

## Формула для прогиба фермы рамного типа под действием сосредоточенной нагрузки в середине пролета

*Зименков Николай Андреевич*

*НИУ «МЭИ»*

*Студент*

### Аннотация

Плоская симметричная ферма с прямолинейным верхним поясом и нижним поясом, расширенным по концам загружается постоянной нагрузкой. Поставлена задача вывести формулу зависимости прогиба фермы от числа панелей. В общем случае стрелки фермы имеют различное сечение. По некоторому числу решений для ферм с различным числом панелей методом индукции в среде символьной математики Maple получается искомая зависимость. Прогиб определяется по формуле Максвелла- Мора. Находится асимптотическое свойство решения.

**Ключевые слова:** ферма, рама, формула Максвелла-Мора, прогиб, индукция, Maple

## Formula for deflection of frame-type trusses under the action of a concentrated load in the middle of the span

*Zimenkov Nikolai Andreevich*

*NRU «MPEI»*

*Student*

### Abstract

A planar symmetrical truss with a straight upper belt and a lower belt extended at the ends is loaded with a constant load. The task is to derive a formula for the dependence of the deflection of the truss on the number of panels. In general, truss rods have a different cross section. For a certain number of solutions for trusses with different numbers of panels, induction in the environment of symbolic mathematics Maple yields the desired dependence. Deflection is determined by the formula of Maxwell – Mohr. The asymptotic property of the solution is found.

**Keywords:** frame, truss, Maxwell –Mohr's formula, deflection, induction, Maple

Known analytical solutions for flat trusses are generally obtained bar-type trusses [1-5].

Consider a truss variant, with two lateral extensions loaded with force (Fig. 1). The solution is supposed to be obtained inductively, from the analysis of a series of solutions for trusses with a consistently increasing number of panels. The inductive method was successfully used to derive formulas for arch type trusses [6–13], frame type trusses [14–16], lattice trusses [17–20], spatial trusses [21–29].

The induction method was also used to calculate cable-stayed trusses [30], regular foundations [31] and sliding scissor mechanisms [32].

The total number of rods this number  $n_s = 8n + 6$ , also includes three support rods, the deformations of which are neglected.

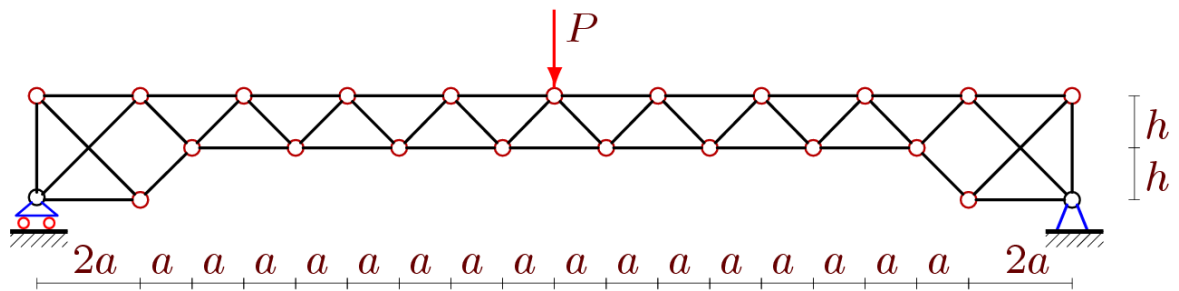


Figure 1— Truss under the load,  $n = 5$

The calculation of the forces in the rods is carried out in a program written in the language of the system of symbolic mathematics Maple. For data entry, rods and nodes are numbered (Fig. 2). The numbering of the rods starts from the bottom.

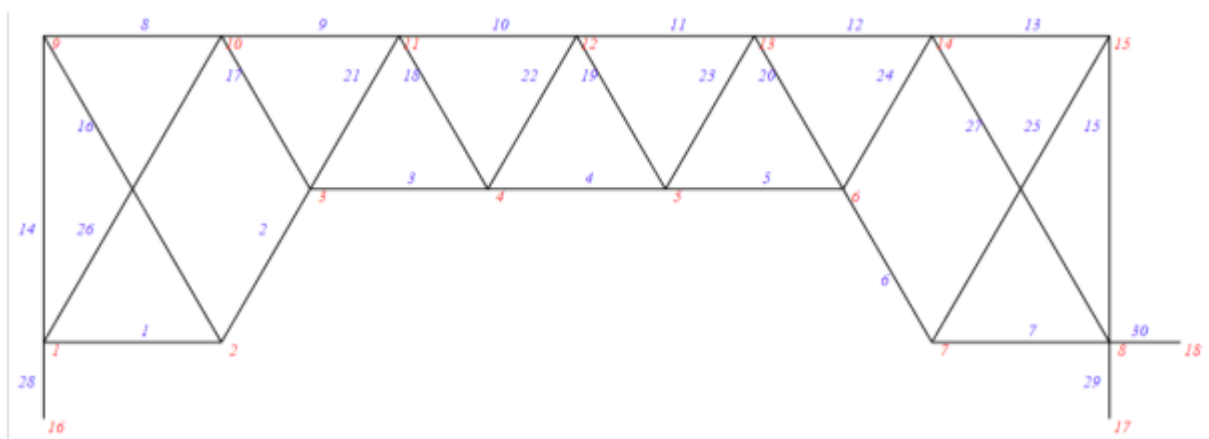


Figure 2— Numbers of rods and nodes,  $n = 3$

Sets the coordinates of the nodes. The origin is taken in support 1. Support rods are attached to the nodes (hinges) with the numbers 1 and  $2n + 2$ . Here is a fragment of the program in the Maple system:

```
> for i to 2 do
> x[i]:=2*a*(i-1):y[i]:=0:
> x[i+2*n]:=2*a*(i-1)+4*n*a-2*a:y[i+2*n]:=0:
> end:
> for i to 2*n-2 do x[i+2]:=2*a*i+a; y[i+2]:=h; end:
> for i to 2*n+1 do
> x[i+2*n+2]:=2*a*(i-1);y[i+2*n+2]:=2*h;
> end:
```

Rod connections are encoded by vectors  $\mathbf{n}$ . The coordinates of these vectors contain the numbers of the ends of the rods:

```
> for i to 2*n+1 do N[i]:=[i,i+1]; od:
> for i to 2*n do N[i+2*n+1]:=[i+2*n+2,i+2*n+3]; od:
> N[4*n+2]:=[2*n+3,1]:N[4*n+3]:=[2*n+2,4*n+3]:
> for i to 2*n-1 do N[i+4*n+3]:=[i+1,i+2*n+2];
  N[i+6*n+2]:=[i+2,i+2*n+4]; od:
> N[8*n+2]:=[2*n+4,1]:N[8*n+3]:=[2*n+2,4*n+2]:
```

The expression for the deflection is obtained by the formula of Maxwell-More:

$$\Delta = P \sum_{i=1}^{n_3-3} (S_i)^2 l_i / (EF).$$

Denoted by:  $EF$  — the stiffness of the rods,  $l_i$  — the length of the rod with the number  $i$ ,  $S_i$  — the force from the action of a single force in the middle of the span (the node with the number  $3n + 3$ ). Form solutions for farms with a different number of panels has the form ( $n > 1$ ):

$$\Delta_n = P \frac{A_n a^3 + C_n c^3 + H_n h^3}{EFh^2}. \tag{1}$$

The main difficulty of the task is to determine the dependence of the coefficients on the number of panels. For the coefficient  $A_n$ , the following fourth-order homogeneous recurrent equation is obtained.

$$A_n = 4A_{n-1} - 6A_{n-2} + 4A_{n-3} - A_{n-4}.$$

The solution of this equation is given by the rsolve operator (for the coefficients at  $c^3$ ,  $h^3$ , the formulas are obvious):

$$A_n = n(1 + 8n^2) / 3, C_n = n + 6, H_n = 1.$$

The expressions for the coefficients together with formula (1) constitute the solution of the problem.

To estimate the change in deflection with an unlimited increase in the number of panels (at the same time, both the total load on the truss and its length increase simultaneously) allows the limit obtained by means of Maple. Apply the limit operator **limit(Del/n^3,n=infinity)**. Will get

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n / n^3 = 8Pa^3 / (3EFh^2).$$

In order to take into account the different stiffness of the lattice rods and belts, it is enough to rewrite formula (1) in the form

$$EF\Delta_n = P \frac{A_n a^3 / \gamma_1 + C_n c^3 / \gamma_2 + H_n h^3 / \gamma_3}{h^2}$$

where the coefficients with respect to stiffness express the relationship of some fixed stiffness  $EF$  and the stiffnesses of groups of rods of corresponding length

$$EF_k = \gamma_k EF$$

Reviews of analytical solutions for the deflection of flat trusses by the induction method using the Maple system are contained in [33–35].

## References

1. Пережилова Е.Д. Точное решение задачи о смещении подвижной опоры фермы с произвольным числом панелей // Научный альманах. 2016. № 9-2(23). С. 42-45.
2. Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В. Формулы для частоты колебания груза в произвольном узле балочной фермы // Транспортное строительство. 2018. №12. С. 21-23
3. Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В. Аналитическое решение задачи о частоте колебания груза в произвольном узле балочной фермы в системе Maple // Строительство: наука и образование. 2018. Т. 8. Вып. 4. Ст. 3. URL: <http://nso-journal.ru>. DOI: 10.22227/2305-5502.2018.4.3
4. Kirsanov M. N. A Precise Solution of the Task of a Bend in a Lattice Girder with a Random Number of Panels// Russian Journal of Building Construction and Architecture. 2018. No. 1(37). P.92-99.
5. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба балочной фермы с двойными раскосами// Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. Т. 14. № 2. С. 105-111.
6. Кирсанов М.Н. Аналитическая оценка прогиба и усилий в критических стержнях арочной фермы // Транспортное строительство. 2017. № 9. С. 8-10.
7. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование деформаций плоской фермы арочного типа // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2015. № 3 (31). С. 42-48.
8. Кирсанов М.Н. Индуктивный анализ деформации арочной фермы // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2018. Т. 14. № 1. С. 64-70.
9. Кирсанов М.Н. Сравнительный анализ жесткости двух схем арочной фермы // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2015. № 9 (36). С. 44-55.
10. Кирсанов М.Н., Степанов А.С. О зависимости деформаций плоской арочной фермы от числа панелей // Строительная механика и расчет сооружений. 2017. № 5 (274). С. 9-14.
11. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба арочной фермы //

- Строительная механика и конструкции. 2018. Т. 1. № 16. С. 7-11.
12. Савиных А. С. Анализ прогиба арочной раскосой фермы, нагруженной по верхнему поясу. // Строительство и архитектура. 2017. Том 5. Выпуск 3 (6). С. 12-17.
  13. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета деформаций арочной фермы с произвольным числом панелей// Строительство уникальных зданий и сооружений. 2018. № 4 (67). С. 86-94.
  14. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет рамы с произвольным числом панелей // Инженерно-строительный журнал. 2018. № 6(82). С. 127–135. doi: 10.18720/MCE.82.12
  15. Кирсанов М.Н. Расчетная модель плоской фермы рамного типа с произвольным числом панелей// Вестник МГСУ. 2018. Т. 13. Вып. 9. С. 1184–1192. DOI: 10.22227/1997-0935.2018.10.1184-1192
  16. Kirsanov M. N. Formula for the deflection of the planar hinged-pivot frame // Строительная механика и конструкции. 2018. № 2 ( 17). С. 67-71.
  17. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба и усилий в шпренгельной ферме с произвольным числом панелей // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2018. 14(2). С. 90-95.
  18. Гавриленко А.Б., Кирсанов М.Н. Аналитическая оценка жесткости шпренгельной фермы// Строительство и реконструкция. 2018. 2(76). С. 11-17.
  19. Кирсанов М.Н. Монтажная схема решетчатой фермы с произвольным числом панелей // Инженерно-строительный журнал. 2018. № 5(81). С. 174–182. doi: 10.18720/MCE.81.17
  20. Кирсанов М.Н., Москвин В.Г. Деформации плоской фермы с усиленной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2018. №4(279). С.10-14.
  21. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба фермы прямоугольного пространственного покрытия // Инженерно-строительный журнал. 2015. № 1 (53). С. 32-38.
  22. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и оптимизация пространственной балочной фермы // Вестник Московского энергетического института. 2012. № 5. С. 5-8.
  23. Кирсанов М.Н. Статический расчет и анализ пространственной стержневой системы // Инженерно-строительный журнал. 2011. № 6 (24). С. 28-34.
  24. Кирсанов М.Н. Оценка прогиба и устойчивости пространственной балочной фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 5 (268). С. 19-22.
  25. Кирсанов М.Н. Анализ зависимости прогиба фермы прямоугольного покрытия от числа панелей // Строительная механика и конструкции. 2018. №4(19). С. 52-57.
  26. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой системы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2012. № 1. С. 49-53.

27. Кирсанов М.Н. Напряженное состояние и деформации прямоугольного пространственного стержневого покрытия // Научный вестник Воронежского государственного архитектурно-строительного университета. Строительство и архитектура. 2016. № 1 (41). С. 93-100.
28. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба пространственного прямоугольного покрытия // Вестник МГСУ. 2018. Т. 13. № 5 (116). С. 579-586.
29. Кирсанов М.Н. Учет строительного подъема в аналитическом расчете пространственной балочной фермы // Известия Московского государственного технического университета МАМИ. 2014. Т. 4. № 2 (20). С. 36-39.
30. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет деформаций и усилий в плоской вантовой ферме // Механизация строительства. 2018. № 1. С. 29-33.
31. Кирсанов М.Н. Дискретная модель свайного фундамента // Инженерно-строительный журнал. 2015. № 3 (55). С. 3-9.
32. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет параллелограммного механизма с произвольным числом секций // Вестник машиностроения. 2018. 1. С.37-39.
33. Осадченко Н.В. Аналитические решения задач о прогибе плоских ферм арочного типа // Строительная механика и конструкции. 2018. Т.1. №16. С.12-33.
34. Осадченко Н.В. Расчёт прогиба плоской неразрезной статически определимой фермы с двумя пролётами // Постулат. 2017. № 12. С. 28.
35. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 66–73.