

Формула для прогиба консольной фермы под действием распределенной нагрузки по верхнему поясу

Пережилова Екатерина Дмитриевна

НИУ «МЭИ»

Студент

Аннотация

Балочная ферма с двумя боковыми консолями имеет подвижную и неподвижную опоры. Поставлена задача вывести аналитическую зависимость прогиба фермы от числа панелей. Упругие стрелы фермы имеют различное сечение. Ряд решений для ферм с числом панелей от 1 до некоторого минимального, при котором можно найти искомую закономерность обобщается методом индукции. Усилия в стержнях найдены методом вырезания узлов. Для расчетов используется система символьной математики Maple и формула Максвелла- Мора.

Ключевые слова: ферма, консоль, формула Максвелла - Мора, прогиб, индукция, Maple

Formula for deflection of cantilever trusses under the action of a distributed load on the upper belt

Perezhilova Ekaterina Dmitrievna

NRU «MPEI»

Student

Abstract

The girder truss with two lateral consoles has a movable and fixed support. The task is to derive the analytical dependence of the deflection of the farm on the number of panels. Elastic truss rends have a different cross section. A number of solutions for trusses with the number of panels from 1 to some minimal, at which the desired pattern can be found is generalized by the induction method. The forces in the rends were found by cutting the knots. For calculations, the system of symbolic mathematics Maple and Maxwell-Mohr formula are used.

Keywords: console, truss, Maxwell –Mohr's formula, deflection, induction, Maple

Известные аналитические решения для плоских ферм как правило получены при отсутствии у ферм консолей [1-5].

Рассмотрим вариант фермы, с двумя боковыми консолями нагруженной равномерно по верхнему поясу (рис. 1). Ферма имеет шпренгельное усиление раскосов. Решение предполагается получить индуктивно, из анализа серии решений для ферм с последовательно увеличивающимся числом панелей. Индуктивный метод с успехом

применялся при выводе формул для ферм арочного типа [6-13], ферм рамного типа [14-16], решетчатых ферм [17-20], пространственных ферм [21-29]. Метод индукции применялся также и для расчета вантовых ферм [30], регулярных фундаментов [31] и раздвижных ножничных механизмов [32].

Общее число стержней $n_s = 20n - 4$, в это число входят также три опорные стержня, деформациями которых пренебрегаем.

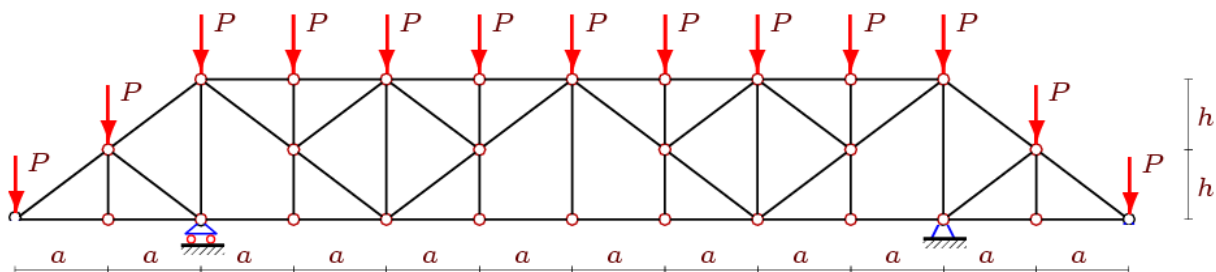


Рисунок 1— Ферма под распределенной нагрузкой, $n = 5$

Расчет усилий в стержнях ведется в программе, написанной на языке системы символьной математики Maple. Для ввода данных стержни и узлы нумеруются (рис. 2). Нумерация стержней начинается с нижнего пояса.

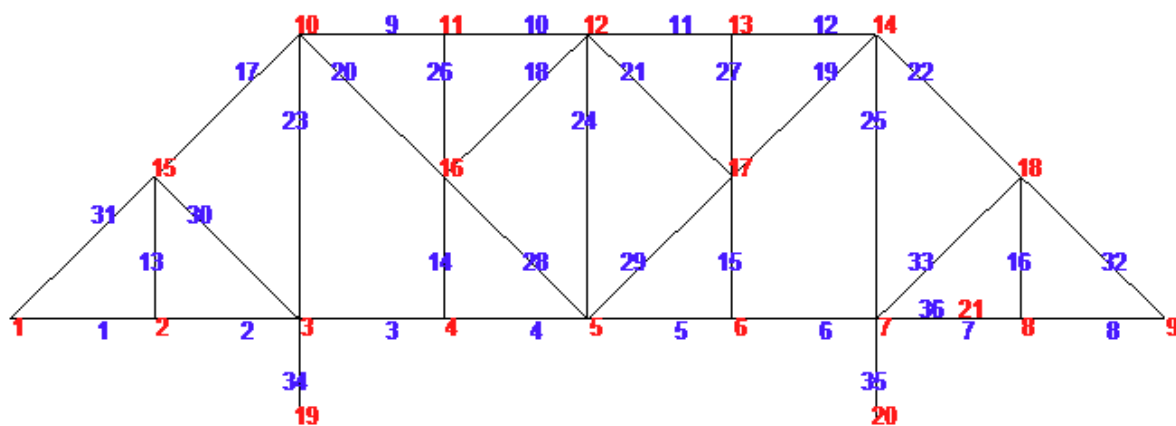


Рисунок 2— Номера стержней и узлов, $n = 2$

Задаются координаты узлов. Начало координат принимается в опоре 1. Опорные стержни крепятся к узлам (шарнирам) с номерами 3 и $4n-1$. Приведем фрагмент программы в системе Maple:

```
> for i to 4*n+1 do
> x[i]:=a*(i-1); y[i]:=0;
> end:
> for i to 4*n-3 do
> x[i+4*n+1]:=a*i+a; y[i+4*n+1]:=2*h;
> end:
> for i to 2*n do
> x[i+8*n-2]:=2*a*i-a; y[i+8*n-2]:=h;
> end:
```

Соединения стержней кодируются векторами \mathbf{n} . Координаты этих векторов содержат номера концов стержней:

```
> for i to 4*n do N[i]:=[i,i+1];end:
> for i to 4*n-4 do N[i+4*n]:=[i+4*n+1,i+4*n+2];end:
> for i to 2*n do
> N[i+8*n-4]:=[i-1+8*n-1,2*(i-1)+2];
> end:
> for i to 2*n-1 do
> N[i+10*n-4]:=[i-1+8*n-1,2*(i-1)+4*n+2];
> N[i+12*n-5]:=[i+8*n-1,2*(i-1)+4*n+2];
> N[i+14*n-6]:=[2*(i-1)+3,2*(i-1)+4*n+2];
> end:
> for i to n-1 do
> N[i+18*n-9]:=[2*(i-1)+8*n,4*(i-1)+5];
> N[i+19*n-10]:=[2*(i-1)+8*n+1,4*(i-1)+5];
> end:
> N[20*n-10]:=[3,8*n-1];
> N[20*n-9]:=[1,8*n-1];
> N[20*n-8]:=[10*n-2,4*n+1];
> N[20*n-7]:=[10*n-2,4*n-1];
> for i to 2*n-2 do
> N[i+16*n-7]:=[i-1+8*n,2*(i-1)+4*n+3];
> end:
```

Выражение для прогиба получается по формуле Максвелла-Мора:

$$\Delta = P \sum_{i=1}^{n_s-3} S_i^{(P)} s_i l_i / (EF).$$

Обозначено: EF — жесткость стержней, l_i — длина стержня с номером i , $S_i^{(P)}$ — усилие от действия распределенной нагрузки, s_i — усилия от единичной силы в середине пролета (узел с номером $2n+1$). Форма решения для ферм с разным числом панелей имеет вид ($n > 1$):

$$EF \Delta_n = P \frac{A_n a^3 + C_n c^3 + H_n h^3}{2h^2}. \quad (1)$$

Основная трудность поставленной задачи — определение зависимости коэффициентов от числа панелей. Для коэффициента A_n получено следующее однородное рекуррентное уравнение шестого порядка:

$$A_n = 4A_{n-1} - 5A_{n-2} + 5A_{n-4} - 4A_{n-5} + A_{n-6}.$$

Решение имеет вид:

$$A_n = n^2(10n^2 - 13) / 3 + ((-1)^{(n+1)} + 1) / 2.$$

Для других коэффициентов получены уравнения меньшего порядка:

$$C_n = 2C_{n-1} - 2C_{n-3} + C_{n-4}$$

$$H_n = 2H_{n-1} - H_{n-2}$$

Их решения имеют вид:

$$C_n = (8n^2 + (-1)^{(n+1)} + 1) / 2$$

$$H_n = 8(n+1)$$

Выражения для коэффициентов вместе с формулой (1) составляют решение поставленной задачи.

Оценить изменение прогиба при неограниченном увеличении числа панелей (при этом одновременно растет как общая нагрузка на ферму, так и ее длина) позволяет предел, полученный средствами Maple:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n / n^4 = 5Pa^3 / (3EFh^2).$$

Для того чтобы учесть различную жесткость стержней решетки и поясов, достаточно переписать формулу (1) в виде

$$EF\Delta_n = P \frac{A_n a^3 / \gamma_1 + C_n c^3 / \gamma_2 + H_n h^3 / \gamma_3}{2h^2}$$

, где коэффициенты относительно жесткости выражают связь некоторой фиксированной жесткости EF и жесткостей групп стержней соответствующей длины

$$EF_k = \gamma_k EF$$

Обзоры аналитических решений для прогиба плоских ферм методом индукции с применением системы Maple содержатся в [33-35].

Библиографический список

1. Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В. Формулы для частоты колебания груза в произвольном узле балочной фермы // Транспортное строительство. 2018. №12. С. 21-23
2. Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В. Аналитическое решение задачи о частоте колебания груза в произвольном узле балочной фермы в системе Maple // Строительство: наука и образование. 2018. Т. 8. Вып. 4. Ст. 3. URL: <http://nso-journal.ru>. DOI: 10.22227/2305-5502.2018.4.3
3. Пережилова Е.Д. Точное решение задачи о смещении подвижной опоры фермы с произвольным числом панелей // Научный альманах. 2016. № 9-2(23). С. 42-45.
4. Kirsanov M. N. A Precise Solution of the Task of a Bend in a Lattice Girder with a Random Number of Panels// Russian Journal of Building Construction and Architecture. 2018. No. 1(37). P.92-99.
5. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба балочной фермы с двойными раскосами// Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. Т. 14. № 2. С. 105-111.
6. Кирсанов М.Н. Аналитическая оценка прогиба и усилий в критических

- стержнях арочной фермы // Транспортное строительство. 2017. № 9. С. 8-10.
7. Кирсанов М.Н. Индуктивный анализ деформации арочной фермы // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2018. Т. 14. № 1. С. 64-70.
 8. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование деформаций плоской фермы арочного типа // *Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова*. 2015. № 3 (31). С. 42-48.
 9. Кирсанов М.Н. Сравнительный анализ жесткости двух схем арочной фермы // *Строительство уникальных зданий и сооружений*. 2015. № 9 (36). С. 44-55.
 10. Кирсанов М.Н., Степанов А.С. О зависимости деформаций плоской арочной фермы от числа панелей // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2017. № 5 (274). С. 9-14.
 11. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба арочной фермы // *Строительная механика и конструкции*. 2018. Т. 1. № 16. С. 7-11.
 12. Савиных А. С. Анализ прогиба арочной раскосой фермы, нагруженной по верхнему поясу. // *Строительство и архитектура*. 2017. Том 5. Выпуск 3 (6). С. 12-17.
 13. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета деформаций арочной фермы с произвольным числом панелей // *Строительство уникальных зданий и сооружений*. 2018. № 4 (67). С. 86-94.
 14. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет рамы с произвольным числом панелей // *Инженерно-строительный журнал*. 2018. № 6(82). С. 127–135. doi: 10.18720/MCE.82.12
 15. Кирсанов М.Н. Расчетная модель плоской фермы рамного типа с произвольным числом панелей // *Вестник МГСУ*. 2018. Т. 13. Вып. 9. С. 1184–1192. DOI: 10.22227/1997-0935.2018.10.1184-1192
 16. Kirsanov M. N. Formula for the deflection of the planar hinged-pivot frame // *Строительная механика и конструкции*. 2018. № 2 (17). С. 67-71.
 17. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба и усилий в шпренгельной ферме с произвольным числом панелей // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2018. 14(2). С. 90-95.
 18. Гавриленко А.Б., Кирсанов М.Н. Аналитическая оценка жесткости шпренгельной фермы // *Строительство и реконструкция*. 2018. 2(76). С. 11-17.
 19. Кирсанов М.Н. Монтажная схема решетчатой фермы с произвольным числом панелей // *Инженерно-строительный журнал*. 2018. № 5(81). С. 174–182. doi: 10.18720/MCE.81.17
 20. Кирсанов М.Н., Москвин В.Г. Деформации плоской фермы с усиленной решеткой // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2018. №4(279). С.10-14.
 21. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба фермы прямоугольного пространственного покрытия // *Инженерно-строительный журнал*. 2015. № 1 (53). С. 32-38.

22. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и оптимизация пространственной балочной фермы // Вестник Московского энергетического института. 2012. № 5. С. 5-8.
23. Кирсанов М.Н. Статический расчет и анализ пространственной стержневой системы // Инженерно-строительный журнал. 2011. № 6 (24). С. 28-34.
24. Кирсанов М.Н. Оценка прогиба и устойчивости пространственной балочной фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 5 (268). С. 19-22.
25. Кирсанов М.Н. Анализ зависимости прогиба фермы прямоугольного покрытия от числа панелей // Строительная механика и конструкции. 2018. №4(19). С. 52-57.
26. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой системы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2012. № 1. С. 49-53.
27. Кирсанов М.Н. Напряженное состояние и деформации прямоугольного пространственного стержневого покрытия // Научный вестник Воронежского государственного архитектурно-строительного университета. Строительство и архитектура. 2016. № 1 (41). С. 93-100.
28. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба пространственного прямоугольного покрытия // Вестник МГСУ. 2018. Т. 13. № 5 (116). С. 579-586.
29. Кирсанов М.Н. Учет строительного подъема в аналитическом расчете пространственной балочной фермы // Известия Московского государственного технического университета МАМИ. 2014. Т. 4. № 2 (20). С. 36-39.
30. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет деформаций и усилий в плоской вантовой ферме // Механизация строительства. 2018. № 1. С. 29-33.
31. Кирсанов М.Н. Дискретная модель свайного фундамента // Инженерно-строительный журнал. 2015. № 3 (55). С. 3-9.
32. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет параллелограммного механизма с произвольным числом секций // Вестник машиностроения. 2018. 1. С.37-39.
33. Осадченко Н.В. Аналитические решения задач о прогибе плоских ферм арочного типа // Строительная механика и конструкции. 2018. Т.1. №16. С.12-33.
34. Осадченко Н.В. Расчёт прогиба плоской неразрезной статически определимой фермы с двумя пролётами // Постулат. 2017. № 12. С. 28.
35. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 66–73.