Постулат. 2019. №2 ISSN 2414-4487
УДК 517.928

Прямой метод построения асимптотики решения уравнения Бесселя при больших значениях аргумента

Алымкулов Келдибай
Институт фундаментальной и прикладной математики при Ошском государственном университете
д. ф.-м. наук, профессор, Директор, член корреспондент НАН КР

Кожобеков Кудайберди Гапаралиевич
Институт фундаментальной и прикладной математики при Ошском государственном университете
к.ф.-м.н, научный сотрудник

Аннотация
Асимптотика решения уравнения Бесселя любого порядка при больших значениях аргумента, получена прямо из его дифференциального уравнения.
Ключевые слова: Уравнение Бесселя, метод неопределенных коэффициентов, принцип сжимающих операторов, сведение к интегральному уравнению, асимптотика решения.

Asymptotics of the solution of Bessel at large values of the argument

Alymkulov Keldibay
Institute of Fundamental and Applied Researches at Osh State University
doctor of physical and mathematical sciences, director

Kochobekov Kudaiberdi Gaparalievich
Institute of Fundamental and Applied Researches at Osh State University
Ph.D, senior researcher

Abstract
The asymptotic of the solution of the Bessel equation of any order for large values of the argument is obtained directly from its differential equation.
Keywords: Bessel equation, method of indeterminate coefficients, principle of contracting operators, reduction to an integral equation, asymptotics of an solution.

1. Введение

Рассматривается уравнения Бесселя

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy(x)}{dx}+\left(1-\frac{v^2}{x^2}\right)y(x)=0 \qquad (1)$$

которое появляется во многих областях науки и техники, где $\nu \in R$ - порядок бесселовых функций. В [1] асимптотика решения уравнения (1) при больших x, получена сведением его к уравнению Риккати и там же была отмечена, что эту асимптотику можно получить, прямо из уравнения (1) не сведя его к уравнению Риккати.

Обычно, асимтотику решения уравнения (1) при больших значениях аргумента x , получают из интегрального представления его решения [2-10].

Здесь, изложен простой метод получения асимптотику решения уравнения (1) при больших значениях, прямо из уравнения (1).

2. Прямой метод получения асимптотики решения из уравнения Бесселя

Подстановкой

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} z(x) \qquad (2)$$

где $z(x)$ − новая неизвестная функция, уравнение (1) сводится к виду

$$z^{''}(x) + \left(1 + \frac{\alpha}{x^2}\right) z(x) = 0 \ , \qquad (3)$$

где $\alpha = \frac{1}{4}(1 - \nu^2)$.

Мы будем искать решение уравнения (3) удовлетворяющее условию

$$z(x) \to \cos x, \ \ x \to \infty. \qquad (4$$

Это условие можно заменить на условие: $\mathrm{z(x) \to \sin x, \ \ x \to \infty}$

Такое решение мы будем искать в виде

$$\mathrm{z(x) = \cos x + x^{-1} z_1(x) + x^{-2} z_2(x) + x^{-3} z_3(x) + x^{-4} z_4(x) + \cdots + x^{-m+1} z_{m-1}(x) + x^{-m} z_m(x) + \cdots} \ , \qquad (5)$$

где $\mathrm{z_k(x)}$ $\mathrm{(k = 1,2,3 \dots .)}$ непрерывные и ограниченные неизвестные функции на $\mathrm{R^+ = [0, \ \ \infty)}$, которые определяется рекуррентным образом.

Дважды дифференцируя (5) имеем

$$\frac{d^2 z(x)}{dx^2} = -\cos x + 2x^{-3} z_1(x) - 2x^{-2} \frac{dz_1(x)}{dx} + x^{-1} \frac{d^2 z_1(x)}{dx^2} + 2 \cdot 3x^{-4} z_2(x) - 2 \cdot 2x^{-3} \frac{dz_2(x)}{dx} + x^{-2} \frac{d^2 z_1(x)}{dx^2} + 3 \cdot 4x^{-5} z_3(x) - 2 \cdot 3x^{-4} \frac{dz_3(x)}{dx} + x^{-3} \frac{dz_3(x)}{dx} + 4 \cdot 5x^{-6} z_4(x) - 2 \cdot 4x^{-5} z_4(x) + x^{-4} \frac{d^2 z_4(x)}{dx^2} + - \cdots + m(m +$$

1x−m−1zm−1x−2m−1x−1zm+x−m+1d2zm−1xdx2−2(m−1)x−mdzm−1xdx+m(m+1)−m−2zmx+x−md2zmxdx2−2mx−m−1dzmxdx+m(m+1)x−m−2zm(x)⋯ . (6)

Теперь подставляя (5) и (6) в уравнение (3) получим

$$-\cos x + x^{-1} \frac{d^2 z_1(x)}{dx^2} - 2x^2 \frac{dz_1(x)}{dx} + 2x^{-3} z_1(x) -$$

$$+x^2 \frac{d^2 z_2(x)}{dx^2} - 2 \cdot 2x^{-3} \frac{dz_2(x)}{dx} + 2 \cdot 3x^{-4} z_2(x) +$$

$$+x^{-3} \frac{d^2 z_3(x)}{dx^2} - 2 \cdot 3x^{-4} \frac{dz_3(x)}{dx} + 3 \cdot 4x^{-5} z_3(x) +$$

 ISSN 2414-4487

$$+x^{-4}\frac{d^2z_4}{dx^2}-2\cdot 4x^{-5}\frac{dz_4(x)}{dx}+4\cdot 5x^{-6}z_4(x)+$$

$$\dots+x^{-m+1}\frac{d^2z_{m-1}(x)}{dx^2}-2(m-1)x^{-m}\frac{dz_{m-1}(x)}{dx}+(m-1)m\cdot x^{-m-1}z_m(x)+$$

$$+x^{-m}\frac{d^2z_2(x)}{dx^2}-2\cdot mx^{-m-1}\frac{dz_m(x)}{dx}+m(m+1)x^{-m-2}z_m(x)+\cdots-$$

$$+\cos x+x^{-1}z_1(x)+x^{-2}z_2(x)+x^{-3}z_3(x)++x^{-m+1}z_{m-1}(x)+x^{-m}z_m(x)$$
$$+\cdots+$$
$$\alpha x^{-2}\cos x-\ \alpha x^{-3}z_1(x)-\alpha x^{-4}z_2(x)-\alpha x^{-5}z_3(x)-\alpha x^{-6}z_4(x)-$$

$$\cdots\alpha x^{-m}z_{m-2}(x)-\alpha x^{-m+1}z_{m-1}(x)-\alpha x^{-m+2}z_m(x)+\cdots=0 \qquad (7)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x^{-k} $(k=1,2\cdots)$ в выражении (7) ,получим уравнения для определения функций $z_k(x)$ $(k=1,2\cdots)$

$$Lz_1(x)=\frac{d^2z_1(x)}{dx^2}+z_1(x)=0 \qquad (8.1)$$

$$Lz_2(x)=+2\frac{dz_1}{dx}+\alpha\cos x, \qquad (8.2)$$

$$Lz_3(x)=-2z_1(x)+2\cdot 2\frac{dz_2(x)}{dx}+\alpha z_1(x), \qquad (8.3)$$

…………………………………………………………

$$Lz_{m-1}(x)=\ -(m-3)(m-2)z_{m-3}+2\cdot(m-2)\frac{dz_{m-2}}{dx}+$$
$\alpha z_{m-3}(x)$, *(8.m-1)*

$$Lz_m(x)=\ -(m-2)(m-1)z_{m-2}+2\cdot(m-2)\frac{dz_{m-1}}{dx}+\alpha z_{m-2}(x), \qquad (8.m)$$

………………………………………………………………

Теперь последовательно решаем эти уравнения, так чтобы они допускали ограниченные периодические решения без секулярных членов типа $x^m\,cos\,x, x^m\,sin\,x$ $(m=1,2,\cdots)$

Из (8.1) получим

$$z_1(x)=a_1\,cos\,x+b_1\,sin\,x \qquad (9.1)$$

где a_1, b_1 –произвольные постоянные. Подставляя (9.1) в уравнение (8.2) имеем

$$Lz_2(x)=-2a_1\sin x+b_1\cos x+\alpha\cos x \qquad (9.2)$$

Это уравнение допускает ограниченное решение на полуоси, при условии $a_1=0, b_1=-\alpha$. Тогда выражение (9.1)и (9.2) имеют вид

$$z_1(x)=-\alpha\sin x, \qquad (10.1)$$

$$Lz_2=0, \qquad (10.2)$$

Из (11.2) получим

$$z_2(x)=a_2\cos x+b_2\sin x \qquad (11.1)$$

где a_2, b_2 –произвольные постоянные. Теперь, подставляя (10.1) и (10.2) в уравнение (8.3), получим

$$Lz_3(x)=(\alpha-2)z_1(x)+2\cdot 2(-a_2\sin x+b_2\cos x)=-\alpha(\alpha-2)\sin x-$$
$$2\cdot 2a_2\sin x+2\cdot 2b_2\cos x\ . \qquad (9.3)$$

Чтобы это уравнение допускало ограниченное решение, необходимо и достаточно выполнение условий

$a_2 = -\frac{\alpha(2+\alpha)}{2\cdot 2}, \quad b_2 = 0$.

Тогда выражение (11.1) и (9.3) имеют вид

$$z_2(x) = -\frac{\alpha(\alpha-2)}{2\cdot 2}\cos x \qquad (11.2)$$

$$Lz_3(x) = 0 \qquad (11.3)$$

Из (11.3) получим

$$z_3(x) = a_3\cos x + b_3\sin x \qquad (12.3)$$

Продолжая этот процесс, получим

$$z_{2m}(x) = (-1)^{2m}\frac{\alpha(\alpha-1\cdot 2)(\alpha-2\cdot 3)\cdots[\alpha-(2m-1)2m]}{2^{2m-1}\cdot(2m)!}\cos x\,, \qquad (12.2m)$$

$$z_{2m+1}(x) = (-1)^{2m+1}\frac{\alpha(\alpha-1\cdot 2)\cdots[\alpha-2m(2m+1)]}{2^{2m}\cdot(2m+1)!}\ , \quad \forall m\in N \qquad (12.2m+1)$$

Таким образом, ряд (5) имеет вид

$$\mathrm{z}(x) = cosx + \frac{\alpha}{x}sinx - \frac{\alpha(\alpha-2)}{2\cdot 2x^2}cosx + \frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha-2\cdot 3)}{2^3\cdot 3\cdot x^3}sinx + \frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha-2\cdot 3)(\alpha-3\cdot 4)}{2^3\cdot 4!\cdot x^3}cosx - \frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha-2\cdot 3)(\alpha-3\cdot 4)(\alpha-4\cdot 5)}{2^4\cdot 5!\cdot x^5}sinx - \frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha-2\cdot 3)(\alpha-3\cdot 4)(\alpha-4\cdot 5)(\alpha-5\cdot 6)}{2^5\cdot 6!\cdot x^6}cosx + \cdots + (-1)^{2m-1}\frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha-2\cdot 3)(\alpha-3\cdot 4)\ldots[(\alpha-(2m-1)2m]}{2^{2m-1}\cdot(2m)!\cdot x^{2m}}cosx - (-1)^{2m-1}\frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha-2\cdot 3)(\alpha-3\cdot 4)\ldots[(\alpha-(2m+1)2m]}{2^{2m}\cdot(2m+1)!\cdot x^{2m+1}}sinx + \cdots \qquad (13)$$

Ведем обозначение

$$a_m = -(-1)^{m-1}\frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha-2\cdot 3)(\alpha-3\cdot 4)\cdots[\alpha-(m-1)m]}{2^{m-1}\cdot(m)!} \qquad (14.m)$$

Ряд (13) расходиться при $x\to\infty$.

Действительно применяя признак Даламбера имеем

$$d = \lim_{m\to\infty}\frac{a_{2m+1}}{a_{2m}} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{[\alpha-2m(2m+1)]}{2\cdot(2m+1)}\right| = \infty$$

Однако этот ряд является асимптотическим рядом при $x\to\infty$, т. е справедливо, следующая теорема.

Теорема 1. Ряд (13) является асимптотическим рядом, т.е. если рассмотреть усеченный ряд

$$z(x) = \cos x + \alpha x^{-1}\sin x - \alpha(\alpha-2)2^{-2}x^{-2}\cos x + \cdots +$$

(−1)mα(α−2)⋯α−2m(2m+1)22m2m+1!x2m+1+1x2m+2R2m+2(x)
(15.2m+2)

Тогда

$$|R_{2m+2}(x)| \le l = \mathrm{cons}\,t, \qquad x\to\infty\,. \qquad (16.2m+2)$$

Первое доказательство этой теоремы, следует из того, что ряд (13) являются знакопеременным. Остаточный член меньше первого выброшенного члена по абсолютной величине.

Второе доказательство. Для простоты, эту теорему докажем, при $m = 0$, Положим

$$z(x) = \cos x + x^{-1} z_1(x) + x^{-2} R(x) \qquad (17.1)$$

Тогда, подставляя (17.1) и дважды продифференцированное его выражение в (3), получим:

$$-\cos x + x^{-1} z_1''(x) - 2x^{-2} z_1'(x) + 2x^{-3} z_1(x) + x^{-2} R''(x) - 4x^{-3} R'(x) -$$
$$+3!\, x^{-4} R(x) + \cos x + x^{-1} z_1(x) + x^{-2} R(x) + d x^{-2} \cos x + \alpha x^{-3} z_1(x)$$
$$+ \alpha x^{-4} R(x) = 0$$

Отсюда приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x^{-1} до второй степени получим

$$z_1''(x) + Z_1(x) = 0 \qquad (17.2)$$

$$R''(x) + R(x) = 2z'_1(x) + \alpha \cos x - 2x^{-1} z'_1(x) + 4x^{-1} R'(x) - \alpha x^{-1} z_1(x)$$
$$+3!\, x^{-2} R(x) - \alpha x^{-2} R(x) \qquad (17.3)$$

Из (17.2) имеем

$$z_1(\mathrm{x}) = a_1 \cos x - b_1 \sin x \qquad (17.4)$$

где a_1 и b_1 −произвольные постоянные .

Тогда (17.3) имеет вид

$$R''(x) + R(x)$$
$$= 2a_1 \sin x + 2b_1 \cos x - \alpha \cos x + \frac{2-\alpha}{x}(a_1 \cos x + b_1 \sin x)$$
$$+ 4x^{-1} R(x) + \frac{(\alpha - 3!) R(x)}{x^2}$$

Выберем $a_1 = 0$, и $b_1 = \frac{d}{2}$. Тогда

$$R''(x) + R(x) = -\frac{(2-\alpha)\alpha}{2x} sinx + \frac{4}{x} R'(x) + \frac{(\alpha - 3!)}{x^2} R(x) \qquad (17.5)$$

Решение этого уравнения ищем в виде

$$\mathrm{R}(x) = \frac{+\alpha(\alpha-2)}{4} cosx + R_1(x) \qquad (17.6)$$

Вставляя (17.6) в (17.5) имеем

$$R''_1(x) + R_1(x) = \frac{4}{x} R_1(x) + \frac{(\alpha - 3^{3!})\alpha(d-2)}{4x^2} cosx + \frac{(d-3)!}{x^2} R_1(x)$$

или $\quad R''_1(x) - \frac{4}{x} R_1(x) + R(x) = f(x),$ (17.7)

где $f(x) = \frac{\alpha(\alpha-2)}{4x^2}(\alpha - 3!)$

В (17.7) сделаем подстановку

$$R(x) = x^2 K(x) \qquad (17.8)$$

Тогда, (17.7) имеет вид

$$2K(x) + 4xK'(x) + x^2 K''(x) - \frac{4}{x}\left(2xK(x) + x^2 K'(x)\right) + x^2 K(x) = f(x)$$

или

$$x^2 K''(x) + \left(1 - \frac{6}{x^2}\right) K(x) = \frac{f(x)}{x^2} \qquad (17.9)$$

Решение уравнения (17.9), которое имеет на бесконечности ограничено, эквивалентно следующему интегральному уравнению

$$K(x) = g(x) + 6\int_{\infty}^{x} \frac{\sin(x-s)}{s^2} K(s)ds = T[K], \quad (17.10)$$

где

$g(x) = \int_{\infty}^{x} \frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha-2\cdot 3)}{s^4} \sin(x-s)\, ds$.

Очевидно, что

$|g(x)| \leq l x^{-3}$, (17.11)

где $l = const$. Обозначим через S множество функций удовлетворяющих условию (17.11), при больших x. Очевидно, что оператор T переводит множеств S в себя. Докажем, что оператор T является сжимающим в S. Действительно, для любых $K_1\ (x), K_2\ (x), \epsilon S$ из (15.10),имеем

$|T[K_1] - T[K_2]| \leq \frac{6}{x} |K_1(x) - K_2(x)|$

Отсюда получаем, что при $x \geq 12$ оператор T является сжимающим и его решение удовлетворяет условно

$|K(x)| \leq l x^{-3}$.

Следовательно, в силу (17.6), (17.8) и (17.1) получим, что $|R_2(x)| \leq l$, $x \to \infty$.

Теорема 1 доказана.

Заключение

Здесь асимптотика решения уравнения Бесселя при больших значениях независимой переменной получена непосредственно из самого дифференциального уравнения, и доказана асимптотический характер полученного решения.

Библиографический список

1. Алымкулов К., Кожобеков К.Г Асимптотика решения уравнения Бесселя при больших значениях аргумента // Международный студенческий вестник. 2019. №1. С.1-7.
2. Кузнецов Д.С. Специальные функции. М.: Высшая школа,1962. 248 с.
3. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. М.: Мир, 1974. 344 с.
4. Федорюк М.В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983. 352 с.
5. Beals R., Wong R. Special functions: A graduate text, Cambridge University Press, 2010. 449 p.
6. Lebedev N.N. Special functions and their applications. Dover pub., 1972. 336 p.
7. Olver F. Asymptotic and special functions (русс.пер. Асимптотика и специальные функции. М., Наука, 1990), Academic Press, New York, 1974, 572 p.
8. Temme N.M. Asymptotic methods for integrals. World Scientific, New Jersey, London, 2014. 628 p.