d\tau\,\Big| \le$$

$$\le e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}\{l_1(s)\ \left|\xi(s,\varepsilon)\right|\ \int_s^t K(\tau,\tau)d\tau\} +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_s^t K(\tau,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau}d\tau\, l_1(s)\left|\xi(s,\varepsilon)\right|\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau\}.$$

Отсюда получим, что

$$\left|\,P(t,s,\xi(s,\varepsilon),\varepsilon)\,\right| \le l_1(s)\left|\xi(s)\right|, (t,s,\xi) \in G\text{x}R. \qquad (15)$$

В силу $u(t)\epsilon C_0^\gamma(-\infty;+\infty)$ из (13) имеем

$$|\varphi(t,\varepsilon)| \le M_0[\int_{-\infty}^t K(\tau,\tau)d\tau]^\gamma\ e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^t K(\tau,\tau)d\tau} +$$

$$+M_0\int_{-\infty}^t \frac{1}{\varepsilon}K(\tau,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau}[\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau]^{\gamma^\gamma}d\tau =$$

=M0εγ[1εττtKτ,τdτ]γγe−1ε−∞tKτ,τdτ+

$$+M_0\varepsilon^\gamma\int_{-\infty}^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau}[\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau]^{\gamma}\ d_\tau[\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau] \le$$

$$\le M_0\varepsilon^\gamma\{\sup_{\nu\ge0}(e^{-\nu}\nu^\gamma) + \int_0^\infty e^{-\nu}\nu^\gamma d\nu\} = M_0M_1\varepsilon^\gamma\ .$$

Отсюда получим

$$\|\varphi(t,\varepsilon)\|_C \le M_0 M_1 \varepsilon^{\gamma}. \qquad (16)$$

Учитывая (14) , (15) и (16) из (6) получим

$$|\xi(t,\varepsilon)| \le \int_{-\infty}^{t}(l(s)+l_1(s))|\xi(s,\varepsilon)|ds + M_0M_1\varepsilon^{\gamma}, \quad t\epsilon R. \qquad (17)$$

Применяя формулу Гронуолла-Белмана из (17) имеем (10). Теорема доказана.

Следствие. Пусть выполняются условия $a), b), c)$ и существует $\propto\in(-\infty,+\infty)$ такое что $K(t,t)>0$ при почти всех $t\in$R. Тогда решение уравнения (1) единственно в пространстве $C_0^{\gamma}(-\infty,+\infty), 0<\gamma\le 1$.

Доказательство. Пусть $u_1(t), u_2(t) \in C_0^{\gamma}(-\infty,+\infty)$ являются решениями уравнения (1) при $f(t)\epsilon$C$(-\infty,+\infty)$. В этом случае сначала в силу условий $a), b), c)$ доказываем, что $\lim_{t\to-\infty} u_1(t) = \lim_{t\to-\infty} u_2(t)$.Тогда

$$\int_{-\infty}^{t} K\big(t,s,u_1(s)\big)ds = \int_{-\infty}^{t} K\big(t,s,u_2(s)\big)ds, t\in R.$$

Отсюда имеем

$$[u_1(t^*)-u_2(t^*)]\int_{-\infty}^{t}K(s,s)ds = \int_{-\infty}^{t}K(s,s)[u_1(s)-u_2(s)]ds=$$

$$= -\int_{-\infty}^{t}[K(t,s)-K(s,s)][u_1(s)-u_2(s)]ds -$$

$$-\int_{-\infty}^{t}[K_1\big(t,s,u_1(s)\big)-K_1\big(t,s,u_2(s)\big)-K_1\big(s,s,u_1(s)\big)+$$

$$+K_1\big(s,s,u_2(s)\big)]ds, t\epsilon(-\infty,\alpha), t^*\epsilon(-\infty,t).$$

Далее в *силу* условий *a)* и b),и *c)* имеем

$$\big|u_1(t^*)-u_2(t^*)\big|[\int_{-\infty}^{t}K(s,s)ds] \le \int_{-\infty}^{t}(l(s)ds[\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau]\|\|u_1(t)-u2t\|\|c+$$

$$+\int_{-\infty}^{t}(l_1(s)ds[\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau]\|\|u_1(t)-u_2(t)\|\|_c, \; -\infty<t^*\le t<\alpha.$$

Отсюда вытекает, что

что $\lim_{t\to-\infty}u_1(t) = \lim_{t\to-\infty}u_2(t)$, $t\epsilon R$.

Далее в силу оценку (10) доказывается

$$\|\|u_1(t)-u_2(t)\|\|_c \le \|\|u_1(t)-\nu(t,\varepsilon)\|\|_c + \|\|u_2(t)-\nu(t,\varepsilon)\|\|_c \to 0 \text{ при } \varepsilon\to 0.$$

Пример. Рассмотрим уравнения (1) и (2) при

$$K(t,s,u)=\frac{1}{1+4s^2}\left[\frac{|s|}{1+4s^2}+\int_s^t\frac{|\tau|}{(1+4\tau^2)^2}d\tau\right]-\frac{6}{1+9s^2}\left[\int_s^t\frac{|\tau|}{(1+4\tau^2)^2}d\tau\right]\frac{u}{1+u^2}, (t,s,u)\in G\text{x}R. \qquad (18)$$

В этом случае условия теоремы выполняются при

$$K(t,s)=\frac{1}{(1+4s^2)}\left[\frac{|s|}{1+4s^2}+\int_s^t \frac{|\tau|}{(1+4\tau^2)^2}d\tau\right],(t,s)\epsilon G, \quad (18)$$

$$K_1(t,s,u)=-\frac{6}{1+9s^2}\left[\int_s^t \frac{|\tau|}{(1+4\tau^2)^2}d\tau\right]\frac{u}{1+u^2},(t,s,u)\in G\text{x}R$$

$$K(t,t)=\frac{|t|}{(1+4t^2)^2},\ l(t)=\frac{1}{1+4t^2},\ l_1(t)=\frac{12}{1+9t^2},\ t\in R.$$

В самом деле, в силу (18)для любых$t_1, t_2 \epsilon R$ имеем

$$K(t_1,s)-K(t_2,s)=\frac{1}{1+4s^2}\int_{t_2}^{t_1}\frac{|s|}{(1+4s^2)^2}ds.$$

Отсюда

$$|K(t_1,s)-K(t_2,s)|\le l(s)\left|\int_{t_1}^{t_2}K(s,s)\,ds\right|.$$

Аналогичным образом в силу (19) доказывается для любых (t_1,s,u_1), (t_1,s,u_2), (t_2,s,u_1), $(t_2,s,u_2)\in G\text{x}R$ следующая оценка

$$\left|K_1(t_1,s,u_1)-K_1(t_1,s,u_2)-K_1(t_2,s,u_1)+K_1(t_2,s,u_2)\right|\le l_1(s)\left|\int_{t_1}^{t_2}K(s,s)ds\right|\left|u_1-u_2\right|.$$

Здесь используется неравенство

$$\frac{1+\| u_1| \|| u_2\|}{(1+u_1{}^2)(1+u_2{}^2)}\le 2, \quad u_1,u_2\in R.$$

Замечание: Если $u(t)=9\left[\int_{-\infty}^{t}K(s,s)ds\right]^{\frac{1}{2}}$, $K(t,t)\in L_1(-\infty,+\infty)$, $K(t,t)\ge 0$ при $t\in R$,то $u(t)\in C_0^{1/2}(-\infty,+\infty)$.

Библиографический список

1. Магницкий Н.А. Нелинейные интегральные уравнения Вольтерра первого и третьего рода // Вычисл. матем. и матем. физики. 1979, Т.19. № 4. С.970-988.
2. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.Р. Некорректные задачи математической физики и анализ. М: Наука 1980. С.286.
3. Денисов А.М. О приближенном решения уравнения Вольтерра первого рода, связанного с одной обратной задачей для уравнения теплопроводности //Вестник Московского университета. Сер.15 Вычисл. матем. и киберн. 1980. № 3. С.49-52.