УДК 372.851

Изучение элементов теории множеств в школе как пропедевтика вузовского курса высшей математики

Гайдукова Галина Викторовна
Педагогический институт Тихоокеанского государственного университета
студент

Ключников Анатолий Егорович
Педагогический институт Тихоокеанского государственного университета
старший преподаватель

Аннотация
В статье рассматриваются особенности изучения элементов теории множеств в курсе математики основной школы. Предлагается двухэтапный подход в обучении указанного раздела математики с учетом модернизации содержания математического образования современной школы. Основой такого подхода служит метапредметность понятия множества.
Ключевые слова: множество, метапредметное понятие, классификация множеств, мощность множества, равномощные множества, классы эквивалентности, теоретико-множественный подход, алгебра множеств, аксиоматика теории множеств, парадоксы теории множеств.

Learning the basics of set theory at school as a propaedeutics of higher mathematics course

Gaidukova Galina Viktorovna
Pedagogical Institute of Pacific national University
Student

Kliuchnikov Anatoly Yegorovich
Pedagogical Institute of Pacific national University
Senior lecturer

Abstract
The article discusses the features of the study of elements of set theory in the course of mathematics of the basic school. A two-stage approach in teaching this section of mathematics is proposed, taking into account the modernization of the content of mathematical education in modern schools. The basis of this approach is the metasubject concept of the set.
Keywords: set, interdisciplinary concept, classification of sets, power of set, equilateral sets, equivalence classes, set theoretic approach, set algebra, axiomatics of set theory, paradoxes of set theory.

Основой большинства математических теорий и дисциплин является теория множеств, а понятие множества есть фундаментальное и первичное (неопределяемое) математическое понятие.

В свете реализации ФГОС основного общего и среднего общего образования (ООО и СОО) понятие «множество» по праву может считаться одним из главных метапредметных понятий школьного курса.

Вопросу изучения основ теории множеств в школе и использования теоретико-множественного языка в обучении уделяется постоянное внимание со стороны учителей, педагогов, методистов и ученых [1-5]. Это обусловлено особой ролью теоретико-множественных моделей в становлении логических структур мышления школьников.

С целью формирования математической компетентности учащихся общей и средней обшей школы, изучение нового материала любого раздела математики планируется выполнять последовательно в два этапа по мере усложнения материала.

Первый этап (локальный).

1. Определение (пояснение) основного объекта предметной области.
2. Формулирование свойств (внешних и внутренних) основного объекта.
3. Классификация представителей основного объекта по выявленным признакам.
4. Указание количественной характеристики (характеристического свойства) основного объекта.

Второй этап (глобальный).

5. Установление взаимосвязи между представителями-объектами одной природы через отношения и (или) операции между ними.
6. Выяснение закономерностей изучаемой предметной области: формулы, правила, алгоритмы, методы и т.п. Парадоксы теории.
7. Сравнительный анализ изучаемой предметной области с изученными ранее образовательными объектами для построения прочной и целостной системы математических знаний вплоть до метазнаний.

Так, например, при изучении основ теории множеств на первом этапе:

1. Основной объект исследования «множество» поясняется «как совокупность объектов различной природы, объединенных по какому-либо признаку». При этом объекты, составляющие множество, называются его «элементами». Числовые множества школьной математики представлены как множества допустимых числовых значений выражений в уравнениях и неравенствах, числовые промежутки и бесконечные числовые промежутки, числовые системы **N**, **Z**, **Q**, **I**, **R**, **C**.

2. Свойства множества формулируются на втором этапе как свойства множества-результата операций над множествами-операндами.

3. Классификация множеств выполняется по различным критериям: абстрактные/конкретные, пустые/непустые, конечные/бесконечные и т.д.

4. Количественной характеристикой множества является количество элементов конечного множества.

Более полным исследованием на этом этапе будет знакомство с общей количественной характеристикой бесконечного множества - мощностью множества. В этом случае приводится классификация бесконечных множеств по критериям: равномощные/неравномощные, счетные/несчетные.

Натуральное число определяется как общее свойство класса конечных равномощных множеств [6, с. 5-6]. Основой теоретико-множественного обоснования понятий натурального числа и мощности множества (равномощности множеств) являются понятия конечного множества и взаимно-однозначного соответствия (отображения). Взаимно-однозначное соответствие между множествами в свою очередь опирается на бинарные отношения (рефлексивность, симметричность, транзитивность) между элементами внутри множества, позволяющие разбивать данное множество на классы эквивалентности (получать из данного множества новые множества одной природы). Отношение равномощности как отношение эквивалентности на множестве, состоящем из элементов - конечных множеств произвольной природы, позволяет получать классы эквивалентности множеств произвольной природы.

На втором этапе изучения после описания объектов изучаемой среды происходит расширение кругозора и углубление знаний учащихся через установление взаимосвязей между множествами (в том числе различной природы).

5. Изучение отношений между множествами одной природы (строгое включение, нестрогое включение, равенство), понятия подмножества, свойств транзитивности включения, условия равенства множеств позволяет учащемуся продолжить знакомство с символикой и особыми правилами записи, принятыми в теории множеств.

Отношение порядка (равно, меньше) на множестве натуральных чисел **N** вводится как отношение равномощности множеств из классов конечных равномощных множеств, что является элементом формирования у учащегося взгляда на окружающий мир как на целостную взаимосвязанную картину.

Отношение последовательного включения между числовыми системами **N**, **Z**, **Q** и **I**, **R**, **C** позволяет устанавливать иерархию понятий [5, С. 52-54].

Операции объединения, пересечения, разности множеств одной природы (с иллюстрацией на кругах Эйлера-Венна) с указанием их свойств (ассоциативности, коммутативности и дистрибутивности), законы де Моргана помогают конструировать всевозможные объекты школьной математики. Декартово произведение множеств упорядоченная пара, координатная плоскость. Элементы комбинаторики, алгебры множеств.

Связь арифметических операций сложения, вычитания, умножения неотрицательных чисел с объединением, разностью, декартовым произведением конечных множеств и деления натуральных чисел с разбиением конечного множества на равномощные попарно непересекающиеся подмножества.

6. Взаимосвязь и закономерности в теории множеств устанавливаются посредством изучения, например, формулы вычисления числа подмножеств конечного множества, комбинаторной формулы включения-исключения для определения мощности объединения конечных множеств, метода математической индукции, системы аксиом современной теории множеств.

Знакомство с парадоксами теории множеств позволяет выяснить внутренние проблемы теории множеств и способы преодоления возникших на пути исследования трудностей. «Столкнувшись с этими парадоксами, создатели теории множеств … стали бороться с парадоксами двумя способами» [7, С.6]. Одним из таких способов является аксиоматический способ (системы аксиом Цермело-Френкеля и Гёделя-Бернайса).

Уместно отметить о дуализме натурального числа, опирающемся на два риторических вопроса: «сколько?» и «который?».

Проблема алгебраической незамкнутости множества действительных чисел **R** (не всякое алгебраическое уравнение имеет корни) решается переходом к более широкому множеству комплексных чисел **C**. Причиной появления комплексных чисел **C** является открытие формул для решения алгебраических уравнений третьей и четвертой степеней.

7. Сравнительный анализ предметного содержания теории вероятностей и математической статистики, булевой алгебры, формальной и математической логики с предметным содержанием элементов теории множеств, установление их взаимосвязи позволяет идеализировать и универсализировать понятие «множество» и выделить его как метапредметное понятие «множество».

В процессе поэтапного формирования основных понятий теории множеств можно добиться сознательного и систематического усвоения учащимися математических понятий и применения их на практике. Эффективность предложенной системы поэтапного усвоения математических знаний связана со снижением проблемы заучивания и зазубривания больших массивов учебной информации.

Библиографический список

1. Акимова Н. Изучение множеств в младших классах средней школы// Я иду на урок математики: 6 класс: Книга для учителя (под общ. ред. И.Л. Соловейчик). М.: Издательство «Первое сентября», 2001. С.247 - 268.
2. Виленкин Н.Я. Рассказы о множествах. М.: МЦНМО, 2005. 150 с.
3. Колмогоров А.Н. Отношение эквивалентности и равенство// Математика в школе. 2010. №1. С.3 - 9.
4. Далингер В.А. Методика реализации внутрипредметных связей при обучении алгебре: Кн. для уч-ля. М.: Просвещение, 2014. 80 с.
5. Современные основы школьного курса математики: Пособие для студентов пед. институтов/ Н.Я. Виленкин, К.И. Дуничев, Л.А. Калужин,

А.А. Столяр. М.: Просвещение, 1980. 239 с.
6. Теоретико-множественный подход к построению множества целых неотрицательных чисел: Метод. Рекомендации к изучению дисциплины «Математика» / Владим. гос. ун-т им. А.Г. и Н.Г. Столетовых; сост. Н.Ф. Булатова. Владимир: 2013. 32 с.
7. Ященко И. В. Парадоксы теории множеств. М.: МЦНМО, 2002. 40 с.