УДК 51

Регуляризация решения одного класса систем двух линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода на оси

Асанов Авыт
Кыргызско-Турецкий университет Манас
Профессор

Камбарова Айсалкын Даминовна
Ошский государственный университет
Старший преподаватель

Аннотация
В данной работе построены регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву и установлены достаточные условия единственности решений систем двух линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода на оси.
Ключевые слова: регуляризация, единственность, решения, система, линейное, двух уравнений, интегральное, Вольтерра, первого рода на оси.

Regularization of solution of a class of two linear integral equations of the first kind of Volterra on the axis

Asanov Avyt
Kyrgyz-Turkish Manas University
Professor

Kambarova Aisalkyn Daminova
Osh State University
Senior lecturer

Abstract
In this paper we construct regularizing operators by M. M. Lavrentiev and establish sufficient conditions for the uniqueness of solutions of systems of two linear integral Volterra equations of the first kind on the axis.
Keywords: regularization, uniqueness, solutions, system, linear, two equations, integral, Volterra, first kind on axis.

Одновременно рассматриваются следующие системы двух линейных интегральных уравнений вида

$$\int_{-\infty}^{t} K(t,s)u(s)ds = f(t),\ \ t\epsilon R = (-\infty, +\infty), \tag{1}$$

$$\varepsilon v(t,\varepsilon) + \int_{-\infty}^{t} K(t,s)v(s,\varepsilon)ds = f(t) + \varepsilon u_0, \quad t\epsilon R, \tag{2}$$

где $K(t,s)=(K_{ij}(t,s))$ −заданная 2×2 мерная матричная функция, $f(t)=(f_1(t),f_2(t))^T$ − заданная двухмерная вектор функция, $u(t)=(u_1(t),u_2(t))^T$ и $v(t,\varepsilon)=(v_1(t,\varepsilon),v_2(t,\varepsilon))^T$ − неизвестные двух мерные-вектор функции, $0<\varepsilon$ − малый параметр,

$$K(t,s)=\begin{pmatrix} K_{11}(t,s) & K_{12}(t,s) \\ K_{21}(t,s) & K_{22}(t,s) \end{pmatrix}, \quad u_0=\lim_{t\to-\infty} u(t)\in R^2.$$

Различные вопросы интегральных уравнений исследовались во многих работах. В частности, в работе [1] дан обзор результатов по интегральным уравнениям второго рода. В [2] для линейных интегральных уравнений Вольтерра первого и третьего рода с гладкими ядрами доказано существование многопараметрического семейства решений.

В [3] для решения линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода построены регуляризирующие операторы М.М.Лаврентьеву. В [4,10] доказаны теоремы единственности и построены регуляризирующие операторы по М.М.Лаврентьеву для систем линейных и нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода с негладкими матричными ядрами.В [6] для систем линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода доказаны теоремы единственности и построены по М.М. Лаврентьеву.В [7] на основе нового подхода изучены вопросы существования и единственности решении для линейных и нелинейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода с многоточечными особенностями.В [9] с помощью модификацией подходу предложенного в [7], изучены один класс систем линейных и нелинейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода.

В настоящей работе на основе модификацией метода предложенного в [5,9], доказаны теоремы единственности и построены регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву для решения систем двух линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода на оси.

Введем обозначения:

1) Для векторов $u=(u_1,u_2)^T$,v$=(v_1,v_2)^T\,\epsilon R^{\,2}$ определим скалярное произведение равенством $\langle u,v\rangle=u_1v_1+u_2v_2$

и норму

$\|u\|=(u_1^2+u_2^2)^{1/2}$;

2) Для 2× 2 матрицы A=(a_{ij}) определим норму $\|A\|=\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2\right)^{1/2}$
3) Обозначим через $C_2(R)$ пространство всех двух мерных вектор-функций с элементами из C(R)−непрерывных на R функций.
4) Через $C_{2,0}$(R) обозначим линейное пространство всех двух мерных вектор функций с элементами из $C_0(R)$ непрерывных и ограниченных на R функций.Для $u(t)\,\epsilon C_{2,0}$(R) определим норму $\|u(t)\|_c=sup_{t\in R}\|u(t)\|$;

5) Через $C^1_{\varphi,2}$(R) обозначим линейное пространство всех двух мерных вектор функций $u(t)\,\epsilon C_{2,0}$(R),удовлетворяющих условию: $\lim_{t\to-\infty}\|u(t)-u_0\|=0,\, u_0\,\epsilon R^{\,2}$,

$\|u(t)-u(s)\|\le M|\varphi(t)-\varphi(s)|\quad,\forall t\,,s\epsilon R,$

где M-положительная постоянная, зависящая от $u(t)$, но не от t и s, $\varphi(t)=\int_{-\infty}^{t}\lambda(s)ds,\ t\epsilon R$, где (t)≥0, ,$\forall t\,\epsilon R,\ \lambda(t)\epsilon C(R)$.

6) Обозначим через C(G) пространство всех непрерывных на G функций, где G={(t,s):$-\infty<s\le t<\infty$}.

Пусть $\lambda_i(t)$-собственные значения матрицы $\frac{1}{2}[K(t,t)+K^*(t,t)]$, где $K^*(t,t)$ сопряженная матрица к матрице $K(t,t)$, т.е.

$$\lambda_{1,2}(t)=\frac{1}{2}\,[\,K_{11}(t,t)+K_{22}(t,t)]\pm\sqrt{[K_{11}(t,t)-K_{22}(t,t)]^2+[K_{12}(t,t)+K_{21}(t,t)]^2}],$$

$$\lambda(t)=min_{i=1,2}\lambda_i(t)=\lambda_2(t)\qquad(3)$$

Предположим выполнения следующих условий

а) Для $K(t,s)$=$(K_{ij}(t,s)),i,j=1{,}2,\ \ K_{ij}(t,s)\epsilon C(G)$, для фиксированного $t\epsilon R$, $\|K(t,s)\|$, $K(s,s)\epsilon L_1(-\infty;t)$ и $K_{ij}(t,t)\epsilon C(R)$,где G=(t,s):$-\infty<s\le t<\infty$;

$b)$ $K_{11}(t,t)+K_{22}(t,t)\ge 0$ и

$K_{11}(t,t))\,K_{22}(t,t)\ge\frac{1}{4}[K_{12}(t,t)+K_{21}(t,t)]^2,\forall t\epsilon R$

с) при $t>\tau$ для любых (t,s),$(\,\tau,s)\epsilon\ G$ справедлива оценка

$\|K(t,s)-K(\tau,s)\|\le l(s)\left[\int_\tau^t\lambda(s)\,ds\right],\quad l(t)\epsilon C(R)\cap L_1(R).$

Лемма 1. Пусть выполняются условия а), b) и $X(t,s,\varepsilon)$ матричная функция Коши для систем

$$\frac{dx}{dt}=-K(t,t)x(t),t\epsilon R,$$

то есть

$$\frac{dX(t,s,\varepsilon)}{dt}=-\frac{1}{\varepsilon}K(t,t)X(t,s,\varepsilon),X(t,t,\varepsilon)=I_{2,}\qquad(4)$$

$I_2-2\times 2$ –мерная единичная матрица. Тогда справедлива оценка

$$\|X(t,s,\varepsilon)\|\le exp\left[-\int_s^t\frac{1}{\varepsilon}\lambda(\tau)d\tau\right],(t,s)\epsilon G.\qquad(5)$$

Доказательство. Для любого $u\epsilon R^2$имеем:

$$\frac{d}{dt}\|X(t,s,\varepsilon)u\|^2=\langle\frac{d}{dt}X(t,s,\varepsilon)u,X(t,s,\varepsilon)u\rangle+$$
$$+\langle X(t,s,\varepsilon)u,\frac{d}{dt}X(t,s,\varepsilon)u\rangle=\langle-\frac{1}{\varepsilon}K(t,t)X(t,s,\varepsilon)u,X(t,s,\varepsilon)u\rangle+$$
$$+\langle X(t,s,\varepsilon)u-\frac{1}{\varepsilon}K(t,t)X(t,s,\varepsilon)u\rangle=$$

$$=-\frac{2}{\varepsilon}\langle\,\frac{1}{2}[K(t,t)+K^*(t,t)]X(t,s,\varepsilon)u,X(t,s,\varepsilon)u\rangle\le-\frac{2\lambda(t)}{\varepsilon}\|X(t,s,\varepsilon)u\|^2,(t,s)\epsilon G,$$

то есть

$$\frac{d}{dt}\|X(t,s,\varepsilon)\|^2\le-\frac{2\lambda(t)}{\varepsilon}\|X(t,s,\varepsilon)\|^2,(t,s)\epsilon G.$$

Здесь мы учитывали условии а), b) и (4). Из последнего неравенства получим оценку (5). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть выполняются условия а), b) и $u(t)\epsilon C^1_{\varphi,2}(R)$,

$$F(t,\varepsilon) = X(t,-\infty,\varepsilon)[u(-\infty) - u(t)] + \int_{-\infty}^{t} R(t,\tau,\varepsilon)[u(t) - u(\tau)]d\tau, \varepsilon > 0, \qquad (6)$$

$$R(t,s,\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}X(t,s,\varepsilon)K(s,s), (t,s)\epsilon G, \qquad (7)$$

является резольвентой матричного ядра $\left[-\frac{1}{\varepsilon}K(s,s)\right]$, $\varphi(t) = \int_{-\infty}^{t}\lambda(s)ds, t \in$R, $\lambda(t) > 0$

при почти всех $t \in R$, $\|K(t,t)\| \le N_0\ \lambda(t)$ при всех $t \in R$, $N_0 > 0$.

Тогда справедлива оценка

$$\|F(t,\varepsilon\|_c \le C_1\varepsilon \quad ,$$
$$C_1 = M\ (e^{-1} + N_0),$$

$$M = sup_{t,s\in R,t\ne s}\frac{\|u(t) - u(s)\|}{|\varphi(t) - \varphi(s)|^{\gamma}}$$

Доказательство. В силу условию леммы 2, (6) и оценку (5) имеем

$$\|F(t,\varepsilon\| \le \|X(t,-\infty,\varepsilon\|\|u(t) - u(-\infty)\| +$$

$$+\int_{-\infty}^{t}\|R(t,\tau,\varepsilon)\|\|u(t) - u(\tau)\|d\tau \le exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{t}\lambda(\tau)d\tau\right]M\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{t}\lambda(\tau,\tau)d\tau\right] \quad \varepsilon \quad +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{t}N_0\lambda(\tau)exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}\lambda(s)ds\right]M\left[\int_{\tau}^{t}\lambda(s)ds\right] \quad d\tau \le Msup_{v\ge0}\left(e^{-v}v \quad\right)\varepsilon \quad +$$

$$+ MN_0\left[\int_0^{\infty}e^{-v}v \quad dv\right]\varepsilon \quad = C_1\varepsilon \quad .$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Пусть выполняются условия a), b), c) $\|K(t,t)\| \le N_0\lambda(t)$, $\forall t \in R$,и

$$H(t,s,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}X(t,s,\varepsilon)[K(t,s) - K(s,s)] +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t}R(t,\tau,\varepsilon)[K(t,s) - K(\tau,s)]ds, \qquad (8)$$

$(t,s) \in G, R(t,s,\varepsilon)$ определена по формуле (6). Тогда справедлива оценка

$$\|H(t,s,\varepsilon)\| \le (e^{-1} + N_0)l(s), (t,s) \in G, \varepsilon > 0$$

Доказательство. В силу условия a), b), c) и (7) из (8) получим

$$\|H(t,s,\varepsilon)\| \le \frac{1}{\varepsilon}\|X(t,s,\varepsilon)\|l(s)\left[\int_{s}^{t}\lambda(\tau)d\tau\right] + \frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t}\|R(t,\tau,\varepsilon)\|l(s)\int_{\tau}^{t}\lambda(s)dsd\tau \le$$

$$\le l(s)exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t}\lambda(\tau)d\tau\right]\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t}\lambda(\tau)d\tau\right] + \frac{N_0l(s)}{\varepsilon}\int_{s}^{t}exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}\lambda(\tau)d\tau\right]\lambda(\tau)\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}\lambda(\tau)d\tau\right]d\tau \le$$

$$\le \quad l(s)sup_{v\ge0}(e^{-v}v) + N_0l(s)\int_0^{\infty}(e^{-v}v)dv \le (e^{-v}vdv) \le (e^{-1} + N_0)l(s), (t,s) \in G.$$

Лемма 3 доказана.

Теорема. Пусть выполняются условия a), b), c), $\|K(t,t)\| \leq N_0\lambda(t)$ при всех $t\epsilon R$ система (1) имеет решение $u(t)\epsilon C^1_{\varphi,2}(R)$. Тогда решение $v(t,\varepsilon)$ системы (2) при $\varepsilon \to 0$ сходится по норме $C_{2,0}(R)$ к $u(t)$. При этом справедлива оценка

$$\|v(t,\varepsilon) - u(t)\|_C \leq C_2\varepsilon \quad , \tag{9}$$

$$C_2 = C_1 exp\left\{(e^{-1} + N_0)\int_{-\infty}^{\infty} l(s)ds\right\},$$

число C_1определено в лемме 2.

Доказательство. В системе (2) сделаем замену

$$v(t,\varepsilon) = u(t) + \xi(t,\varepsilon), \tag{10}$$

$u(t)$ –решение системы (1). Подставляя (10) в (2) имеем

$$\xi(t,\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{t} K(s,s)\,\xi(s,\varepsilon)ds - \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{t}[K(t,s) - K(s,s)]\,\xi(s,\varepsilon)ds -$$

$$-[u(t) - u_0], t \in R. \tag{11}$$

Используя матричную резольвенту

$$R(t,s,\varepsilon) = -\tfrac{1}{\varepsilon}X(t,s,\varepsilon)K(s,s), (t,s) \in G \tag{12}$$

матричного ядра $\left[-\frac{1}{\varepsilon}K(s,s)\right]$ систему (11) сводим к эквивалентной системе

$$\xi(t,\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{t}[K(t,s) - K(s,s)]\xi(s,\varepsilon)ds - [u(t) - u_0] -$$

$$-\int_{-\infty}^{t} R(t,\tau,\varepsilon)\left\{\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{\tau}[K(\tau,s) - K(s,s)]\xi(s,\varepsilon)ds - [u(\tau) - u_0]\right\}d\tau.$$

Отсюда используя формулу Дирихле, имеем

$$\xi(t,\varepsilon) = \textstyle\int_{-\infty}^{t} H(t,s,\varepsilon)\xi(s,\varepsilon)ds + F(t,\varepsilon), \quad t \in R, \tag{13}$$

где

$$H(t,s,\varepsilon) = -\tfrac{1}{\varepsilon}[K(t,s) - K(s,s)] - \tfrac{1}{\varepsilon}\textstyle\int_s^t R(t,\tau,\varepsilon)[K(\tau,s) - K(s,s)]d\tau, \tag{14}$$

$$F(t,\varepsilon) = -[u(t) - u_0] - \textstyle\int_{-\infty}^{t} R(t,\tau,\varepsilon)[u(\tau) - u_0]d\tau. \tag{15}$$

Покажем, что $H(t,s,\varepsilon)$ определенный по формуле (14), можно преобразовать к виду (8).

В самом деле учитывая (12) и

$$\frac{dX(t,s,\varepsilon)}{ds} = \frac{1}{\varepsilon}X(t,s,\varepsilon)K(s,s), (t,s)\epsilon G,$$

имеем

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t R(t,\tau,\varepsilon)[K(t,s) - K(s,s)]d\tau = -\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \frac{dX(t,\tau,\varepsilon)}{d\tau}d\tau[K(t,s) - K(s,s)] =$$

$$=-\frac{1}{\varepsilon}[K(t,s)-K(s,s)]+\frac{1}{\varepsilon}X(t,s,\varepsilon)[K(t,s)-K(s,s)].$$

Отсюда получим

$$-\frac{1}{\varepsilon}[K(t,s)-K(s,s)]=-\frac{1}{\varepsilon}X(t,s,\varepsilon)[K(t,s)-K(s,s)]+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t R(t,\tau,\varepsilon)[K(t,s)-K(s,s)]d\tau\,,(t,s)\in G. \qquad (16)$$

Подставляя (16) в (14) имеем (8).Аналогично, используя формулы

$$-[u(t)-u_0]=-X(t,-\infty,\varepsilon)[u(t)-u_0]$$
$$+\int_{-\infty}^t R(t,\tau,\varepsilon)\,[u(t)-u_0]d\tau, t\in R,$$

из (15) имеем (6).

Далее используя леммы 1 и 2,из (13) получим

$$\|\xi(t,\varepsilon)\|\le\int_{-\infty}^t (e^{-1}+N_0)l(s)\|\xi(s,\varepsilon)\|ds+C_1\varepsilon^{\gamma}\,, t\in R,$$

Отсюда, применяя неравенство Гронуолла-Беллмана и учитывая (10), имеем оценку (9). Теорема доказана.

Следствие. Если выполняются условия a), b), c),$\|K(t,t)\|\le N_0\lambda(t),\ t\in R$ и существует

$T\ \in R$ такое, что $\lambda(t)>0$ при почти всех $,t\in(-\infty,T]$,то решение системы (1) в пространстве $C^1_{\varphi,2}(R)$ единственно.

Доказательство. Пусть $u(t)\in C^1_{\varphi,2}(R)$ является решением системы

при $f(t)\equiv 0$. Умножая системы (1) скалярно справа и слева на $u_0=\lim_{t\to-\infty}u(t)\in R^2$

и складывая, имеем

$$\langle\int_{-\infty}^t K(s,s)u_0ds,u_0\rangle+\langle u_0,\int_{-\infty}^t K(s,s)u_0ds\rangle+\langle\int_{-\infty}^t K(s,s)[u(s)-u_0]ds,u_0\rangle+$$
$$+\langle u_0,\int_{-\infty}^t K(s,s)[u(s)-u_0]ds\rangle+\langle\int_{-\infty}^t[K(t,s)-K(s,s)]u(s)ds,u_0\rangle+$$
$$+\langle u_0,\int_{-\infty}^t[K(t,s)-K(s,s)]u(s)ds\rangle=0,$$

где$\langle\cdot,\cdot\rangle$-скалярное произведение в R^2.Отсюда имеем

$$\int_{-\infty}^t\langle[K(s,s)+K^*(s,s)]u_0,u_0\rangle ds=$$
$$=\int_{-\infty}^t\{\langle K(s,s)[u(s)-u_0],u_0\rangle+\langle u_0,K(s,s)[u(s)-u_0]\rangle\}ds-$$
$$-\int_{-\infty}^t\{\langle[K(t,s)-K(s,s)]u(s),u_0\rangle-\langle u_0,[K(t,s)-K(s,s)]u(s)\rangle\}ds. \qquad (17)$$

Далее, в силу условия следствия теоремы из (17), получим

$$2\left[\int_{-\infty}^t\lambda(s)ds\right]\|u_0\|^2\le 2N_0\left[\int_{-\infty}^t\lambda(s)ds\right]\|u_0\|sup_{s\in(-\infty,t]}\|u(s)-u_0\|+$$
$$+2\|u_0\|\|u(t)\|_c\left[\int_{-\infty}^t l(s)ds\right]\left[\int_{-\infty}^t\lambda(\tau)d\tau\right], t\in(-\infty,T]$$

Отсюда, получим

$$\|u_0\|\le N_0sup_{s\in(-\infty,t]}\|u(s)-u_0\|+\|u(t)\|_c\int_{-\infty}^t l(s)ds\,, t\in(-\infty,T], \qquad (18)$$

Из (18), переходя к пределу при $t\to-\infty$ имеем $\|u_0\|=0$. Тогда из оценки (9) вытекает, что $\|u(t)\|_c=0,$т.е $u(t)=0\ \ t\in R$. Следствие теоремы доказана.

Библиографический список

1. Магницкий Н.А. нелинейные интегральные уравнения Вольтерра первого и третьего рода //Вычисл. матем. и матем. физики. 1979. Т.19. № 4. С. 970-988.
2. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.Р. Некорректные задачи математической физики и анализ. М: Наука, 1980. С.286.
3. Денисов А.М. О приближенном решения уравнения Вольтерра первого рода, связанного с одной обратной задачей для уравнения теплопроводности //Вести. Моск. унив-та, Сер.15 Вычисл. матем. и киберн. 1980. № 3. С.49-52.
4. Иманалиев М.И., Асанов А. О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода //Докл. АН СССР. 1989. Т.309. № 5. С.1052-1055.
5. Иманалиев М.И., Асанов А. О решениях систем нелинейных двумерных интегральных уравнений Вольтерра первого рода //Докл. АН СССР. 1991. Т.317. № 1. С.22-35.
6. Иманалиев М.И., Асанов А. О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода //Докл. РАН