

Разработка и реализация алгоритма расчета напряженно-деформированного состояния пластины

Ждан Ольга Юрьевна

*Амурский государственный университет
магистрант*

Бушманов Александр Вениаминович

*Амурский государственный университет
к. т. н., доцент, зав. кафедрой информационных и управляющих систем*

Аннотация

В работе представлен алгоритм расчета напряженно-деформированного состояния объекта. В результате разработки алгоритма написан программный код для решения задач по определению напряженно-деформированного состояния пластины.

Ключевые слова: напряженно-деформированное состояние, пластина, алгоритм, программа, Java.

Development and realization algorithm for calculating stress-strain state plate

Zhdan Olga Jurevna

*Amur State University
Master's students*

Bushmanov Aleksandr Veniaminovich

*Amur State University
Candidate of technical sciences, associate professor, Head of the Department of Information and Control Systems*

Abstract

In this research we present the algorithm for calculating the stress-strain state of the object. As a result of the development of the algorithm there was developed the program code for solving of stress-strain state of the plate.

Keywords: stress-strain state, plate, algorithm, software, Java.

Введение

Теория плоского напряженно-деформированного состояния ставит своей задачей определение внутренних напряжений, деформаций и перемещений в различных точках плоского деформируемого твёрдого тела произвольной формы и размеров. Определение напряженно-деформированного состояния пластины может осуществляться

аналитическими, экспериментальными и расчетно-экспериментальными методами.

Благодаря своей универсальности в программной реализации и естественности механической природы, среди аналитических методов особое место занимает метод конечных элементов.

Целью работы является разработка программы для расчета напряженно-деформированного состояния пластины.

Для реализации данной цели был выбран язык программирования Java, благодаря его следующим преимуществам:

- предоставляет возможность исполнения одной и той же программы на различных платформах;
- имеет большое количество стандартных и сторонних библиотек;
- имеет высокую производительность и стабилен в работе.

Теоретические основы

Для решения задачи разработаем алгоритм на основе метода конечных элементов. Математическое описание деформирования твердых тел сводится к системе уравнений, решение которой представляет достаточно сложную задачу из-за большого количество неизвестных параметров, позволяющих адекватно описать деформируемую среду.

В качестве элемента объекта для расчета используем линейный трехузловой элемент (рисунок 1), так как он единственный плоский элемент, для которого не требуется численное интегрирование, и благодаря чему на первом этапе упростится метод разбиения конструкции на элементы.

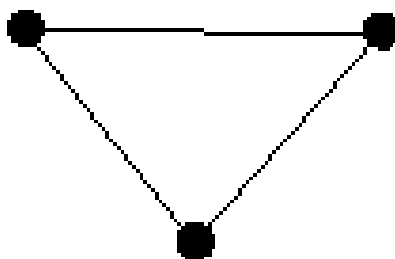


Рисунок 1 - Линейный трехузловой элемент

Рассматриваемый объект должен быть разделен на большое количество мелких элементов, в нашем случае – треугольников, таким образом заменяем непрерывную среду линейными трехузловыми элементами, образующими сетку.

Для получения решения в виде вектора перемещений, необходимо решить общее уравнения для поиска напряженно-деформированного состояния[6]:

$$[K][\delta] = [R], \quad (1)$$

где $[K]$ – матрица жесткости; $[\delta]$ – вектор перемещений; $[R]$ – вектор нагрузок, то есть вектор внешних сил.

Суть глобальной матрицы жесткости представляет собой суперпозицию матриц жесткости каждого элемента. Для каждого элемента конструкции можем определить такую же матрицу жесткости:

$$[k]^e [\delta]^e = [F]^e, \quad (2)$$

где $[k]^e$ – матрица жесткости e -го элемента; $[\delta]^e$ – вектор перемещений узлов e -го элемента; $[F]^e$ – вектор узловых сил e -го элемента.

В свою очередь, расчет матрицы жесткости для линейного трехузлового элемента $[k]^e$ производится по формуле[6]:

$$[k]^e = [B]^T [D] [B] A t, \quad (3)$$

где $[B]$ – градиентная матрица, $[D]$ – матрица упругости, A – площадь элемента, $t = const$ – толщина элемента.

Матрица упругости описывает физические свойства материала и задается следующим образом:

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

где ν – коэффициент Пуассона; E – модуль Юнга.

Так как каждый узел сетки входит в состав нескольких элементов, то его перемещение не будет зависеть от того, в составе какого элемента рассматривается этот узел. Если просуммировать все уравнения для каждого узла, то межэлементные узловые силы уйдут, и глобальная матрица жесткости определяется по следующей формуле:

$$[K] = \sum_{e=1}^n [k]^e, \quad (5)$$

где: $[K]$ – глобальная матрица жесткости; $[k]^e$ – матрица жесткости e -го элемента.

Численный эксперимент

В качестве примера рассмотрим следующую задачу: объект квадратной формы, низ которого закреплен, а на верхнюю грань действуют растягивающие усилия. Объект имеет 4 узла и два треугольных элемента, которые взаимодействуют в узлах 1 и 2. Узлы 0 и 1 объекта закреплены, причем узел 0 закреплен на шарнирно-неподвижной опоре, в то время как 1 – на шарнирно подвижной опоре (для него запрещено перемещение в направлении оси y). Узловые силы действуют на узлы 2 и 3 по направлению $\vec{(0,1)}$.

В качестве тестовых параметров использовались значения, приведенные в таблице 1.

Таблица 1 – Свойства элементов

	Модуль Юнга, МПа, E	Коэффициент Пуассона, ν
Материал	2000	0.3

На рисунке 2 представлена конечно-элементная модель объекта, а также показаны закрепления и нагрузки.

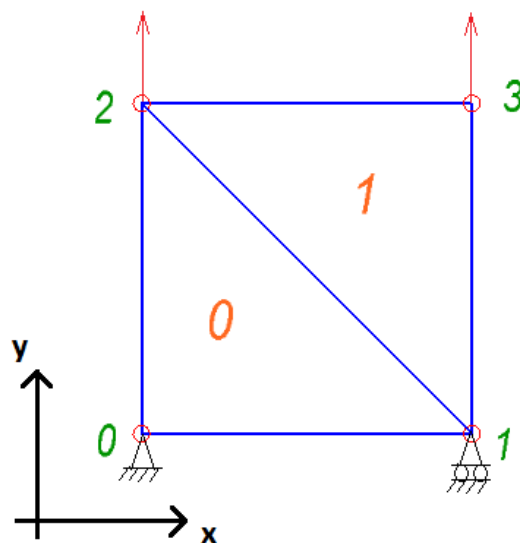


Рисунок 2 – Конечно-элементная модель задачи

Для линейного трехузлового элемента градиентная матрица B по следующей формуле:

$$[B] = \begin{bmatrix} [C]_{1,0}^{-1} & 0 & [C]_{1,1}^{-1} & 0 & [C]_{1,2}^{-1} & 0 \\ 0 & [C]_{2,0}^{-1} & 0 & [C]_{2,1}^{-1} & 0 & [C]_{2,2}^{-1} \\ [C]_{2,0}^{-1} & [C]_{1,0}^{-1} & [C]_{2,1}^{-1} & [C]_{1,1}^{-1} & [C]_{2,2}^{-1} & [C]_{1,2}^{-1} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Элементы матрицы $[C]$ находятся по формуле:

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix}, \quad (7)$$

где x и y соответствующие координаты i -го, j -го и k -го элементов.

Сложив матрицы жесткости всех элементов, получим систему линейных уравнений, которая не может быть решена без учета закреплений и приложенных нагрузок. С механической точки зрения, незакрепленная система может совершать любые большие перемещения, а под действием внешних сил и вовсе перейдет в движение. Математически это приведет к тому, что полученная СЛАУ не является линейно независимой, а, следовательно, не имеет единственного решения.

Для того чтобы решить СЛАУ необходимо применить закрепления к некоторым узлам. Перемещения этих узлов должны быть установлены в ноль или в некоторую заранее заданную величину. В простейшем случае, рассмотрим только закрепления узлов, без начальных смещений.

Чтобы закрепить узел, соответствующий элемент матрицы должен быть установлен в единицу, и все элементы в строке и столбце содержащие этот элемент должны быть установлены в ноль. Уравнение с этим узлом, явно даст нулевое смещение для этого узла, а нули в соответствующем

столбце исключат это смещение из других уравнений. Так же не должно быть никаких внешних сил, действующих на закрепленный узел в направлении в котором действует ограничение. Таким образом, так как нулевой узел закреплен как в направлениях осей ox и oy , а первый узел только в направлении оси oy , то получим из следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{bmatrix} k_{0x,0x} & k_{0x,0y} & k_{0x,1x} & k_{0x,1y} & k_{0x,2x} & k_{0x,2y} & k_{0x,3x} & k_{0x,3y} \\ k_{0x,0y} & k_{0y,0y} & k_{0y,1x} & k_{0y,1y} & k_{0y,2x} & k_{0y,2y} & k_{0y,3x} & k_{0y,3y} \\ k_{0x,1x} & k_{1x,0y} & k_{1x,1x} & k_{1x,1y} & k_{1x,2x} & k_{1x,2y} & k_{1x,3x} & k_{1x,3y} \\ k_{0x,1y} & k_{1y,0y} & k_{1y,1x} & k_{1y,1y} & k_{1y,2x} & k_{1y,2y} & k_{1y,3x} & k_{1y,3y} \\ k_{0x,2x} & k_{2x,0y} & k_{2x,1x} & k_{2x,1y} & k_{2x,2x} & k_{2x,2y} & k_{2x,3x} & k_{2x,3y} \\ k_{0x,2y} & k_{2y,0y} & k_{2y,1x} & k_{2y,1y} & k_{2y,2x} & k_{2y,2y} & k_{2y,3x} & k_{2y,3y} \\ k_{0x,3x} & k_{3x,0y} & k_{3x,1x} & k_{3x,1y} & k_{3x,2x} & k_{3x,2y} & k_{3x,3x} & k_{3x,3y} \\ k_{0x,3y} & k_{3y,0y} & k_{3y,1x} & k_{3y,1y} & k_{3y,2x} & k_{3y,2y} & k_{3y,3x} & k_{3y,3y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{0x} \\ \delta_{0y} \\ \delta_{1x} \\ \delta_{1y} \\ \delta_{2x} \\ \delta_{2y} \\ \delta_{3x} \\ \delta_{3y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{0x} \\ F_{0y} \\ F_{1y} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \end{bmatrix} \quad (8)$$

получим новую СЛАУ:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{1x,1x} & 0 & k_{1x,2x} & k_{1x,2y} & k_{1x,3x} & k_{1x,3y} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{2x,1x} & 0 & k_{2x,2x} & k_{2x,2y} & k_{2x,3x} & k_{2x,3y} \\ 0 & 0 & k_{2y,1x} & 0 & k_{2y,2x} & k_{2y,2y} & k_{2y,3x} & k_{2y,3y} \\ 0 & 0 & k_{3x,1x} & 0 & k_{3x,2x} & k_{3x,2y} & k_{3x,3x} & k_{3x,3y} \\ 0 & 0 & k_{3y,1x} & 0 & k_{3y,2x} & k_{3y,2y} & k_{3y,3x} & k_{3y,3y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{0x} \\ \delta_{0y} \\ \delta_{1x} \\ \delta_{1y} \\ \delta_{2x} \\ \delta_{2y} \\ \delta_{3x} \\ \delta_{3y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_{1y} \\ 0 \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

где k_{it_i, jt_j} – матрица жесткости для координаты t_i -го узла и для координаты t_j j -го узла; δ_{it} – перемещение координаты t i -го элемента; F_{it} – узловые силы действующие на координату t i -го элемента

Полученная на этом шаге система линейных уравнений может быть решена любым доступным способом. В данном случае будем использовать метод Гаусса для решения СЛАУ и в результате получим вектор перемещения.

Напряжения для каждого элемента находим по следующей формуле:

$$[\sigma]^e = [D][B][\delta]^e, \quad (10)$$

где $[\sigma]^e$ – вектор напряжений e -го элемента; $[\delta]^e$ – вектор перемещений узлов e -го элемента; $[B]$ – градиентная матрица, $[D]$ – матрица упругости.

Таким образом, получаем вектор напряжений элемента $[\sigma]^e$, который представляет собой тензором напряжений в точке. Тензор можно представить в виде матрицы:

$$[\sigma]^e = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}, \quad (11)$$

где σ_x и σ_y – нормальные напряжения, вектор нормали которых направлен к осям x и y соответственно; τ_{xy} и τ_{yx} – касательные напряжения, первый

индекс которых направление действия компоненты напряжения, а второй – направление вектора нормали к площадке.

Чтобы получить напряжение элемента как скалярную величину σ^e удобнее всего перейти к напряжениям по Мизесу[1]:

$$\sigma^e = \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2}. \quad (12)$$

Алгоритм

На основании приведенной выше теории и численного эксперимента можно использовать следующий алгоритм решения задачи расчета напряженно-деформированного состояния пластины:

1. Ввести начальные значения: задание узлов и элементов объекта, его закрепления и приложенные нагрузки, а также коэффициент Пуассона и модуль Юнга используемого материала.

2. Рассчитать матрицу упругости по формуле 4.

3. Рассчитать градиентные матрицы для каждого элемента пластины на основании формул 6 и 7.

4. Рассчитать матрицы жесткости каждого элемента пластины по формуле 3.

5. Сложить матрицы жесткости каждого элемента и получаем глобальную матрицу жесткости объекта.

6. Решить систему линейных аналитических уравнений 1 методом Гаусса и получить вектор перемещений.

7. Найти вектор напряжения для каждого элемента по формуле 10.

8. Из векторов напряжений элементов вычислить по формуле 12 скалярное значение напряжения каждого элемента объекта.

9. Вывести вычисленные перемещения узлов, напряжения элементов, а также применить полученные данные к объекту и получить деформированный меш объекта с полем напряжений.

Результаты расчета

По данному алгоритму было разработано программное обеспечение. Для реализации был выбран язык Java и математическая библиотека la4j. На вход программы подаются начальные значения: коэффициент Пуассона и модуль Юнга для материала, описания узлов и элементов, а также закрепления и приложенные узловые силы. На рисунке 3 показан интерфейс программы при вводе данных и отображение недеформированного меша с полем напряжений.

После нахождения решения поставленной задачи появляется новое окно, изображенное на рисунке 4 и содержащее найденные вектор перемещений и напряжения элементов. Также здесь отображается деформированный меш с полем напряжений.

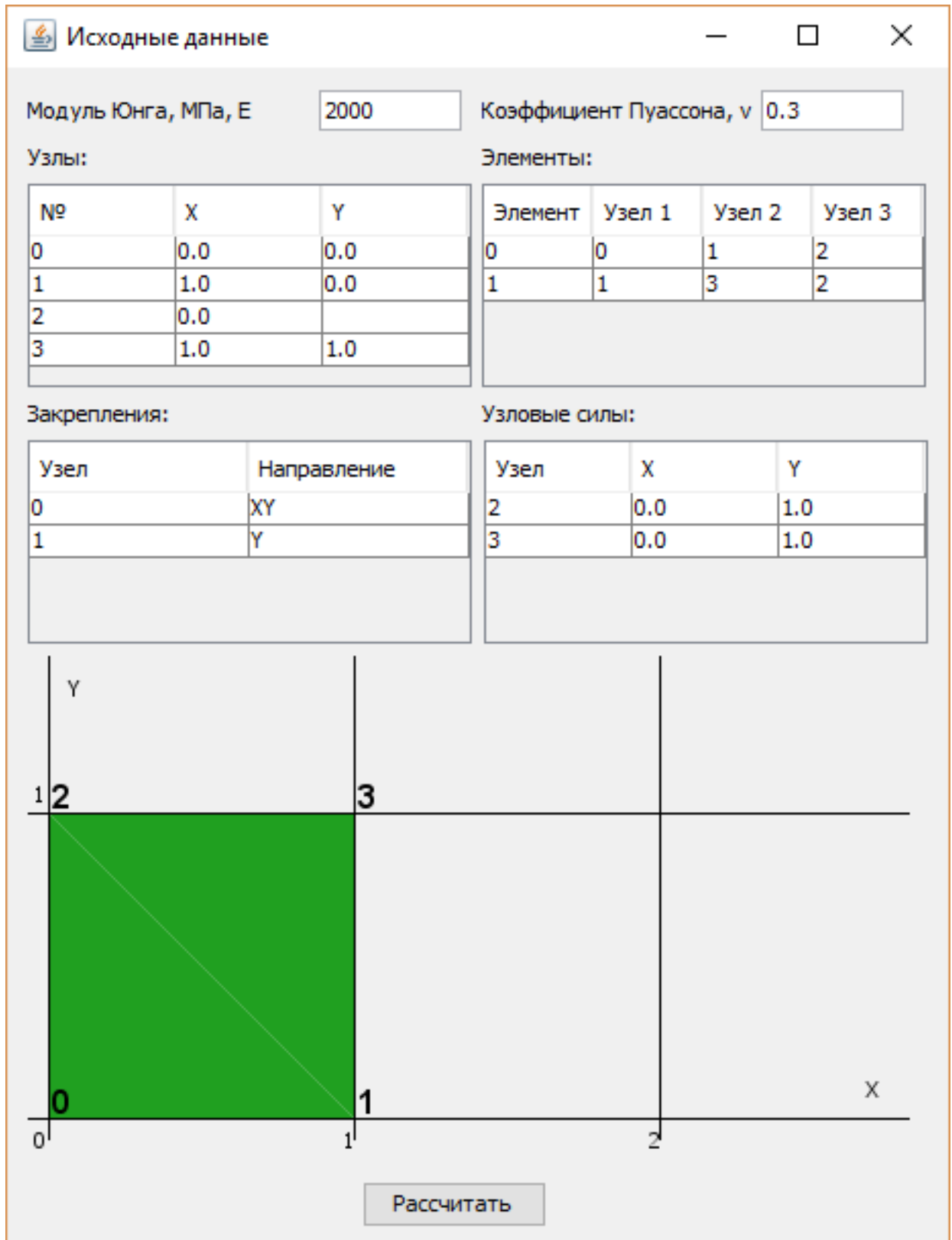


Рисунок 3 – Интерфейс программы при вводе данных. Изображение недеформированного меша с полем напряжений тестовой задачи

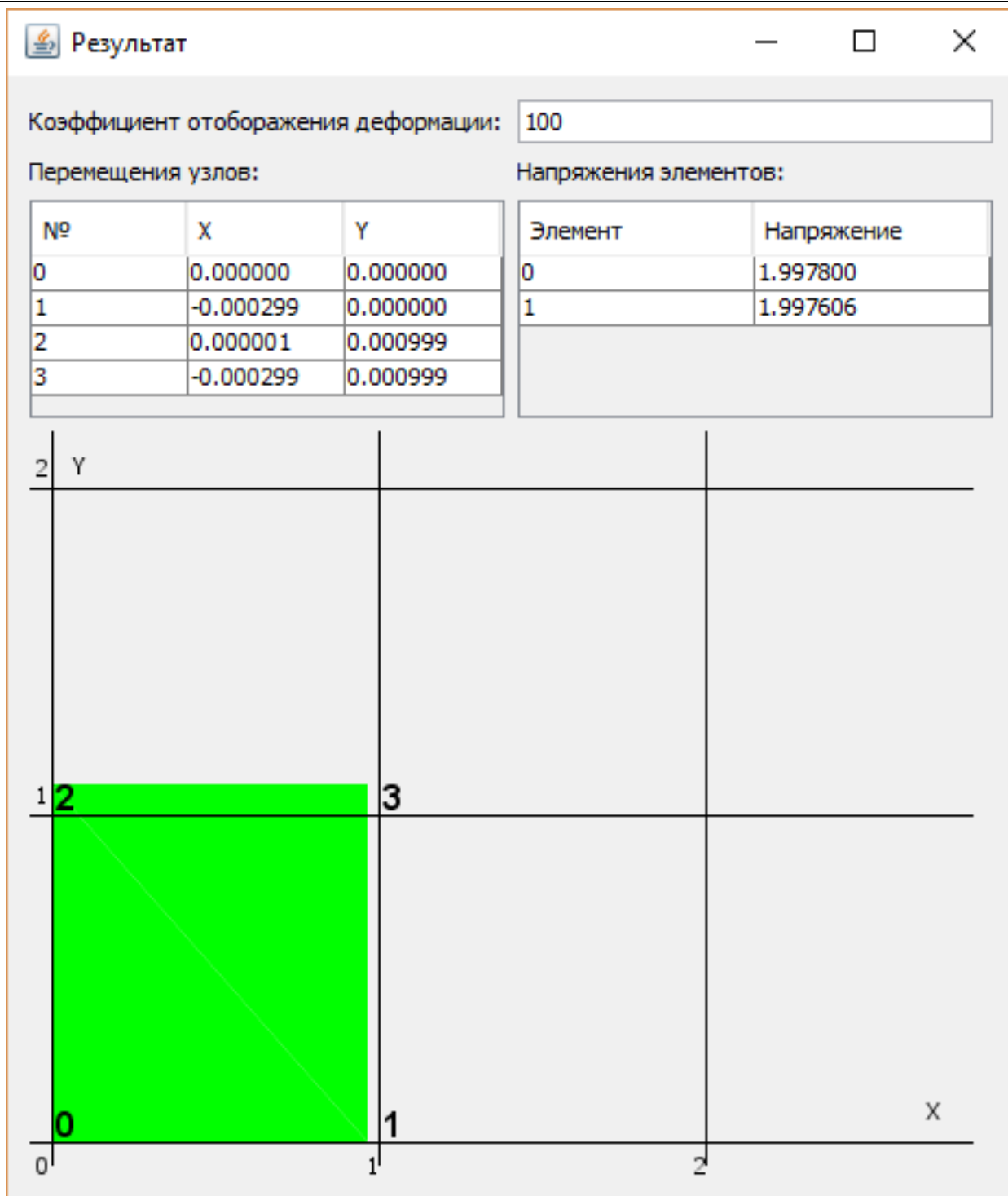


Рисунок 4 – Результат работы программы. Изображение деформированного меша с полем напряжений тестовой задачи

По расчету напряженно-деформированного состояния пластины видим, что произошло ее растяжения в направлении действия приложенных узловых сил, а также сжатие поперек действия этих сил.

Выводы

В процессе работы была изучены и проанализированы известные алгоритмы расчета напряженно-деформированного состояние объекта, а также изучен метод конечных элементов. Был проведен численные

эксперимент: к объекту квадратной формы были применены закрепления и нагрузки, для расчета напряженно-деформированного состояния объект был разделен на два треугольных элемента.

В результате было разработано программное обеспечение по расчету напряженно-деформированного состояния пластины на языке Java с помощью математической библиотеки la4j, которое по введенным исходным данным находит вектор перемещений узлов и напряжения элементов, а также строит недеформированный и деформированный меши с полем напряжений для рассчитываемой конструкции.

В дальнейшем планируется расширить реализацию алгоритма для использования не только линейных трехузловых элементов, но и других, как, например, четырехузловые, что увеличит точность решения, а также расчет в трехмерном пространстве, которое расширит применение алгоритма.

Библиографический список

1. von Mises yield criterion. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Von_Mises_yield_criterion (дата обращения 14.10.2016).
2. Каримов И. Строительная механика. URL: <http://www.stroitmeh.ru> (дата обращения 19.10.2016).
3. Каримов И. Соппротивление материалов. URL: <http://www.soprotmat.ru>. (дата обращения 19.10.2016).
4. Конюхов А. В. Основы анализа конструкций в Ansys. Казань: Казанский государственный университет, 2001. 102 с.
5. Маковкин Г.А., Лихачева С.Ю. Применение МКЭ к решению задач механики деформируемого твердого тела. Часть 1: учебное пособие. Нижний Новгород: Изд-во ННГАСУ, 2012. 71 с.
6. Присекин В.Л., Расторгуев Г.И. Основы метода конечных элементов в механике деформируемых тел: учебник. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2010. 238 с.
7. Теория сложного напряженно-деформированного состояния (НДС) твердого тела. URL: <http://www.soprotmat.ru/tns.htm>. (дата обращения 12.10.2016).
8. Чумаченко Е.Н., Логашина И.В. Расчет напряженно-деформированного состояния двигательного сегмента позвоночника при нагрузках. М.: Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», 2014. С. 51-57. URL: <https://www.hse.ru/pubs/share/direct/document/137734551>. (дата обращения 26.06.2016).