УДК 512.5

Матричные уравнения первой степени

Попов Иван Николаевич
Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова
к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры математики

Аннотация
В работе рассматриваются матричные уравнения с числовыми элементами. Приведены примеры неразрешимых матричных уравнений. Сформулированы задачи, приводящие к построению матричных уравнений. Приведен один из методов решения матричных уравнений первой степени и их систем в системе компьютерной математике Maple.
Ключевые слова: матрица, матричное уравнение, группа, подгруппа.

Matrix equations of the first degree

Popov Ivan Nikolaevich
Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov
Candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, associate professor of the Department of Mathematics

Abstract
The paper deals with matrix equations with numerical elements. Examples of unsolvable matrix equations are given. The problems leading to the construction of matrix equations are formulated. One of the methods for solving matrix equations of the first degree and their systems in the system of computer mathematics Maple is presented.
Keywords: matrix, matrix equation, group, subgroup.

Введение

Уравнения – одни из важных объектов в математике. Не исключением являются и матричные уравнения. Это связано с тем, что сами матрицы, как в постановке задач, так и в их решении используются достаточно часто.

В статье будут использоваться обозначения: E – единичная матрица; Θ – нулевая матрица; A^{T} – матрица, транспонированная к матрице A; A^{-1} – матрица, обратная к квадратной матрице A; $|A|$ – определитель квадратной матрицы A.

Сложение матриц осуществляется поэлементно, и тем самым обладает свойствами сложения чисел, в том числе и коммутативностью. Умножение матриц определяется через скалярное произведение строки одной матрицы на столбец другой матрицы, и свойством, например, коммутативности не обладает, что затрудняет решение матричных уравнений.

Решения матричных уравнений (по их количеству, способам решений и так далее) могут кардинально отличаться от решений числовых уравнений.

Например, решением числового уравнения $ax=a$, где $a \neq 0$, является $x=1$. Решениями же матричного уравнения $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ являются матрицы вида $X = \begin{pmatrix} -2x_{21}+1 & -2x_{22}+2 \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$, где $x_{21}, x_{22} \in R$, и тем самым решений матричного уравнения бесконечно много.

Решая числовое квадратное уравнение $x^2-2x+1=0$, получаем $x=1$. Решая матричное уравнение $X^2-2X+E=\Theta$, получаем две бесконечные серии решений $X = \begin{pmatrix} 1 & x_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x_{12} \in R$, и $X = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{(x_{22}-1)^2}{x_{21}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x_{22}, x_{21} \in R$ и $x_{21} \neq 0$.

Под матричным уравнением будем понимать равенство сумм, в которых каждое слагаемое есть произведение матриц-констант и матриц-переменных подходящей размерности, чтобы можно было бы осуществить произведение и в дальнейшем сложение матриц. Для слагаемого можно определить число вхождений в его запись матриц-переменных, называемое степенью слагаемого. Степень матричного уравнения – наибольшая степень его слагаемых, принимающая целые неотрицательные значения. Матрицы-переменные будем обозначать буквами $X, Y, Z \ldots$, матрицы-константы – буквами $A, B, C, \ldots$

В записи слагаемых матричного уравнения могут также присутствовать числа в качестве коэффициентов.

Например, $AXBXY^2 + AY^2BYXY = \Theta$ есть матричное уравнение 5-й степени, $2AX + XA + 3BY + C = \Theta$ – уравнение 1-й степени.

В статье сделан акцент на матричные уравнения первой степени.

Целью статьи является представить задачи (в большей степени из теории групп), приводящие к построению матричных уравнений первой степени, и указать способ решения таких уравнений с помощью системы компьютерной математики Maple.

В работах [1] и [4] изложен материал по теории групп. Информацию по теории матриц можно найти в работах [2] и [3]. В работе [3] также изложен теоретический материал по поводу матричных уравнений.

1. Примеры неразрешимых матричных уравнений

Очевидно, что не все матричные уравнения разрешимы. Для решения вопроса об их неразрешимости могут быть использованы свойства матриц, их числовые характеристики и так далее. Рассмотрим примеры.

А) $AX - XA = E$, $A, X, E \in M_{n \times n}(R)$, A – фиксированная матрица.

Уравнение $AX - XA = E$ является уравнением первой степени.

Для доказательства неразрешимости этого уравнения используем след матрицы. След $\mathrm{tr}(A)$ квадратной матрицы A – это сумма элементов главной диагонали. Справедливо: если $A, B \in M_{n\times n}(R)$, то $\mathrm{tr}(A \pm B) = \mathrm{tr}(A) \pm \mathrm{tr}(B)$ и $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. Если считать, что уравнение разрешимо, то

$$AX - XA = E,\ \mathrm{tr}(AX - XA) = \mathrm{tr}(E),$$

$$\mathrm{tr}(AX) - \mathrm{tr}(XA) = n,\ \mathrm{tr}(AX) - \mathrm{tr}(AX) = n,\ 0 = n,$$

что не так, значит, матричное уравнение $AX - XA = E$ решений не имеет.

Б) $XAX = -A^{\mathrm{T}}$, $A, X \in M_{(2n+1)\times(2n+1)}(R)$, A – обратимая матрица.

Данное уравнение является уравнением второй степени.

Для доказательства воспользуемся определителем квадратной матрицы. Так как $|AB| = |A|\cdot|B|$ и $|A^{\mathrm{T}}| = |A|$ для квадратных матриц A и B одной и той же размерности, то, предполагая разрешимость уравнения, получаем:

$$XAX = -A^{\mathrm{T}},\ |XAX| = |-A^{\mathrm{T}}|,\ |X|\cdot|A|\cdot|X| = (-1)^{2n+1}|A^{\mathrm{T}}|,\ |X|^2\cdot|A| = -|A|.$$

Так как матрица A является обратимой, то $|A| \neq 0$ и тогда $|X|^2 = -1$, что не так. Поэтому матричное уравнение при данных условиях не имеет решений.

Аналогично доказывается, что уравнение $X^s \cdot A \cdot X^t = -A^{\mathrm{T}}$, где s и t – натуральные числа одной и той же четности, $A, X \in M_{(2n+1)\times(2n+1)}(R)$, A – обратимая матрица, не имеет решений.

В) $AX = B$, $A, X, B \in M_{n\times n}(R)$, A и B – соответственно вырожденная и невырожденная матрицы.

Данное уравнение является уравнением первой степени.

Для доказательства неразрешимости уравнения можем воспользоваться тем, что произведение вырожденной матрицы (матрицы, в которой строки линейно зависимы) на произвольную матрицу есть вырожденная матрица.

Так как матрица A является вырожденной и матрица B является невырожденной, и если считать, что уравнение $AX = B$ имеет решения, то приходим к противоречию с тем, слева находится вырожденная матрица AX, а справа – невырожденная матрица B. Поэтому уравнение не имеет решений.

Можем заметить, что вырожденность обеих матриц A и B не влечет разрешимость уравнения $AX = B$, где $A, X, B \in M_{n\times n}(R)$.

2. Задачи, приводящие к построению матричных уравнений

А) Выяснение принадлежности матрицы матричной группе, заданной аналитически.

Например, пусть $M = \{AX + XA \mid X \in M_{n\times n}(R)\}$. Так как $(M_{n\times n}(R);+)$ – абелева группа, то, используя критерий, легко показать, что $(M;+)$ – ее подгруппа. Принадлежность матрицы $C \in M_{n\times n}(R)$ группе M определяется разрешимостью матричного уравнения $C = AX + XA$ первой степени.

Пусть $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 6\end{pmatrix}$ и $C=\begin{pmatrix}6 & -8\\ 16 & -10\end{pmatrix}$. Решением уравнения $C = AX + XA$ является $X=\begin{pmatrix}3x_{22}+4 & -3x_{22}/2-5/2\\ -2x_{22} & x_{22}\end{pmatrix}$, где $x_{22}\in R$. Получаем, что $C\in M$.

Если же $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix}$ и $C=\begin{pmatrix}9 & 5\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, то уравнение $C = AX + XA$ имеет единственное решение $X=\begin{pmatrix}7/5 & 4/5\\ -3/5 & -2/5\end{pmatrix}$. Значит, $C\in M$.

Б) Нахождение пересечений подгрупп матричной группы, заданных аналитически.

Например, пусть $M_1=\{AX \mid X\in M_{n\times n}(R)\}$ и $M_2=\{XA \mid X\in M_{n\times n}(R)\}$, где A – фиксированная матрица из $M_{n\times n}(R)$. Можно показать, что $(M_1;+)$ и $(M_2;+)$ – подгруппы группы $(M_{n\times n}(R);+)$. Пересечение любого числа подгрупп группы есть ее подгруппа, тогда $M_1\bigcap M_2$ – подгруппа группы $(M_{n\times n}(R);+)$ и $M_1\bigcap M_2=\{B\in M_{n\times n}(R)\mid (\exists X,Y\in M_{n\times n}(R))(B=AX=YA)\}$. В частности, в пересечение попадут матрицы, для которых $X=Y$. Тем самым получаем матричные уравнения $AX=YA$ и $AX = XA$, каждое из которых имеют первую степен, при фиксированной матрице A.

Пусть $A=\begin{pmatrix}6 & 2\\ 4 & 4\end{pmatrix}$. Справедливо:

$$B=\begin{pmatrix}6 & 2\\ 4 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 3\\ 10 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 6 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6 & 2\\ 4 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}32 & 24\\ 48 & 24\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 10 & 3\end{pmatrix} \text{ и } Y=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 6 & 3\end{pmatrix}.$$

Значит, $B=AX=YA\in M_1\bigcap M_2$. Заметим, что $X\neq Y$.

Решением уравнения $AX=YA$ являются матрицы

$$X=\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\ -3(x_{11}-y_{11})+2y_{12} & (-3x_{12}+2y_{12})+y_{11}\end{pmatrix},$$

$$Y=\begin{pmatrix}y_{11} & y_{12}\\ -2(x_{11}-y_{11})+2x_{12} & (-3x_{12}+2y_{12})+x_{11}\end{pmatrix}.$$

Отметим, что решить уравнение $AX = XA$ – это значит найти все матрицы X , которые перестановочны с данной матрицей A. Решение этого уравнения можно записать в виде $X=s\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, где $s,t\in R$.

В) Определение более простого способа (упрощение) задания группы с матрицами в качестве ее элементов.

Например, пусть $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ и $M=\{X\in M_{2\times 2}(R)\mid 2AX=3XA\}$. Легко показать, что $(M;+)$ – абелева группа. Для упрощения задания группы M

следует решить матричное уравнение $2AX = 3XA$ первой степени при данной матрице A. Решая уравнение, получаем, что $X = x \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, где $x \in R$.

Следовательно,

$$M = \left\{ x \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, x \in R \right\}.$$

Тем самым получаем простое строение группы M. В частности, легко определить принадлежность какой-то матрицы из группы $M_{2\times2}(R)$ группе M, выяснить свойства самой группы M и так далее.

Г) Нахождение аннулятора для матрицы.

Аннулятором для матрицы $A \in M_{n\times n}(R)$ называется множество матриц $X \in M_{n\times n}(R)$, для которых выполняется равенство $AX = \Theta$, которое можно рассматривать как матричное уравнение первой степени. В этом случае говорят о правом аннуляторе. Очевидно, что для любой обратимой матрицы ее аннулятор состоит только из нулевой матрицы. В общем случае нулевая матрица является аннулятором любой матрицы из множества $M_{n\times n}(R)$.

Например, для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ правым аннулятором является множество матриц $X = \begin{pmatrix} -2s & -2t \\ s & t \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $s, t \in R$.

Д) Нахождение прообразов относительно преобразования, заданного матрицей.

Пусть $f(x; y) = (x; y) \cdot A$, где $A \in M_{2\times2}(R)$, – преобразование плоскости, при котором точка $(x; y)$ переходит в точку $(x; y) \cdot A$. Если A – обратимая матрица, то существует единственная точка $(x; y)$, что $(u; v) = (x; y) \cdot A$ для данной точки $(u; v)$, и $(x; y) = (u; v) \cdot A^{-1}$. Если же матрица A обратимой не является, то при известной точке $(u; v)$ точек $(x; y)$ может либо не быть, либо быть бесконечно много.

Получаем уравнение $Z \cdot A = W$ первой степени при известных матрицах $A \in M_{2\times2}(R)$ и $W \in R^2$ относительно матрицы $Z \in R^2$.

Например, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$, то решениями уравнения $Z \cdot A = W$ при $W = (8;12)$ являются матрицы $Z = (-2z + 4; z)$, $z \in R$. На рисунке 1 указана точка $(8;12)$, соединенная линиями с некоторыми ее точками-прообразами относительно преобразования $f(x; y)$.

Обозначая первую компоненту матрицы $(-2z + 4; z)$ через x, вторую – через y, получаем систему

$$\begin{cases} x = -2z + 4; \\ y = z, \end{cases}$$

откуда $x = -2y + 4$, и все прообразы относительно преобразования $f(x;y)$ принадлежат одной прямой, заданной уравнением $x = -2y + 4$.

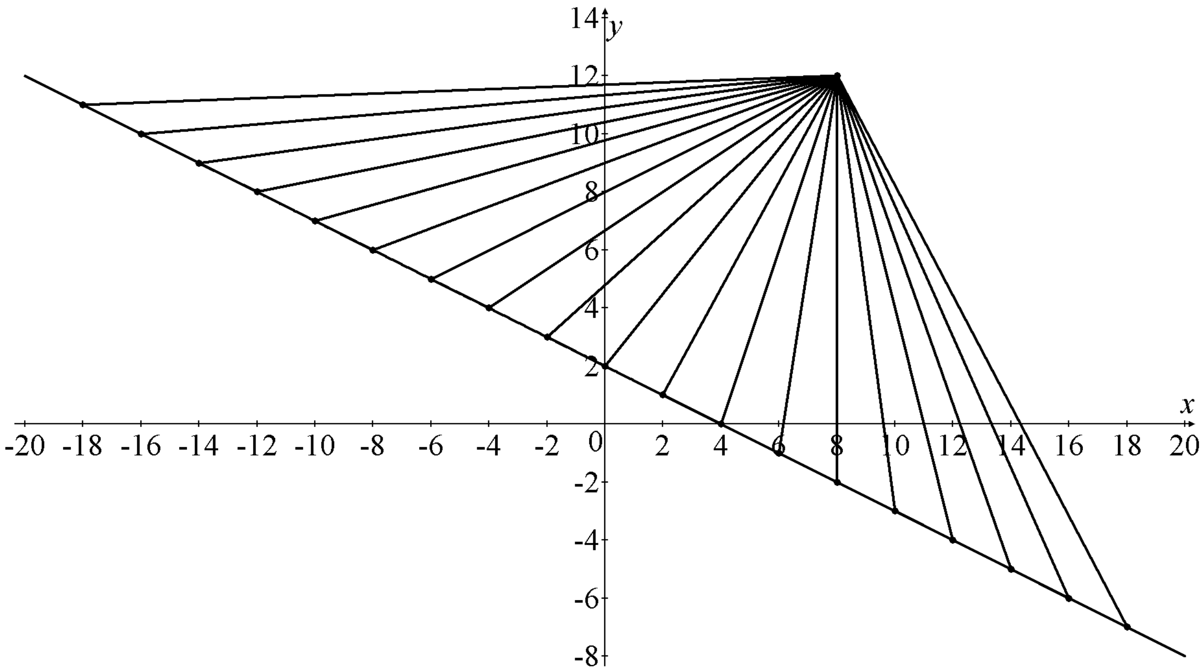

Рисунок 1 – Прообразы точки $(8;12)$ относительно преобразования $f(x;y)$

Уравнение в данном случае имеет бесконечно много решений.

Рассмотрим общий случай. Пусть $A \in M_{2\times 2}(R)$, $A \neq \Theta$ и $|A| = 0$. Тогда

$$A = \begin{pmatrix} a & \beta a \\ \alpha a & \alpha\beta a \end{pmatrix},\ a, \alpha, \beta \in R,\ a \neq 0.$$

Если $(u;v) = (x;y)\cdot A$, то справедливо следующее: $v = \beta \cdot u$ и $x = -\alpha y + \dfrac{u}{a}$. Это означает, что все прообразы точки $(u;\beta\cdot u)$ принадлежат прямой $x = -\alpha y + \dfrac{u}{a}$.

Е) Решение задач в группе, изоморфной некоторой матричной группе.

Пусть G – группа, изоморфная некоторой матричной группе M по сложению или умножению матриц. Тогда решение задач в группе G можно свести к решению задач, сформулированных на языке матриц, используя соответствующий изоморфизм групп. Решив задачу в группе M, с помощью обратного изоморфизма, получаем решение задачи в группе G.

Рассмотрим следующий пример.

Симметрическая группа $(S_n;\circ)$ – группа подстановок с композицией в качестве групповой операции. Эта группа изоморфна мультипликативной матричной группе M. В каждой матрице из группы M в каждой строке и каждом столбце содержится ровно одна 1, остальные элементы равны 0. Если

$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix} \in S_n$, где $j_1, j_2, \ldots, j_n$ – попарно различные числа из множества $\{1;2;\ldots;n\}$, то подстановке φ сопоставляется матрица $A_{j_1, j_2, \ldots, j_n}$, в которой $(1;j_1),(2;j_2),\ldots,(n;j_n)$-элементы равны 1 (первый элемент в паре указывает номер строки, в которой находится 1, второй – номер столбца). Например,

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \mapsto A_{3,2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицу $A_{j_1, j_2, \ldots, j_n}$ можно также обозначать A_φ, подчеркивая, что матрица A_φ порождается подстановкой φ.

Рассмотрим задачу. Пусть требуется найти все подстановки из группы S_4, которые перестановочны с подстановкой $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача равносильна задаче: найдите все матрицы из группы $M_{4\times 4}(R)$, в каждой из которых в каждой строке и каждом столбце ровно по одной 1, остальные элементы равны 0, перестановочные с матрицей $A_{2,4,1,3}$.

Решение задачи сводится к решению уравнения $A_{2,4,3,1} \cdot X = X \cdot A_{2,4,3,1}$ первой степени с дополнительными условиями на матрицу X. Общим решением уравнения является

$$X = \begin{pmatrix} x_{44} & x_{24} & x_{43} & x_{14} \\ x_{14} & x_{44} & x_{43} & x_{24} \\ x_{34} & x_{34} & x_{33} & x_{34} \\ x_{24} & x_{14} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix}, \text{ где } A_{2,4,3,1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что в каждой строке и каждом столбце матрицы X ровно по одной 1, то $x_{34} = x_{43} = 0$ и $x_{33} = 1$. Тогда

$$X = \begin{pmatrix} x_{44} & x_{24} & 0 & x_{14} \\ x_{14} & x_{44} & 0 & x_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_{24} & x_{14} & 0 & x_{44} \end{pmatrix}.$$

Придавая x_{44}, x_{24}, x_{14} конкретные значения 0 или 1, получаем, что матрица X может иметь три различных вида:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

По каждой матрице строится подстановка в группе S_4:

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix},\ \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ \varphi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Каждая из этих подстановок перестановочна с исходной подстановкой φ и других подстановок в группе S_4 с требуемым свойством нет.

Рассмотрим еще одну задачу в группе S_4. Пусть требуется найти все подстановки σ, для которых справедливо равенство $\varphi \circ \sigma = \sigma \circ \psi$ для данных подстановок $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ и $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Ясно, что задача равносильно задаче о решении матричного уравнения $A_{2,4,3,1} \cdot X = X \cdot A_{4,2,1,3}$ первой степени, $X \in M_{4\times 4}(R)$ и в матрице X только одна 1 в каждой строке и каждом столбце, остальные ее элементы равны 0, и

$$A_{2,4,3,1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_{4,2,1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение уравнения $A_{2,4,3,1} \cdot X = X \cdot A_{4,2,1,3}$ имеет вид:

$$X = \begin{pmatrix} x_{43} & x_{42} & x_{44} & x_{41} \\ x_{44} & x_{42} & x_{41} & x_{43} \\ x_{34} & x_{32} & x_{34} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix}.$$

Учитывая особенность матрицы X, получаем, что

$$X = \begin{pmatrix} x_{43} & 0 & x_{44} & x_{41} \\ x_{44} & 0 & x_{41} & x_{43} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_{41} & 0 & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix}.$$

Получаем, что уравнение $A_{2,4,3,1} \cdot X = X \cdot A_{4,2,1,3}$ имеет три решения:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем, что уравнение $\varphi \circ \sigma = \sigma \circ \psi$ имеет также три решения:

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},\ \varphi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

E) Нахождение обратной матрицы.

Нахождение обратной матрицы к квадратной матрице $A \in M_{n\times n}(R)$ сводится к решению матричного уравнения $AX = E$ первой степени, $X \in M_{n\times n}(R)$. При этом матрица A должна обладать условием: $|A| \neq 0$. При этом условии уравнение имеет единственное решение $X = A^{-1}$. Невыполнение этого условия ведет к неразрешимости матричного уравнения.

Например, решением уравнения $AX = E$ при $A = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ является матрица $X = A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -9 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Для нахождения обратной матрицы можно использовать союзную (присоединенную) матрицу, метод элементарных преобразований. А так же в отдельных случаях специальные методы, основанные на свойствах самих матриц. Например, верно равенство: $A_{\varphi}^{-1} = A_{\varphi^{-1}}$, где $\varphi \in S_n$, где φ^{-1} – подстановка, обратная к подстановке φ. В некоторых же случаях нахождение обратной матрицы целесообразно свести к решению системы линейных уравнений или использовать эвристические методы, нежели применять универсальные методы нахождения обратной матрицы. Например, для матрицы $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, где $\alpha, \beta \in R$ и $\alpha \cdot \beta \neq 0$, обратная матрица имеет вид $\begin{pmatrix} 1/\alpha & 0 \\ 0 & 1/\beta \end{pmatrix}$, которая определяется достаточно тривиально.

3. Матричные уравнения $AX = B$ и $XA = B$

Решения уравнений $AX = B$ и $YA = B$ при квадратных матрицах A и B не обязаны совпадать, возможен даже случай, что одно из этих уравнений имеет решение, а другое – нет. Например, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$, то решение уравнения $AX = B$ принимает вид $X = \begin{pmatrix} -2x_{21} + 3/2 & -2x_{22} + 1/2 \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$, где $x_{21}, x_{22} \in R$, при этом уравнение $YA = B$ решений не имеет.

Если рассматривать случай обратимой матрицы A, то оба матричных уравнения $AX = B$ и $YA = B$ разрешимы и $X = A^{-1}B$ и $Y = BA^{-1}$.

4. Использование СКМ Maple к решению матричных уравнений

Матричные уравнения 1-й степени от нескольких матриц-переменных могут быть сведены к решению системы линейных уравнений от элементов матриц-переменных в качестве переменных системы. С помощью системы компьютерной математики (СКМ) Maple, как и во многих программах для решения задач по математике, можно решить системы линейных уравнений. Если система имеет бесконечно много решений, то множество переменных системы будет разбито на свободные и зависимые, которые будут выражены линейно через свободные переменные. В итоге матрицы-переменные будут найдены и представлены в виде матриц только от свободных переменных, хотя «вперемешку» в том смысле, что матрицы-переменные будут выражены не только от своих элементов, но и, возможно, от элементов других матриц-переменных.

Например, рассмотрим матричное уравнение $AX+4YA+2CZ=B$, имеющее первую степень, при $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 6 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -16\\ 10 & -17\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ и $X,Y,Z\in M_{2\times 2}(R)$.

Для его решения можно воспользоваться следующим набором команд СКМ Maple:

```
1 | A:=[[1,1],[4,3]]:
2 | B:=[[3,5],[0,0]]:
3 | C:=[[1,2],[1,1]]:
4 | X:=matrix(2,2,[]):Y:=matrix(2,2,[]):Z:=matrix(2,2,[]):
5 | L:=evalm(A&*X+4*Y&*A+2*C&*Z): R:=evalm(B):
6 | LR:={}:
7 | for i from 1 to 2 do for j from 1 to 2 do LR:=LR union {L[i,j]=R[i,j]} od od;
8 | S:=solve(LR):
9 | MX:=subs(S,evalm(X));MY:=subs(S,evalm(Y));MZ:=subs(S,evalm(Z));
```

Приведем некоторые комментарии к программе. В первых трех строках оглашаются матрицы A,B,C, в четвертой – матрицы-переменные X,Y,Z. В 5-й строке записывается уравнение: L – левая часть, R – правая часть; L и R являются матрицами. В 6-й строке организуется множество LR, которое в начале расчетов является пустым. В 7-й строке множество LR заполняется равенствами соответствующих элементов матриц L и R. Тогда LR – есть система линейных уравнений с переменными, совпадающими с элементами матриц X,Y,Z. В 8-й строке проводится решение системы уравнений. В 9-й осуществляется вывод матриц-переменных X,Y,Z.

При данных матрица A,B,C программа выдает результат:

$$MX=\begin{pmatrix}8Y_{12}+Z_{21}-4Y_{22}+\dfrac{4}{3} & X_{12}\\ -24Y_{12}-2Z_{11}-4Z_{21}+1 & X_{22}\end{pmatrix},$$

$$MY=\begin{pmatrix}\dfrac{3}{4}X_{22}-2Y_{12}+\dfrac{3}{2}Z_{12}+3X_{12}+2Y_{21}+4Y_{22}+\dfrac{9}{2} & Y_{12}\\ Y_{21} & Y_{22}\end{pmatrix},$$

$$MZ=\begin{pmatrix}Z_{11} & Z_{12}\\ Z_{21} & -3X_{12}-X_{22}-2Y_{21}-4Y_{22}-2Z_{12}-\dfrac{17}{2}\end{pmatrix}.$$

Общее число переменных равно 12, 8 свободных и 4 зависимых переменных соответственно. Свободные переменные могут принимать любые значения из множества действительных чисел. Следовательно, данное уравнение имеет бесконечно много решений относительно матриц-переменных X, Y, Z.

Видим, что матрицы X, Y, Z таковы, что элементы, их составляющие, зависят от элементов каждой из этих матриц.

Решение систем матричных уравнений 1-й степени можно осуществить путем добавления во множество LR новых уравнений от элементов матриц-переменных от второго, третье и так далее матричного уравнения, входящего в систему матричных уравнений.

Например, рассмотрим систему матричных уравнений

$$\begin{cases} AX = BY; \\ BX = AY, \end{cases}$$

где $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$. В этом случае программа для решения системы может иметь вид:

```
A:=[[2,4],[4,8]]:
B:=[[3,2],[6,4]]:
X:=matrix(2,2,[]):Y:=matrix(2,2,[]):
L1:=evalm(A&*X):R1:=evalm(B&*Y):
L2:=evalm(B&*X):R2:=evalm(A&*Y):
LR:={}:
for i from 1 to 2 do for j from 1 to 2 do
LR:=LR union {L1[i,j]=R1[i,j]} union {L2[i,j]=R2[i,j]} od od;
S:=solve(LR):
MX:=subs(S,evalm(X));MY:=subs(S,evalm(Y));
```

Решение системы будем иметь вид:

$$MX = \begin{pmatrix} -6X_{21} + 4Y_{11} & X_{12} \\ X_{21} & \frac{5}{2}X_{12} - 4Y_{22} \end{pmatrix}, \; MY = \begin{pmatrix} Y_{11} & 4X_{12} - 6Y_{22} \\ -4X_{21} + \frac{5}{2}Y_{11} & Y_{22} \end{pmatrix}.$$

Здесь $X_{12}, X_{21}, Y_{11}, Y_{22}$ – свободные переменные, которые могут принимать любые действительные значения.

Заключение

Любая система линейных уравнений может быть записана в матричном виде. Тем самым получаем матричное уравнение. Если основная матрица системы является квадратной и обратимой, решение системы может быть найдено методом обратной матрицы или методом Крамера. В статье показана важность обратного перехода от матричного уравнения первой степени к системе линейных уравнений. Для большинства матричных уравнений метод сведения его к системе уравнений от элементов матриц-переменных есть единственно возможный метод его решения.

В конкретных случаях, когда матрицы-константы, входящие в запись матричного уравнения первой степени, известны, уравнение может решено с помощью компьютерных программ.

Библиографический список

1. Александров П.С. Введение в теорию групп. М.: Наука, 1980. 144 с.
2. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969. 368 с.
3. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967. 576 с.
4. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. М.: Наука, 1972. 240 с.