

Различные подходы к построению графиков функции, содержащих модуль

Сизинцева Анастасия Александровна

Приамурский государственный университет имени Шолом-Алейхема, студент

Эйрих Надежда Владимировна

Приамурский государственный университет имени Шолом-Алейхема к.ф.-м.н., доцент, декан факультета математики, информационных технологий и техники

Аннотация

В статье описываются три различных подхода к построению графика функций с модулем: как кусочно-заданной функции, с использованием симметрии относительно оси абсцисс, через параллельный перенос вдоль оси. Авторы демонстрируют возможности системы Maple и программы MS PowerPoint для компьютерной визуализации построения графиков таких функций.

Ключевые слова: график функции с модулем, кусочно-заданная функция, симметрия относительно оси, параллельный перенос вдоль оси Ox , система компьютерной алгебры Maple, MS PowerPoint.

Various Ways to Plot of an Absolute Value Functions

Sizinceva Anastasiya Alexandrovna

Sholom-Aleichem Priamursky State University, student

Eyrikh Nadezhda Vladimirovna

Sholom-Aleichem Priamursky State University

PhD in Mathematics, Associate Professor, Dean of the Department of Mathematics, IT and Techniques

Abstract

The article describes three different approaches to plotting absolute value functions: as a piecewise function, using symmetry about the abscissa axis, through parallel transport along the axis. The authors demonstrate the capabilities of the Maple system and MS PowerPoint software for computerized visualization of graphing such functions.

Keywords: graph of absolute value functions, piecewise function, symmetry about axis, a horizontal translation along the x -axis, CAS Maple, MS PowerPoint.

Понятие «модуль» относится к одной из важнейших характеристик числа. Знание модуля числа и его свойств необходимо при решении уравнений и неравенств, изучении свойств функций и их графиков. Задачи, содержащие модуль, встречаются в курсе высшей математики, физики, архитектуры и др. наук.

Впервые понятие «модуль» вводится в 6-ом классе. Учащиеся знакомятся с определением модуля числа, учатся находить модуль положительных и отрицательных чисел, решают простейшие уравнения, содержащие модуль. В процессе изучения алгебры в 7-9-х классах, алгебры и начал математического анализа в 10-11-х классах отдельно понятие «модуль» не изучается, оно включено в состав других тем. Школьники знакомятся с геометрическим смыслом модуля, его свойствами; учатся решать различными методами уравнения и неравенства, содержащие модуль; строят графики функций, содержащие модуль.

Задания с модулем включены также и в итоговые государственные экзамены для 9-х и 11-х классов. Например, задания из ОГЭ 2018 года:

1. Постройте график функции $y = \frac{1}{2} \left(\left| \frac{x}{6} - \frac{6}{x} \right| + \frac{x}{6} + \frac{6}{x} \right)$. Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

2. Постройте график функции $y = \begin{cases} x^2, & |x| \leq 1, \\ \frac{1}{x}, & |x| > 1. \end{cases}$. Определите, при каких

значениях c прямая $y = c$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

3. Постройте график функции $y = x^2 - 3|x| - x$ и определите, при каких значениях c прямая $y = c$ имеет с графиком три общие точки.

Не смотря на то, что тема «Модуль» проходит через весь курс школьной математики, многие школьники испытывают значительные затруднения при решении задач, содержащих выражения под модулем. Не справляются на ОГЭ с построением графиков кусочно-заданных функций. Даже не приступают к заданиям, в которых необходимо решить уравнение, неравенство или их систему, в которых содержится выражение под модулем [5].

Для решения этой проблемы некоторые современные авторы предлагают разработки элективных курсов, способствующих повышению уровня сформированности логических универсальных учебных действий [2, 7]. Подбирают, разрабатывают и систематически используют в ходе урока различные задания, включающие модуль, позволяющие «украсить и разнообразить» школьный курс математики [3, 6, 8].

Большие возможности для активного и осмысленного использования теоретических знаний по теме «Модуль» открывает использование ИКТ в педагогической деятельности учителя [4].

В своей работе мы предлагаем использовать графические возможности системы компьютерной математики Maple и средств MS PowerPoint для создания анимаций, визуализирующих построение графиков функции, содержащих модуль. По мнению Eisenberg T., трудности у учащихся при изучении функций и связанных с ними понятий, возникают именно из-за того, что функции «не воспринимаются визуально», и «этот невизуальный подход препятствует развитию чувства функций» [1].

Продемонстрируем различные подходы к построению графиков функций с модулем на примере функции $y = |x - 1|$.

Задание 1. Построить график функции $y = |x - 1|$, пользуясь аналитическим определением модуля и понятием кусочно-заданной функции.

Ход решения. По определению $|a| = \begin{cases} a, a \geq 0, \\ -a, a < 0, \end{cases}$ тогда:

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1, x - 1 \geq 0, \\ -(x - 1), x - 1 < 0, \end{cases}$$

или

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1, x \geq 1, \\ 1 - x, x < 1. \end{cases}$$

Это кусочно-заданная функция. Перед изображением графика данной функции, вспомним, что неравенством $x \geq 1$ задается правая полуплоскость (рис. 1), а неравенством $x < 1$ – левая (рис. 2).

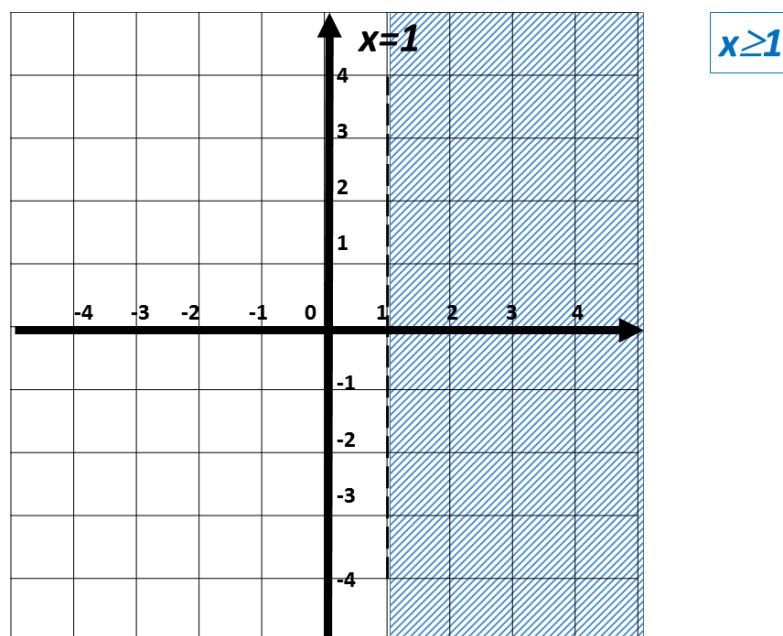


Рисунок 1 – Правая полуплоскость $x \geq 1$

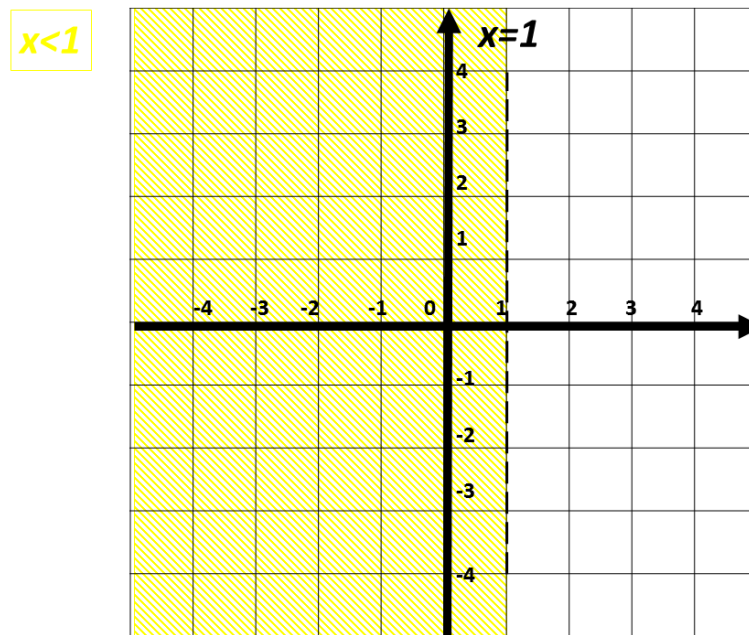


Рисунок 2 – Левая полуплоскость $x < 1$

Теперь изобразим на плоскости прямую $y = x - 1$, и оставляем только ту её часть, которая расположена в правой полуплоскости (рис. 3).

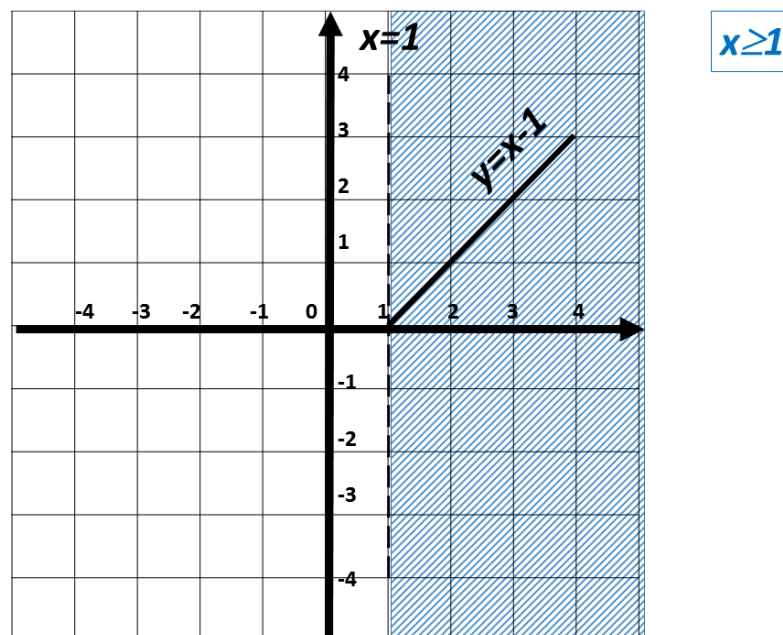
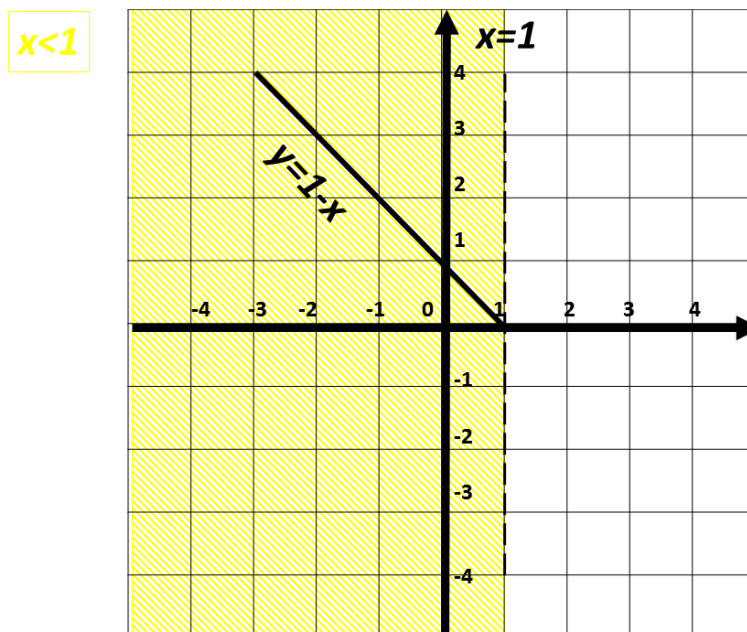
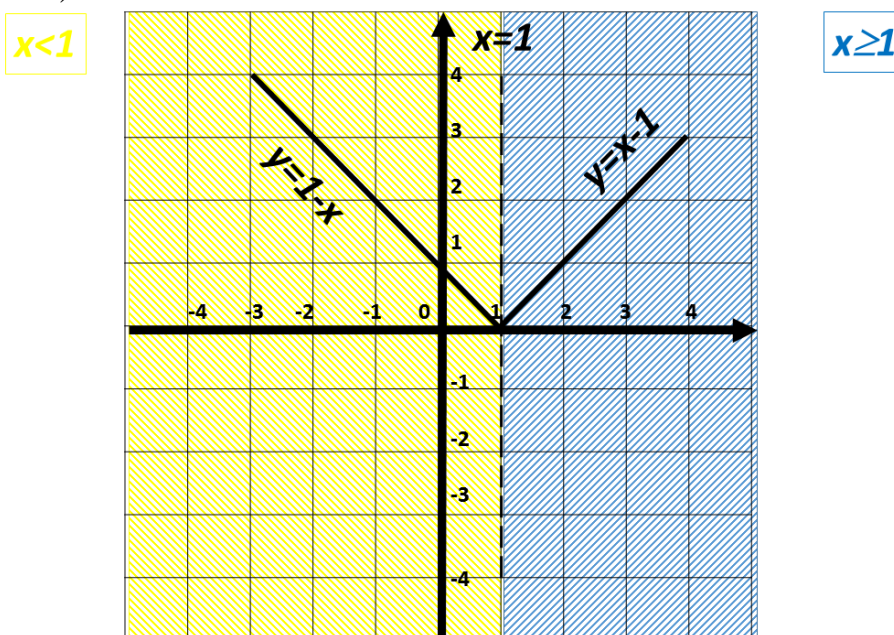


Рисунок 3 – Часть прямой $y = x - 1$, расположенная в полуплоскости $x \geq 1$

Далее строим прямую $y = 1 - x$ и оставляем только часть этой прямой, находящуюся в левой полуплоскости (рис. 4).

Рисунок 4 – Часть прямой $y = 1 - x$, расположенная в полуплоскости $x < 1$

Объединяя полученные на рисунках 3 и 4 графики, получаем искомый график (рис. 5).

Рисунок 5 – График функции $y = |x - 1|$

Задание 2. Построить график функции $y = |x - 1|$, пользуясь определением модуля и понятием симметрии.

Ход решения. Изображаем на плоскости прямую $y = x - 1$. Так как по определению модуль отрицательного числа есть противоположное ему положительное число, то точкам построенной прямой с отрицательными ординатами ставим в соответствие точки с положительными ординатами. Таким образом, та часть прямой $y = x - 1$, которая расположена ниже оси Ox , симметрично отражается относительно этой оси (рис. 6).

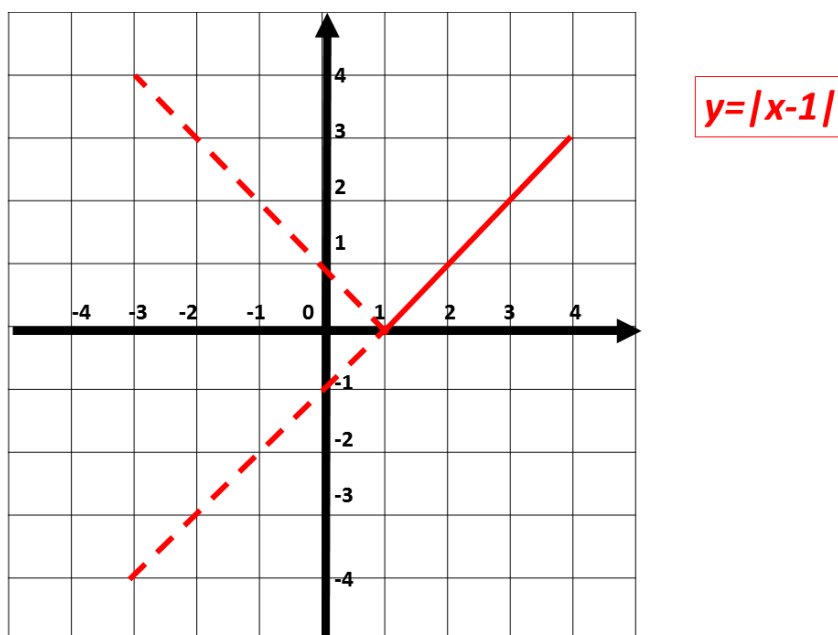


Рисунок 6 – Симметрия части графика относительно оси Ox

Задание 3. Построить график функции $y = |x - 1|$, пользуясь движением (параллельным переносом) графика функции $y = |x|$.

Изображаем график функции $y = |x|$ и сдвигаем его вдоль оси Ox на единицу вправо. Данное движение демонстрируется с помощью анимации, созданной в Maple (рис. 7).

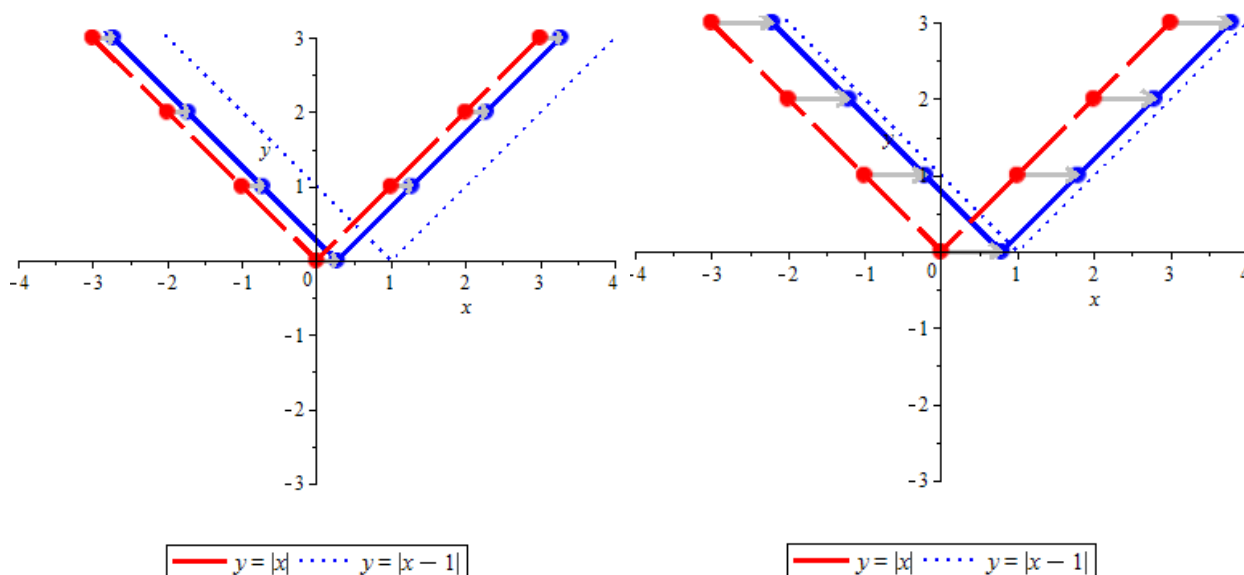


Рисунок 7 – Кадры анимации: сдвига вдоль оси Ox на единицу вправо

На наш взгляд, применение описанных подходов к построению графиков функций с модулем, позволит формировать у учащихся метапредметные универсальные действия при решении геометрических задач. Задания такого типа позволяют учащимся отрабатывать:

- познавательные учебные действия: вычисления, решение уравнений, перевод с алгебраического языка на геометрический, анализ, сравнение, выявление закономерности;
- логические действия: подведение под понятие, устанавливать и использовать аналогию.

Использование ИКТ в методах обучения математики помогает основной аспект делать не на запоминание и воспроизведение учебной информации, а на глубокое понимание изучаемого материала, сознательное и активное усвоение, на формирование у школьников умения самостоятельно и творчески применять информацию в рамках школьной и не школьной программы.

Библиографический список

1. Eisenberg T. Functions and Associated Learning Difficulties // *Advanced Mathematical Thinking. Mathematics Education Library*. 2002. vol 11. pp. 140-152.
2. Дербенева Ю.С., Элективный курс «Графики функций, содержащих выражения под знаком модуля» как средство формирования логических универсальных учебных действий // *Вестник современных исследований*. 2018. № 5.3 (20). С. 181-183.
3. Зив Б.Г., Алтынов П.И. Алгебра и начала анализа. Геометрия. 10-11 кл.: Учебн.-метод. пособие. – М.: Дрофа, 1999. – 224 с.
4. Калитина В.В., Пушкарева Т.П., Спружевник Е.А. Применение средств ИКТ при обучении математике в школе // *Новая наука: Теоретический и практический взгляд*. 2015. № 5-2. С. 73-75.
5. Матвеева Г.П., Сухенко А.М., Цапиева Т.В., Модуль действительного числа: графики, уравнения, параметры // В книге: *Преподавание математики в школах Тверского региона Сборник материалов в помощь учителю*. Под редакцией А.А. Голубева, О.Е. Барановой. Тверь, 2018. С. 69-99.
6. Седакова В.И., Тагирова А.Э., Модуль числа// *Педагогический опыт: теория, методика, практика*. 2016. № 2 (7). С. 67-72.
7. Сиротина Г.М. Элективный курс «Алгебра модуля в основной школе. // URL: <http://открытыйурок.рф/статьи/586821/> (дата обращения 18.12.2018).
8. Титоренко С.А., Кутаева И.Н., Модуль действительного числа в школьном курсе математики. Некоторые вопросы анализа, алгебры, геометрии и математического образования. 2017. № 6. С. 192-194.