УДК 372.851

О применении графиков функций к решению задач

Габидуллина Татьяна Николаевна
Приамурский государственный университет им. Шолом-Алейхема
студент

Кириллова Дина Александровна
Приамурский государственный университет им. Шолом-Алейхема
к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры информационных систем, математики и правовой информатики

Аннотация
Умение свободно строить графики и эскизы графиков функций часто помогает решать задачи разного типа и порой является единственным средством их решения. В ряде случаев графики облегчают решение текстовых задач, уравнений и неравенств, сокращая и упрощая аналитические выкладки. Данная статья посвящена исследованию возможностей применения графиков функций к решению текстовых задач, уравнений и неравенств.
Ключевые слова: функция, график функции, текстовая задача, уравнение, неравенство.

On the use of graphs of functions to solve problems

Gabidullina Tatyana Nikolayevna
Sholom-Aleichem Priamursky State University
Student

Kirillova Dina Aleksandrovna
Sholom-Aleichem Priamursky State University
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Mathematics and legal informatics

Abstract
The ability to easily build graphs of function and sketches of graphs function often helps solve various types of tasks. In some cases, graphs make it easier to solve text problems, equations, and inequalities, reducing and simplifying analytical calculations. This article is devoted to the study of the application of graphs of functions to the solution of textual problems, equations and inequalities.
Keywords: function, graph of function, textual problem, equation, inequality.

Решение многих прикладных задач приводит к необходимости исследования графиков функций. Это связано, в частности, с необходимостью описания процессов, протекающих во времени и пространстве непрерывно. Моделями же непрерывных процессов могут служить непрерывные функции. Графическое изображение, описывающее условие задачи позволяет наглядно представить ситуацию, описанную в задаче. Информация, представленная в графической форме, легче воспринимается, графическое представление помогает «опредметить» абстрактные понятия, выделить существенные признаки объекта.

Изучение методов решения задач различного типа с применением графиков функций ведёт не только к формированию специфических математических умений и навыков, но и к повышению умственной активности обучающихся, развитию их интеллектуальных способностей, расширению кругозора, побуждению к исследовательской деятельности. Всё это способствует дальнейшему осуществлению осознанного выбора профиля обучения учащимися, а значит должно быть частью предпрофильной подготовки в средних и выпускных классах основной школы.

При всей очевидной развивающей возможности такого материала, как применение графиков функций к решению задач, он достаточно скупо представлен в курсе математики основной общеобразовательной школы. В учебниках можно видеть отдельные группы заданий, не составляющие единую содержательную линию о возможностях графических методов для решения различных задач. Задания такого типа скорее можно встретить со звёздочкой или среди олимпиадных задач.

Использование графиков функций упрощает решение текстовых задач разного уровня сложности. Графики функций целесообразно применять к иллюстрации условия текстовых задач, в которых речь идёт о некотором процессе: движении, работе, нагревании и т.д. с известным характером скорости его протекания. Например, если скорость протекания постоянная, то независимо от названия процесса, его характеристики (скорость протекания, продолжительность процесса, результат процесса) связаны одной и той же линейной зависимостью: результат процесса равен произведению скорости и времени его протекания плюс некоторое начальное состояние результата. Что приводит к необходимости исследования линейной функции и построению её графика.

Формулы выражения этой зависимости, в общем виде, имеют вид $S = vt + a$. График такой функции удобно изображать в системе координат: ось абсцисс (Ox) – ось времени, ординат (Oy) – ось результата процесса (например, пройденный путь). Графиком линейной функции служит прямая, угол наклона которой к оси абсцисс характеризует скорость процесса, а модуль тангенса этого угла равен численному значению скорости протекания процесса.

Рассмотрим на плоскости систему координат OtS, прямую, являющуюся графиком функции $S = vt + a$:

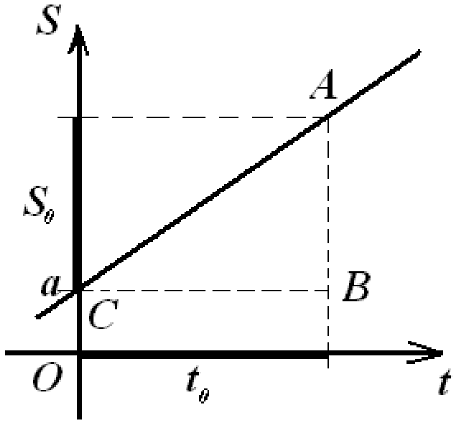

Рисунок 1 Иллюстрация зависимости $S = vt + a$

Заметим, что пройденный путь (S_0), численно равный длине отрезка AB, за время t_0 (численно равно длине отрезка CB) можно найти из геометрических соображений: из прямоугольного треугольника ABC – противолежащий катет острому углу равен произведению прилежащего катета CB и тангенса противолежащего угла, $AB = CB \cdot tg(\angle C)$. С другой стороны, по формуле $S = vt + a$ длина отрезка AB равна $S_0 = vt_0$ (рис. 1).

Таким образом, изображая графики функций, описывающих процессы, можно находить зависимости между величинами, применяя геометрические знания, на этом основано использование графиков функций при решении текстовых задач [1, 2].

Пример 1:

Мотоциклист задержался у шлагбаума на 24 мин. Увеличив после этого скорость на 10 км/ч, он наверстал опоздание за 80 км. Определите первоначальную скорость мотоциклиста [3].

Решение:

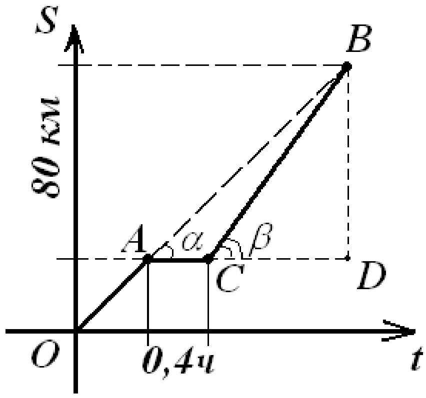

Рисунок 2 График зависимости расстояния от времени

Пусть AO – прямая – график функции, выражающей зависимость расстояния от времени при движении мотоциклиста до шлагбаума $S = v_1 t$. AC – время остановки, $AC = 24$ мин. $= 0{,}4$ ч. CB – прямая – график функции, выражающей зависимость расстояния от времени при движении мотоциклиста после остановки $S = v_2 t + a$ (рис. 2).

Первоначальная скорость движения мотоциклиста $v_1 = tg\alpha$, скорость с которой он двигался после остановки $v_2 = tg\beta$. Так как $v_1 = v_2 - 10$, то $tg\alpha = tg\beta - 10$.

Треугольник ABD – прямоугольный: $tg\alpha = \dfrac{BD}{AD}$; $tg\beta = \dfrac{80}{0{,}4 + t}$

Треугольник BCD – прямоугольный: $tg\alpha = \dfrac{BD}{CD}$; $tg\beta = \dfrac{80}{t}$

$\dfrac{80}{0{,}4+t} = \dfrac{80}{t} - 10$; $\dfrac{8}{0{,}4+t} = \dfrac{8}{t} - 1$; $\dfrac{8}{0{,}4+t} = \dfrac{8-t}{t}$;

$8t = (8-t)(0{,}4+t)$; $t^2 + 0{,}4t - 3{,}2 = 0$; $t = -2$ или $t = 1{,}6$

По смыслу задачи получим, что $t = 1{,}6$.

Значит, $v_1 = tg\alpha = \dfrac{BD}{AD} = \dfrac{80}{0{,}4+1{,}6} = \dfrac{80}{2} = 40$ (км/ч).

Пример 2:

Сегодня утром собираясь на работу, я заметил, что минутная и часовая стрелки часов совпали между 6 и 7 часами. Интересно, какое точное время показывали эти часы [4]?

Решение:

Движение часовой и минутной стрелки осуществляется равномерно, значит, может быть описано с помощью линейной функции. Будем измерять расстояния, преодолеваемые стрелками на часах, минутными делениями. Изучим зависимость между временем (t), измеряемым в минутах, и расстоянием, проходимым стрелкой за это время (S). Началом отсчета расстояний и времени считаем 12 часов.

Минутная стрелка за каждую минуту проходит одно минутное деление, значит, для минутной стрелки $S_м = t$. Но, через 60 минут эта стрелка возвращается в исходное положение. То есть, искомая функция для минутной стрелки – это кусочно-линейная функция, периодическая, с наименьшим положительным периодом – 60 минут:

$$S_м = t - 60k,\ k \le t < k+1,\quad k \ge 0.$$

Часовая стрелка за каждую минуту проходит $\dfrac{1}{12}$ часть минутного деления, значит, для неё $S_ч = \dfrac{1}{12}t$. Но, через 720 минут эта стрелка возвращается в исходное положение. То есть, искомая функция для часовой стрелки – это кусочно-линейная функция, периодическая, с наименьшим положительным периодом – 720 минут:

$$S_ч = \frac{1}{12}t - 720n\,,\ n \le t < n+1, \quad n \ge 0\,.$$

Для наглядности, построим графики функций для двенадцати часового периода времени. Точки пересечения графиков соответствуют моментам совпадения стрелок (рис. 3).

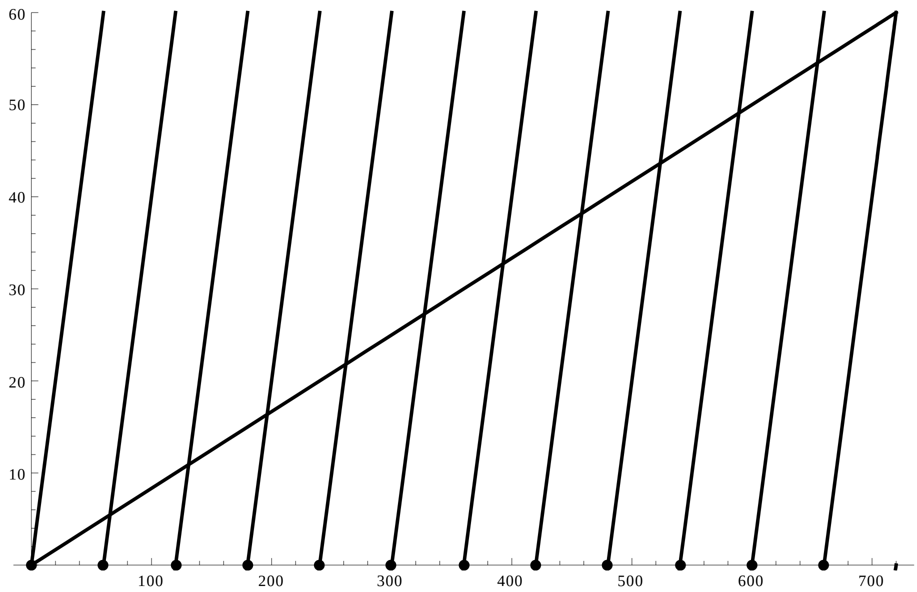

Рисунок 3 Графики функций $S_м$ и $S_ч$ при $0 \le t \le 720$

В задаче надо найти точку пересечения, расположенную между шестью и семью часами, то есть между 360-ой и 420-ой минутами (рис. 4):

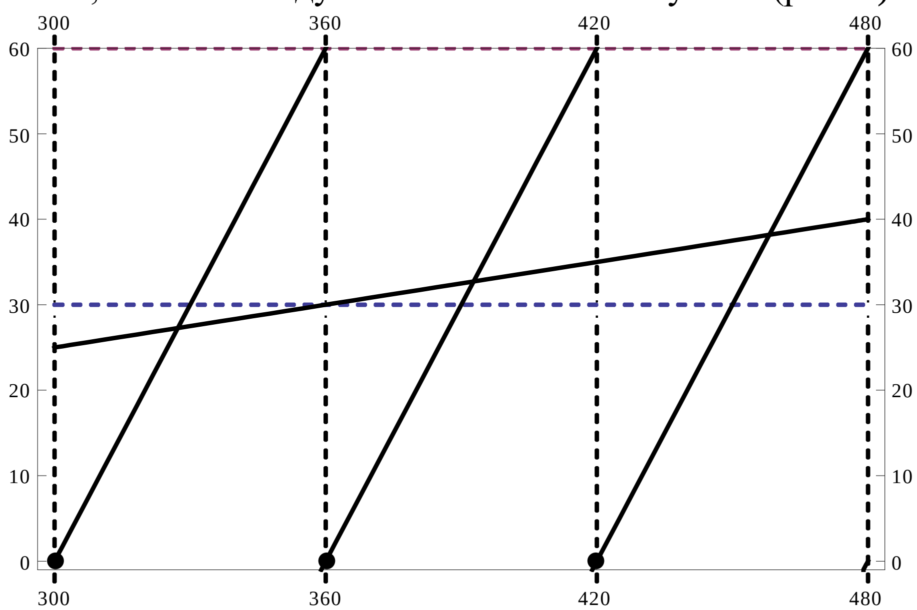

Рисунок 4 Графики функций $S_м$ и $S_ч$ при $300 \le t \le 480$

$$\begin{cases} S_м = t - 360 \\ S_ч = \dfrac{1}{12}t \end{cases} \qquad \frac{1}{12}t = t - 360 \qquad t = \frac{4320}{11} = 392\frac{8}{11}\,.$$

$392\frac{8}{11} = 360 + 32 + \frac{8}{11}$ минут – это шесть часов, тридцать две минуты и, почти, 44 секунды.

Заметим, что в [5] предлагаются существенно иные способы решения предыдущей задачи.

Существует целый ряд задач, в том числе и встречающихся на математических олимпиадах, которые наиболее удобно решать, применяя графики функций, что помогает «увидеть» задачу – установить и исследовать связи, существующие между величинами, входящими в задачу, выбрать кратчайший путь решения.

Трудно переоценить эффективность графического метода для исследования уравнений, неравенств, систем уравнений и неравенств. Для того чтобы решить уравнение с одним неизвестным графическим способом, чаще всего, применяют одну из двух схем действий:

I схема

- представить уравнение в виде $f(x) = 0$,
- построить график функции $y = f(x)$,
- абсциссы точек пересечения или касания этого графика с осью Ox равны корням исходного уравнения; если таких точек нет, то уравнение не имеет решений.

II схема

- представить уравнение в виде $f_1(x) = f_2(x)$,
- построить графики функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$,
- абсциссы точек пересечения или касания построенных графиков равны корням исходного уравнения; если таких точек нет, то уравнение не имеет решений.

Аналогично, для решения строгого неравенства с одним неизвестным графическим способом, чаще всего, применяют одну из двух схем действий:

I схема

- представить неравенство в виде $f(x) > 0$,
- построить график функции $y = f(x)$,
- решение исходного неравенства дают абсциссы точек, для которых график функции расположен над осью Ox; если таких точек нет, то неравенство не имеет решений.

II схема

- представить неравенство в виде $f_1(x) > f_2(x)$,
- построить графики функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$,
- решение исходного неравенства дают абсциссы точек, для которых график функции $y = f_1(x)$ расположен над графиком функции $y = f_2(x)$; если таких точек нет, то неравенство не имеет решений.

В случае нестрогого неравенства:

I схема

- представить неравенство в виде $f(x) \geq 0$,
- построить график функции

II схема

- представить неравенство в виде $f_1(x) \geq f_2(x)$,
- построить графики функций

$y = f(x)$,

- решение исходного неравенства дают абсциссы точек, для которых график функции расположен не ниже оси Ox; если таких точек нет, то неравенство не имеет решений.

$y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$,

- решение исходного неравенства дают абсциссы точек, для которых график функции $y = f_1(x)$ расположен не ниже графика функции $y = f_2(x)$; если таких точек нет, то неравенство не имеет решений.

Главное достоинство графического решения уравнений и неравенств состоит в том, что даже схематическое построение соответствующих графиков позволяет дать ответ на вопросы: есть ли решения у исследуемой задачи? Сколько решений имеет данное уравнение, или что собой представляет решение данного неравенства? Степень лёгкости предварительной графической прикидки решений уравнений и неравенств зависит от степени владения навыком построения эскизов графиков элементарных функций.

Существенным недостатком данного метода является то, что зачастую он позволяет лишь оценить решения, а не найти их точно.

Пример 3:

Решить уравнение $2^{-|x-3|} - |x^2 - x - 6| + 1 = 0$.

Решение:

Запишем это уравнение в виде системы: $\begin{cases} y = 2^{-|x-3|}, \\ y = |x^2 - x - 6| + 1. \end{cases}$

Построив графики полученных функций (рис. 5), видим, что уравнение имеет один корень $x = 3$.

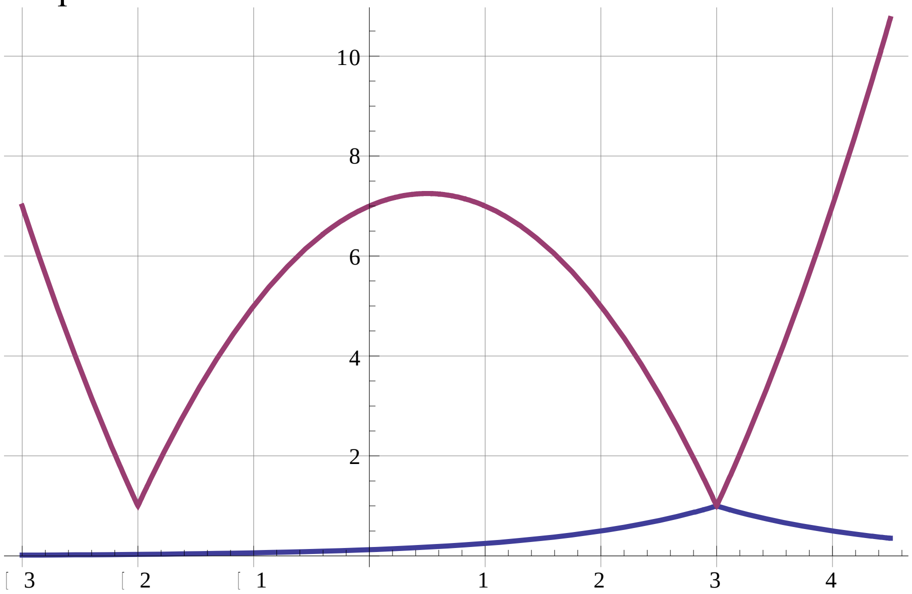

Рисунок 5 Графики функций $y = 2^{-|x-3|}$, $y = |x^2 - x - 6| + 1$

Построение графиков функций полезно и при решении систем уравнений, как линейных, так и нелинейных) с двумя неизвестными:

 ISSN 2414-4487

$\begin{cases} f_1(x;y)=0, \\ f_2(x;y)=0 \end{cases}$. В этом случае каждое из уравнений системы можно интерпретировать как функциональную зависимость между переменными x и y. Значит, для решения системы необходимо построить графики этих зависимостей. Координаты (x, y) точек пересечения или касания этих графиков дают решения исходной системы уравнений. Число общих точек графиков равно количеству решений. Если общих точек нет, то система несовместна, то есть не имеет решений.

Пример 4:

Решить систему уравнений $\begin{cases} y+1=x(x+2), \\ |x|\cdot y=1. \end{cases}$

Решение:

Для решения системы надо построить графики функций $y=x^2+2x-1$ и $y=\dfrac{1}{|x|}$.

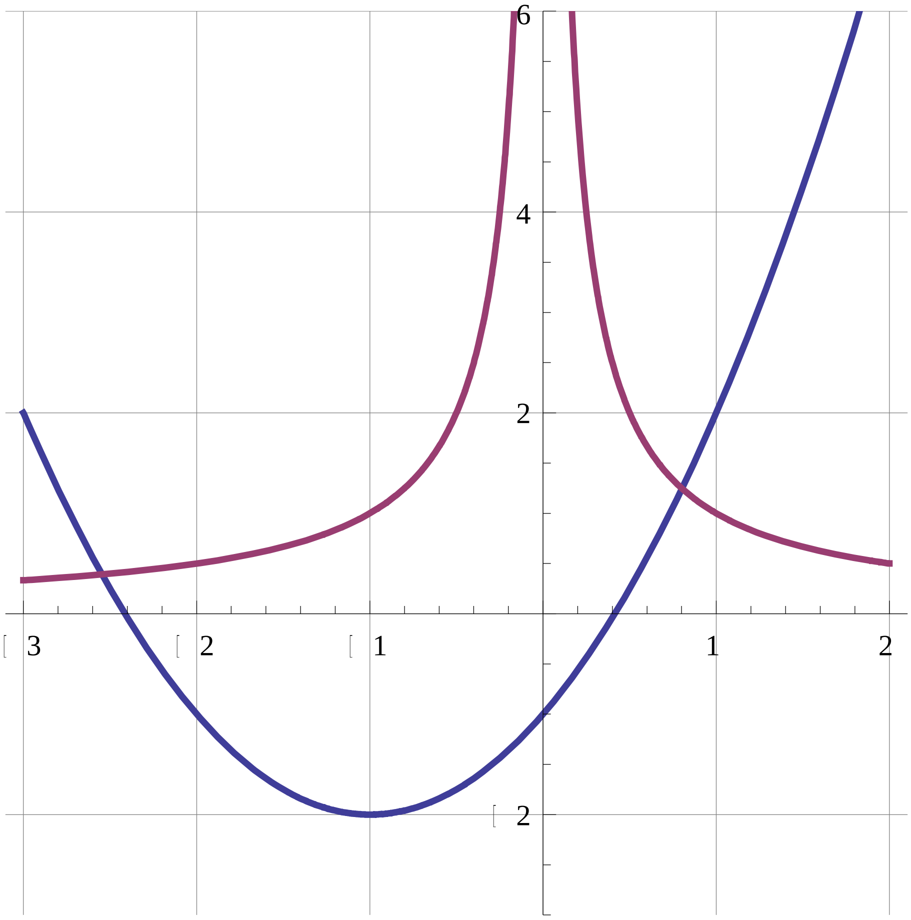

Рисунок 6 Графики функций $y=x^2+2x-1$, $y=\dfrac{1}{|x|}$

Эти графики имеют две точки пересечения (рис. 6), то есть система обладает двумя решениями, которые находятся приближённо: $x_1 \approx 0{,}8, y_1 \approx 1{,}2, x_2 \approx -2{,}6, y_2 \approx 0{,}4.$

Пример 5:

Решить систему уравнений $\begin{cases}\left(x+|x|\right)^2+\left(y+|y|\right)^2=4,\\ y=\cos 2x.\end{cases}$

Решение:

В первом квадрате первое уравнение системы может быть представлено в виде $(2x)^2+(2y)^2=4$, то есть $x^2+y^2=1$, поэтому здесь график представляет собой четверть окружности единичного радиуса с центром в начале координат. Если $x\le 0$, то $y=1$ (прямая, параллельная оси Ox), а если $y\le 0$, то $x=1$ (прямя, параллельная оси Oy). График функции $y=\cos 2x$ очевиден.

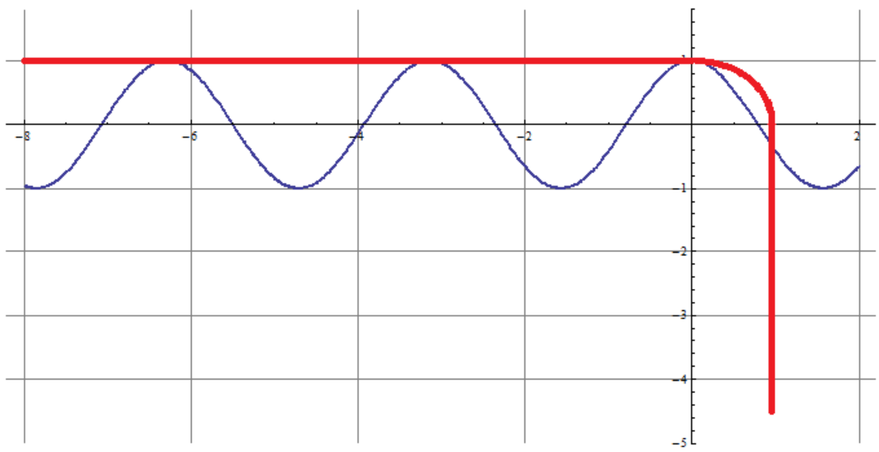

Рисунок 7 Изображение линий $\left(x+|x|\right)^2+\left(y+|y|\right)^2=4, \quad y=\cos 2x$

Построенные линии (рис. 7) имеют одну точку пересечения и бесконечное множество точек касания, что соответствует множеству решений заданной системы уравнений: $x_1=1, y_1=\cos 2$ и $x_k=-\pi k, y_k=1$, где $k\in\mathbf{N}$.

Пример 6:

Решить неравенство $\arccos x\le\frac{1}{2}\pi|x-1|$.

Решение:

Функция $y_1=\arccos x$ определена лишь на отрезке $-1\le x\le 1$, поэтому вне этой области решений исходного неравенства быть не может. Решением является совокупность тех значений x, при которых график функции $y_1=\arccos x$ проходит ниже графика $y_2=\frac{1}{2}\pi|x-1|$; кроме того, в решение войдут и значения абсцисс точек пересечения двух графиков, так как неравенство нестрогое.

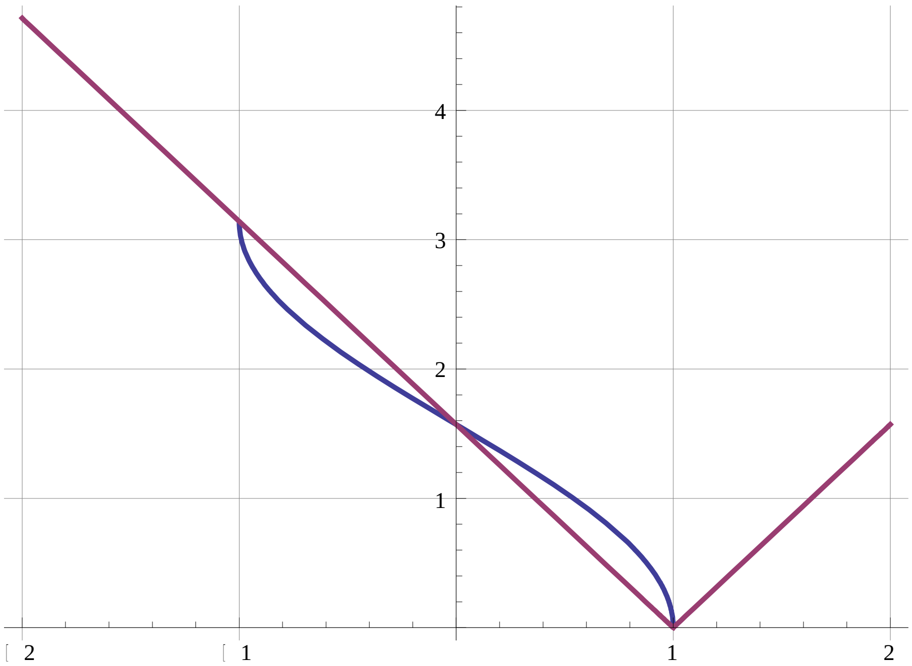

Рисунок 8 Графики функций $y = \arccos x$, $y = \frac{1}{2}\pi|x-1|$

Из рассмотрения графиков (рис. 8) находим решение $-1 \le x \le 0$, $x = 1$.

Решением неравенства с двумя переменными x и y называется любая пара чисел x_0 и y_0, удовлетворяющая этому неравенству. Графически это соответствует заданию точки с координатами (x_0, y_0). Совокупность всех точек, координаты которых удовлетворяют некоторому неравенству, называется областью его решений.

Для графического решения неравенства с двумя переменными необходимо построить график функции $y = f(x)$ (для неравенств вида $y < f(x)$, $y > f(x)$, $y \le f(x)$, $y \ge f(x)$) или геометрическое место точек $F(x, y) = 0$ (для неравенств вида $F(x, y) > 0$, $F(x, y) \ge 0$). Такие построения разбивают всю плоскость Oxy на две или более областей. Область, в которой выполняется исходное неравенство, и представляют собой область его решений.

Пример 7:

Решить неравенство $y > x^2 - 5x + 4$

Решение:

График функции $y = x^2 - 5x + 4$ представляет собой параболу. Координаты любой точки, лежащей выше параболы, удовлетворяют заданному неравенству (на рис. 9 область решений неравенства закрашена, причем точки самого графика в эту область не входят).

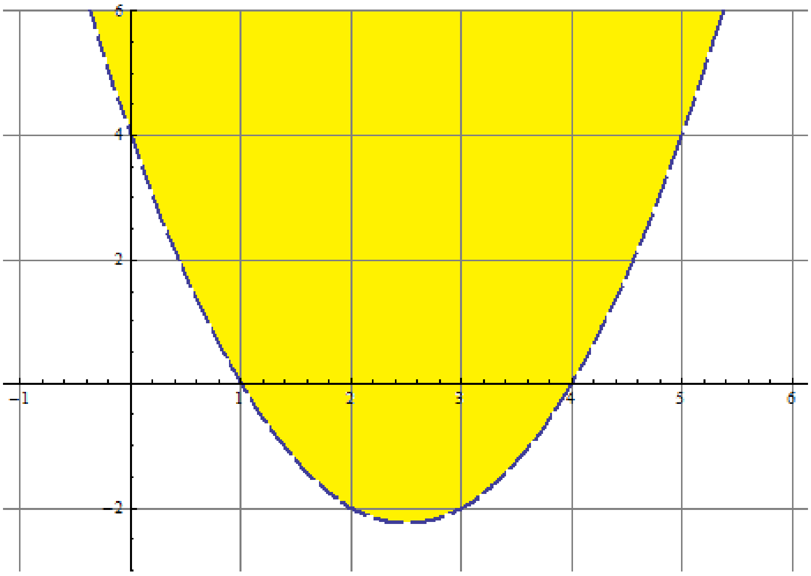

Рисунок 9 Решение неравенства $y > x^2 - 5x + 4$

Пример 8:
Решить неравенство $\lg(y - x) \le 0$.
Решение:

Это неравенство равносильно системе неравенств $\begin{cases} y - x \le 1, \\ y - x > 0. \end{cases}$

Графики функций $y = x + 1$ и $y = x$ представляют собой параллельные прямые. Областью решений неравенства $y - x \le 1$ является полуплоскость, лежащая ниже прямой $y = x + 1$, включая точки самой прямой (рис. 10).

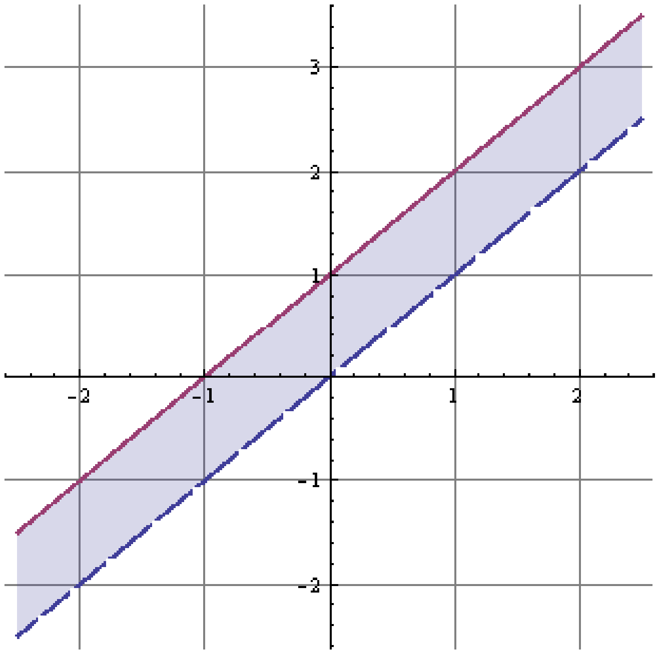

Рисунок 10 Решение неравенства $\lg(y - x) \le 0$

Область решения неравенства $y - x > 0$ – полуплоскость выше прямой $y = x$. Общая часть этих полуплоскостей (или их пересечение) содержит точки, удовлетворяющие обоим неравенствам. Следовательно, областью решений неравенства $\lg(y - x) \leq 0$ является полоса, заключенная между двумя прямыми (закрашенная часть), причем одна из границ полосы – прямая $y = x + 1$ – также входит в область решений.

В заключении отметим существующее противоречие между значительной ролью методов решения задач с применением графиков функций и недостаточным уровнем разработанности соответствующего материала в учебниках по математике. Один из возможных способов на пути разрешения указанного противоречия – это разработка элективного курса, посвящённого изучению возможностей применения графиков функций к решению задач, в том числе, и прикладного характера. Разработка и реализация элективных курсов является значительным моментом в организации предпрофильного и профильного обучения. Они являются важнейшим средством построения индивидуальных образовательных программ, так как в наибольшей степени связаны с выбором каждым школьником содержания образования в зависимости от его интересов, способностей, последующих жизненных планов.

Библиографический список

1. Лескевич Т.И. Геометрический метод решения текстовых задач на движение и работу. Зельва: УО «Государственная гимназия №1 г.п. Зельва», 2013. 34 с.
2. Пирютко О.Н. Графический метод решения текстовых задач. Минск: Новое знание, 2010. 132 с.
3. Арефьева И.Г. Математика. Пособие – репетитор для подготовки к централизованному тестированию. Минск: Аверсэв, 2015 752 с.
4. Мирошин В.В. Решение задач с параметрами. Теория и практика М.: Издательство «Экзамен», 2009. 286 с.
5. Кириллова Д.А., Одоевцева И.Г. «Задача о часах» как средство формирования научного мировоззрения при обучении математике // Мир науки - 2017. Т. 5. №3. С. 1 – 9