

## **Математическое моделирование социально-демографических процессов на примере статистических показателей населения РФ**

*Хорольская Ирина Витальевна*

*Тихоокеанский государственный медицинский университет*

*старший преподаватель*

### **Аннотация**

В статье дается описание матричной модели. В работе используется матричная модель для описания и прогнозирования характеристик возрастно-половой структуры населения Российской Федерации, сделан прогноз на 2016-2018 гг. с применением статистических показателей.

**Ключевые слова:** математическая модель, прогнозирование, демографические процессы, популяция

## **Mathematical modeling of social-demographic processes on the example of statistical indices of the Russian population**

*Horol'skaya Irina Vital'evna*

*Pacific National Medical University*

*senior lecturer*

### **Abstract**

The article describes the matrix model. The work uses a matrix model to describe and predict the characteristics of the age and sex structure of the population of the Russian Federation, a forecast for 2016-2018 is made. with the use of statistical indicators.

**Keywords:** mathematical model, forecasting, demographic processes, population

### **Введение**

Метод матричного анализа представляет собой исследование взаимосвязей между различными объектами с помощью матричных моделей. Матричные модели строятся в виде таблиц.

Представление информации с помощью матричных моделей можно считать основополагающим для социометрии, для различных классов экономико-математических моделей, например, приводимых к задачам дискретного, линейного и нелинейного программирования. Кроме этого, оно широко используется в математической статистике, теории графов, теории игр [1].

Матричная модель может рассматриваться как вариант динамической модели. Один из ранних аналогов был разработан Лесли и Льюисом как модель, прогнозирующая будущую возрастную структуру популяции по предполагаемым коэффициентам плодovitости и выживания и известной

возрастной структуре в данный момент времени. Предполагается, что число возрастных групп в популяции равно  $n$ .

Пусть функции  $S_i(x_1 \dots x_n)$ , которые описывают переход из  $i$ -той возрастной группы в  $(i+1)$ -ю группу, являются линейными функциями численности  $i$ -той возрастной группы,  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , где  $S_i$  ( $0 < S_i \leq 1$ ) – коэффициенты выживаемости, показывающие, какая доля особей  $i$ -той группы доживет до  $(i+1)$ -го возраста. Тогда для всех групп, начиная со второй, будет выполняться:

$$X_{i+1}(t+1) = S_i * X_i(t), i = 1, 2, 3, \dots, n-1 \quad (1)$$

Вектор-столбец, координатами которого являются численности всех возрастных групп, обозначим через  $X(t)$ . Тогда:

$$X(t+1) = L * X(t), \quad (2)$$

$$\text{где } L = \begin{vmatrix} b_1 & \dots & b_{n-1} & b_n \\ S_1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & S_{n-1} & 0 \end{vmatrix} \quad (3)$$

где  $b_i \geq 0, i = 1 \dots n$ ;

$0 < S_j \leq 1, j = 1, 2 \dots n$ ;

$L$  – квадратная матрица, имеющая порядок  $n * n$  и называемая матрицей Лесли [2].

Уравнение (2) с матрицей (3) имеет название модель Лесли. Стоит упомянуть о ряде сложностей, которые появляются в приложениях модели Лесли к популяциям и связаны с ограничениями модели. Допустим, не удастся рассмотреть в  $n$ -ной (последней) возрастной группе только особей последнего репродуктивного возраста. Тогда к  $n$ -ной группе относят всех старших особей, а к матрице Лесли добавляют элемент  $p_n$  ( $0 < p_n < 1$ ), представляющий долю особей  $n$ -ной группы, выживающих за один временной интервал. Тогда матрицу  $L$  можно представить следующим образом:

$$L + \Delta(p_n) = \begin{vmatrix} b_1 & \dots & b_{n-1} & b_n \\ S_1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & S_{n-1} & p_n \end{vmatrix} \quad (4)$$

$$X_n(t+1) = S_{n-1} * X_{n-1}(t) + p_n * X_n(t) \quad (5)$$

В этом случае получается, что некоторая часть популяции живет бесконечно долго.

Другая сложность заключается в том, что не всегда можно выбрать масштаб времени так, что временные моменты  $t=1, 2, \dots$  соответствуют переходам из одной возрастной группы в другую. Тогда поступают следующим образом: вместе с величинами  $S_i$  рассматривают величины  $p_i$  ( $0 < p_i < 1$ ), представляющие долю тех особей  $i$ -той группы, которые не перешли в следующую возрастную группу к моменту времени  $i$ . Тогда матрица  $L$  имеет вид:

$$L + \Delta(p_1 \dots p_n) = \begin{vmatrix} b_1 + p_1 & b_2 & \dots & b_n \\ S_1 & p_2 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & S_{n-1} & p_n \end{vmatrix} \quad (6)$$

Особенности демографических моделей:

1. невозможность проведения активных экспериментов над человеческой популяцией для более точного построения моделей;

2. изменения параметров модели (коэффициент рождаемости, коэффициент смертности и т.д.) определяются, помимо биологических возможностей, различными социально-экономическими, политическими, психологическими факторами, которые являются трудно предсказуемыми;

3. данные берутся на основании выборочных наблюдений или статистических показателей, что приводит к большим ошибкам по сравнению с моделями, применяемыми, например, в технических системах;

4. «плавное» изменение численности, что затрудняет решение задачи идентификации модели на ограниченном отрезке времени [3].

В данной статье основное внимание будет сконцентрировано на моделировании естественного движения населения.

Оценка и прогнозирование численности и структурного состава населения регионов РФ является в настоящее время актуальной задачей.

Цель данной статьи заключается в решении задачи текущего оценивания и прогнозирования численности и возрастно-полового состава населения РФ.

### Вычислительные эксперименты

Для описания демографической модели разобьем население РФ на группы в соответствии с возрастом.

Рассмотрим первый случай. Разобьем население РФ на группы в соответствии с возрастом, не учитывая пол. Величину временного интервала, охватывающего одну возрастную группу, положим равной 10 годам. Следовательно, получим, что население РФ состоит из 9 возрастных групп: 0-9 лет, 10-19 лет, 20-29 лет, 30-39 лет, 40-49 лет, 50-59 лет, 60-69 лет, 70-79 лет, 80 лет и старше.

Для осуществления оценки и прогнозирования численности и структурного состава населения РФ используем официальные данные Росстата (используем данные за 2013-2017 года) [4]. Используя данные статистики за 2015 год, составим вектор-столбец  $X(t)$ , координатами которого являются численности всех возрастных групп. Поставим следующую задачу: пользуясь теоретическими источниками и данными Росстата, попытаемся осуществить прогнозирование численности населения на 2016 год. Для этого составим матрицу  $L$  и найдем вектор  $X(t+1) = L * X(t)$ , координатами которого будут значения прогнозируемой численности возрастных групп на 2016 год. Находим неизвестные элементы матрицы  $L$ :

$$b_1=0, b_2=0,013, b_3=0,05, b_4=0,0296, b_5=0,002, b_6=b_7=b_8=b_9=0;$$

$$p_1=p_4=0,9, p_2=p_3=p_5=p_8=0,89, p_6=0,894, p_7=0,94, p_9=0,82$$

$S_1=S_4=S_6=0,09, S_2=S_3=S_5=0,1, S_7=0,04, S_8=0,0645$ , где  $b_i$  - коэффициенты рождаемости в соответствующих возрастных группах,  $p_i$  - величины, означающие долю особей из группы, не успевших перейти в следующий возрастной класс,  $S_i (0 < S_i \leq 1)$  - коэффициенты выживаемости, показывающие, какая доля особей  $i$ -той группы доживет до  $(i+1)$ -го возраста.

При расчете данных коэффициентов были составлены соотношения, при их составлении использовались официальные статистические данные [4]. Наличие в теоретических источниках данных по соответствующим возрастным группам позволило составить соотношения и рассчитать необходимые коэффициенты за 2013-2015 гг. В качестве элементов матрицы использовались средние значения соответствующих коэффициентов за указанные года.

Найденные координаты вектора  $X(t+1)$  незначительно отличаются от официальных статистических показателей за 2016 год. Общая численность населения РФ по данным статистики составляет 146545000 человек [4]. Прогнозируемая численность населения составила 143164221 чел. Погрешность вычисления составляет 2,3 %. Гистограмма официальной и прогнозируемой численности населения на 2016 год представлена на рис. 1.

Аналогичным образом, используя составленную матрицу  $L$  и полученный путем прогнозирования вектор с координатами численности возрастных групп на 2016 год, по формуле (2) можно сделать прогноз на 2017 год. Используя данный метод, удалось осуществить прогнозирование численности и возрастного состава населения РФ на 2016-2018 гг. Полученные результаты сравнили с официальными статистическими данными за 2016-2017 года (Таблица 1). Также в данной таблице представлены полученные путем прогнозирования данные численности населения за 2018 г. Ошибка вычислений составила 3 % для 2017 года. Соответствующая гистограмма представлена на рис. 2.

Таблица 1- Численность и возрастной состав населения РФ на 2016-2018 гг.

| Возраст    | 2016      |           | 2017      |           | 2018      |
|------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
|            | прогноз   | оф.д.     | прогноз   | оф.д.     | прогноз   |
| 0-9        | 17267532  | 17730000  | 17453896  | 18140 000 | 17571915  |
| 10-19      | 13772244  | 13985000  | 13811375  | 14098000  | 13862974  |
| 20-29      | 20590756  | 20857000  | 19702997  | 19707000  | 18916805  |
| 30-39      | 22523723  | 23317000  | 22330426  | 23731000  | 22067683  |
| 40-49      | 18919214  | 19413000  | 18865236  | 19661000  | 18799798  |
| 50-59      | 21105613  | 21449000  | 20760339  | 20990000  | 20446267  |
| 60-69      | 16422599  | 16708000  | 17336748  | 17247000  | 18164974  |
| 70-79      | 8427664   | 8905000   | 8157525   | 8862000   | 7953667   |
| 80 и более | 4134876   | 4181000   | 3934183   | 4368000   | 3752190   |
| Всего      | 143164221 | 146545000 | 142352725 | 146804000 | 141536273 |

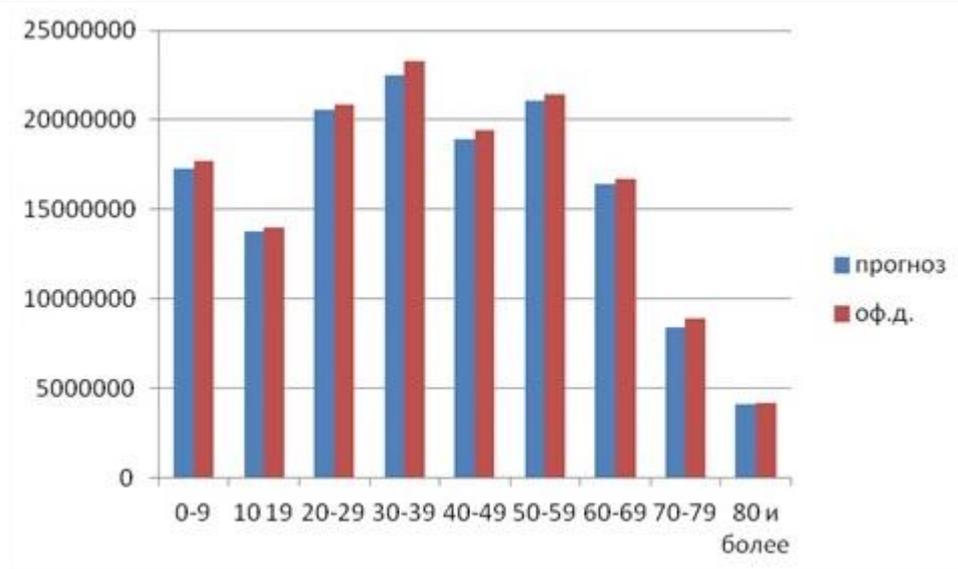


Рисунок 1 - Показатели численности населения РФ на 2016 год

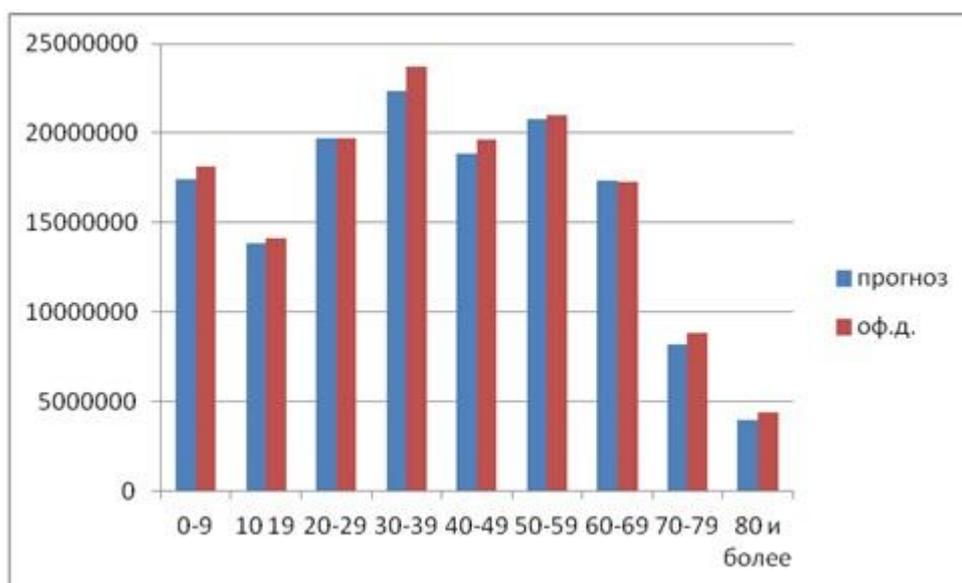


Рисунок 2 - Показатели численности населения РФ на 2017 год

Была оценена значимость различий официальных статистических данных и прогнозируемых данных за 2016-2017 гг. по критерию Стьюдента.

$t$ -критерий Стьюдента был рассчитан по формуле:

$$t = \frac{|M_1 - M_2|}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \quad (7)$$

где  $M_1$ ,  $M_2$  – средние арифметические групп,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  – стандартные отклонения групп,  $n_1$ ,  $n_2$  – кол-во значений в группах. Полученные данные представлены в Таблице 2.

Таблица 2 - Оценка значимости различий официальных статистических данных и прогнозируемых данных за 2016-2017 гг. по критерию Стьюдента

|            | 2016 г   | 2017 г   |
|------------|----------|----------|
| $M_1$      | 15907136 | 15816969 |
| $M_2$      | 16282778 | 16311556 |
| $\sigma_1$ | 6154420  | 6125097  |
| $\sigma_2$ | 6278252  | 6194214  |
| $t$        | 0,128    | 0,17     |

Как видно из табличных данных, значения  $t$  составили: для 2016 г.- 0,128; для 2017 г. - 0,17. Число степеней свободы в нашем случае равно 16.

Сравнив рассчитанные значения  $t$ -критерия с табличными значениями при соответствующей степени свободы, можно сделать вывод, что различия между официальными данными и прогнозом на 2016 - 2017 гг. не являются значимыми (рассчитанные значения  $t$ -критерия Стьюдента меньше табличных значений).

Рассмотрим второй случай. Население РФ разобьем на группы в соответствии с возрастом, но при этом учтем половой состав населения. Тогда матрица Лесли будет иметь вид:

$$\mathbf{M} = \left( \begin{array}{ccc|ccc}
 p_1^m & \dots & 0 & b_1^m & \dots & b_n^m \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & \dots & S_{n-1}^m p_n^m & 0 & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & b_1^w + p_1^w & \dots & b_n^w \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & S_{n-1}^w p_n^w
 \end{array} \right)$$

Находим неизвестные элементы матрицы  $\mathbf{M}$ :

$$b_1^m=0, \quad b_2^m=0,00665, \quad b_3^m=0,025, \quad b_4^m=0,0148, \quad b_5^m=0,001, \quad b_6^m=0, \quad b_7^m=0, \quad b_8^m = 0, \quad b_9^m=0.$$

$$b_1^w=0, \quad b_2^w=0,00665, \quad b_3^w=0,025, \quad b_4^w=0,0148, \quad b_5^w=0,001, \quad b_6^w=0, \quad b_7^w=0, \quad b_8^w = 0, \quad b_9^w=0.$$

Коэффициенты  $p_i$  для мужчин равны соответственно 0,9; 0,89; 0,89; 0,9; 0,89; 0,894; 0,93; 0,87; 0,82, для женщин – 0,9; 0,89; 0,89; 0,9; 0,89; 0,9; 0,945; 0,895; 0,82

Коэффициенты  $S_i$  для мужчин равны соответственно 0,09; 0,1; 0,1; 0,09; 0,1; 0,09; 0,04; 0,06, для женщин – 0,09; 0,1; 0,1; 0,09; 0,1; 0,097; 0,04; 0,066.

При расчете данных коэффициентов были составлены соотношения, при их составлении использовались официальные статистические данные [4]. Аналогично первому случаю, наличие в теоретических источниках данных по соответствующим возрастным группам позволило составить соотношения и рассчитать необходимые коэффициенты за 2013-2015 гг. В качестве элементов матрицы использовались средние значения соответствующих коэффициентов за указанные года.

Продлав аналогичные вычисления, получим прогноз численности и структурного состава населения на 2016-2018 гг. Показатели численности мужского и женского населения РФ на 2016-2017 гг. соответственно представлены в таблицах 3 и 4. Прогнозируемая численность населения на 2016 год составляет 142286106 человек, на 2017 год – 140628606 человек. Погрешность вычисления составляет 2,9% на 2016 год, 4,2% на 2017 год.

Таблица 3 - Показатели численности мужского населения РФ на 2016-2017 гг.

| Возраст    | 2016     |          | 2017     |          |
|------------|----------|----------|----------|----------|
|            | прогноз  | оф.д.    | прогноз  | оф.д.    |
| 0-9        | 8337761  | 9100000  | 7979801  | 9313000  |
| 10- 19     | 7054188  | 7156000  | 7028626  | 7209000  |
| 20-29      | 10457381 | 10596000 | 10012488 | 10028000 |
| 30-39      | 11171535 | 11548000 | 11100120 | 11775000 |
| 40-49      | 9124869  | 9326000  | 9126572  | 9447000  |
| 50-59      | 9565015  | 9681000  | 9463610  | 9492000  |
| 60-69      | 6622797  | 6688000  | 7020053  | 6906000  |
| 70-79      | 2656860  | 2710000  | 2576380  | 2952000  |
| 80 и более | 1022402  | 1092000  | 997781   | 922000   |
| Всего      | 66012808 | 67897000 | 65305431 | 68044000 |

Таблица 4 - Показатели численности женского населения РФ на 2016-2017 гг.

| Возраст    | 2016     |          | 2017     |          |
|------------|----------|----------|----------|----------|
|            | прогноз  | оф.д.    | прогноз  | оф.д.    |
| 0-9        | 7942671  | 8630000  | 7624220  | 8827000  |
| 10- 19     | 6718056  | 6829000  | 6693910  | 6889000  |
| 20-29      | 10133375 | 10261000 | 9690509  | 9679000  |
| 30-39      | 11352188 | 11769000 | 11230307 | 11956000 |
| 40-49      | 9794345  | 10087000 | 9738664  | 10214000 |
| 50-59      | 11611441 | 11768000 | 11429731 | 11498000 |
| 60-69      | 9866752  | 10020000 | 10450390 | 10341000 |
| 70-79      | 5745449  | 6195000  | 5536847  | 5910000  |
| 80 и более | 3109021  | 3089000  | 2928597  | 3446000  |
| Всего      | 76273298 | 78648000 | 75323175 | 78760000 |

Полученные путем прогнозирования данные численности населения за 2018 г. представлены в Таблице 5.

Таблица 5 – Прогноз численности населения на 2018 г.

| Возраст | Мужчины | Женщины |
|---------|---------|---------|
| 0-9     | 7644545 | 7324522 |
| 10- 19  | 6973659 | 6643760 |
| 20-29   | 9613977 | 9293944 |

|            |          |          |
|------------|----------|----------|
| 30-39      | 10991357 | 11076327 |
| 40-49      | 9121660  | 9678139  |
| 50-59      | 9373125  | 11260624 |
| 60-69      | 7380374  | 10984302 |
| 70-79      | 2522253  | 5373494  |
| 80 и более | 972763   | 2766881  |
| Всего      | 64593713 | 74401993 |

Аналогичным образом была оценена значимость различий официальных статистических данных и прогнозируемых данных за 2016-2017 гг. по критерию Стьюдента. Полученные данные представлены в Таблице 6.

Таблица 6 - Оценка значимости различий официальных статистических данных и прогнозируемых данных за 2016-2017 гг. по критерию Стьюдента.

|            | 2016 г  |         | 2017 г  |         |
|------------|---------|---------|---------|---------|
|            | Мужчины | Женщины | Мужчины | Женщины |
| $M_1$      | 7334756 | 8474811 | 7256159 | 8369242 |
| $M_2$      | 7544111 | 8738667 | 7560444 | 8751111 |
| $\sigma_1$ | 3463567 | 2831910 | 3399328 | 2882911 |
| $\sigma_2$ | 3560009 | 2876298 | 3536794 | 2807018 |
| $t$        | 0,126   | 0,196   | 0,186   | 0,285   |

Как видно из табличных данных, значения  $t$  составили: для 2016 г. – 0,126 для мужчин и 0,196 для женщин; для 2017 г. – 0,186 для мужчин и 0,285 для женщин. Число степеней свободы равно 16.

Сравнив рассчитанные значения  $t$ -критерия с табличными значениями при соответствующей степени свободы, можно сделать вывод, что различия между официальными данными и прогнозом на 2016 - 2017 гг. не являются значимыми (рассчитанные значения  $t$ -критерия Стьюдента меньше табличных значений для всех уровней значимости).

### Заключение

Проведенные вычислительные эксперименты подтверждают возможность решения задачи текущего оценивания и прогнозирования численности и возрастно-полового состава населения.

С помощью методов математической статистики доказано, что различия между официальными показателями численности и структурного состава населения РФ и прогностическими данными, полученными при использовании модели Лесли, не являются значимыми. Представленная матричная модель позволяет осуществить оценку и прогнозирование численности и структурного состава населения.

### Библиографический список

1. Власов М. П., Шимко П. Д. Моделирование экономических процессов. Ростов-на-Дону: Феникс, 2005.
2. Логофет Д. О., Белова И. Н. Неотрицательные матрицы как инструмент моделирования динамики популяций: классические модели и современные обобщения // Фундаментальная и прикладная математика. 2007. № 4. С. 145-164.
3. Рудалев В. Г., Кремер А. И. Математическая модель динамики структурного состава населения // Вестник ВГУ. 2007. №1.
4. Демографический ежегодник России. Стат. сборник. М., 2014-2017.
5. Абакумов А. И., Гиричева Е. Е. Моделирование зависимости возрастной структуры населения региона от его доходов // Дальневосточный математический журнал. 2003. №1. С. 316-325.
6. Абакумов А.И., Гиричева Е.Е. Возрастная структура населения в зависимости от доходов // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2006. № 1. С. 51-64.
7. Камалян Р. З., Камалян С. Р., Гергенридер К. А. Сравнительный анализ моделей роста населения Земли // Вестник ИМСИТа. 2007. №1,2.
8. Кирьянов Д. А. Прогноз рождаемости при моделировании роста численности населения // Вестник Пермского университета. 2016. № 3.