УДК 517.966.2

Об ограниченности решений интегро-дифференциальных уравнений третьего порядка с частными производными на бесконечных областях

Асанов Авыт
Кыргызско-Турецкого Университет Манаса
доктор физико-математических наук, профессор

Абдукаримов Абдували Мансурович
Институт математики Национальной Академии наук Кыргызской Республики
кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник

Аннотация
В данной работе рассматривается линейное интегро-дифференциальное уравнение с частными производными третьего порядка на бесконечной области, когда свободный член рассматриваемого уравнения непрерывен и принадлежит пространству квадратично суммируемых функций с интегралом Стилтьеса по строго возрастающим дифференцируемым функциям. Установлены достаточные условия, гарантирующие ограниченность решений интегро-дифференциальных уравнений с частными производными третьего порядка на бесконечной области. Для доказательства основного результата развит метод преобразования уравнений Вольтерра-Стильтеса.

Ключевые слова: Пространство квадратично-интегрируемых и непрерывных функций, производная по строго возрастающим функциям, преобразование уравнения и интеграла.

On the boundedness of solutions of third-order integro-differential equations with partial derivatives on infinite domains

Asanov Avyt
Kyrgyz-Turkish Manas University
doctor of physics and mathematics, Professor

Abdukarimov Abduvali Mansurovich
Institute of mathematics, National Academy of Sciences
The Kyrgyz Republic
candidate of physical and mathematical Sciences, senior researcher

Abstract
In this paper we consider a linear integro-differential equation with partial derivatives of the third order on an infinite domain, when the free term of the equation under consideration is continuous and belongs to the space of

quadratically summable functions with the Stieltjes integral by strictly increasing differentiable functions. Sufficient conditions are established to guarantee the boundedness of solutions of integro-differential equations with partial derivatives of the third order on an infinite domain. To prove the main result, the method of transformation of the Volterra-Stieltjes equations is developed.

Keywords: The space of quadratic-integrable and continuous functions derived from strictly increasing functions, Transformation of the equation and integral.

Рассматривается уравнение

$$u_{txt}(t,x)+m(t,x)u_{tx}(t,x)+a(t,x)u_x(t,x)+b(t,x)u_t(t,x)+C(t,x)u(t,x)+$$
$$+\int_0^t K_1(t,x)A(t,x,s)K_1(s,x)u_{sx}(s,x)d\varphi+\int_0^x K_1(t,x)B(t,x,y)K_1(t,y)u_{ty}(t,y)d\psi(y)=f(t,x) \qquad (1)$$
$$G=\{(t,x):0\le t<\infty,\quad 0\le x<\infty\},\ (t,x)\in G,$$

с условиями

$$f(t,x)\in L^2_{\varphi,\psi}(G)\cap C(G), \qquad (f)$$
$$u(0,x)=0,\qquad x\in[0,\ +\infty),$$
$$u(t,0)=0,\qquad t\in[0,\ +\infty),$$
$$u_{tx}(0,x)=0,\qquad x\in[0,\ +\infty) \qquad (*)$$

где $m(t,x), a(t,x), b(t,x) c(t,x) K_1(t,x), A(t,x,s) B(t,x,y) f(t,x)$ - известные функции, а $u(t,x)$ - неизвестная функция $\varphi(t),\psi(x)$- строго возрастающие дифференцируемые функции соответственно в области $G=\{(t,x):0\le t<\infty,\quad 0\le x<\infty\}$, тогда $u'_x(t,x),\ u'_t(t,x)$ определяются следующими равенствами:

$$u'_x(t,x)=\frac{\partial u(t,x)d\psi(x)}{\partial\psi(x)dx}=\psi'_x(x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial\psi(x)},\ u'_t(t,x)=\frac{\partial u(t,x)d\varphi(t)}{\partial\varphi(t)dt}=\varphi'_t(t)\frac{\partial u(t,x)}{\partial\varphi(t)}.$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие легко доказуемые леммы:

ЛЕММА 1. Для любых дифференцируемых функций K,W справедливо соотношение

$$\mathrm{KWW}_{\varphi(\mathrm{s})}{}'=\frac{1}{2}(KW^2)_{\varphi(\mathrm{s})}{}'-\frac{1}{2}K_{\varphi(\mathrm{s})}{}'W^2.$$

ЛЕММА 2. Для любых дифференцируемых функций C,ν, имеющих смешанные производные, справедливо соотношение

$$C\nu''_{\varphi(\tau)\psi(\mathrm{z})}=(C\nu)''_{\varphi(\tau)\psi(\mathrm{z})}-\left(C'_{\varphi(\tau)}\nu\right)'_{\psi(\mathrm{z})}-\left(C'_{\psi(\mathrm{z})}\nu\right)'_{\varphi(\tau)}+C''_{\varphi(\tau)\psi(\mathrm{z})}\nu.$$

ЛЕММА 3. Для любых дифференцируемых функций C,ν, имеющих смешанные производные, справедливо соотношение

$$\tilde{N}\nu\nu''_{\varphi(s)\psi(y)}=\frac{1}{2}\left(C\nu^2\right)''_{\varphi(s)\psi(y)}-\frac{1}{2}\left(C'_{\varphi(s)}\nu^2\right)'_{\psi(y)}-\frac{1}{2}\left(C'_{\psi(y)}\nu^2\right)'_{\varphi(s)}+\frac{1}{2}C''_{\varphi(s)\psi(y)}\nu^2-C\nu'_{\psi(y)}\nu'_{\varphi(s)}.$$

Обозначим через $C(G)$ - пространство всех непрерывных функций на $G=\{(t,x)/\,0\le t<\infty,\quad 0\le x<\infty\}$. Через $L^2_{\varphi,\psi}(G)$ обозначим пространство всех функций $u(t,x)$, удовлетворяющих условию

$$\int_0^\infty\int_0^\infty |u(t,x)|^2\,d\varphi(t)d\psi(x)<\infty .$$

Вопрос о единственности и принадлежности решения пространству непрерывных и квадратично суммируемых функций для линейных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра на полуоси рассматривался в работе[1]. Для систем линейных интегральных уравнений типа ВольтерраI рода на полуоси этот вопрос изучен в работе [3].

Для функций от двух независимых переменных аналогичные вопросы исследовались в работе [2].

Ограниченность и устойчивость решения слабо нелинейных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка типа Вольтерра на полуоси рассмотрены в работе [4].

ТЕОРЕМА. Если выполняются условия: *(f)*,

а) функции $a(t,x)\psi'(x), b(t,x)\varphi'(t), C(t,x), a'_{\varphi(t)}(t,x)\psi'(x), b'_{\psi(x)}(t,x)\varphi'(t)$, $C'_{\varphi(t)}(t,x), C'_{\psi(x)}(t,x), C''_{\varphi(t)\psi(x)}(t,x)\in C(G)$;

б) $a(t,x)\ge 0, a'_{\varphi(t)}(t,x)\le 0,\quad b(t,x)\ge 0,\quad b'_{\psi(x)}(t,x)\le 0$ $m(t,x)\ge 0$ при $(t,x)\in G$;

в) $C'_{\varphi(t)}(t,x)\le 0,\quad C'_{\psi(x)}(t,x)\le 0,\quad C(t,x)\ge\alpha>0,\quad C''_{\varphi(t)\psi(x)}(t,x)\ge 0$,

$(2m(t,x)\varphi'(t)\psi'(x)-1)\ge 0$ $C^2(t,x)-a'_{\varphi(t)}(t,x)\psi'(x)b'_{\psi(x)}(t,x)\varphi'(t)\le 0$

при $(t,x)\in G$,

г) функции $A(t,x,s), A'_{\varphi(t)}(t,x,s), A'_{\varphi(s)}(t,x,s), A''_{\varphi(t)\varphi(s)}(t,x,s)\in C(G_1)$,

$G_1=\{(t,x,s)/\,0\le s\le t<\infty,\quad 0\le x<\infty\}$, $A(t,x,0)\ge 0$ и $A'_{\varphi(t)}(t,x,0)\ge 0, K_1(t,x)>0$ при $(t,x)\in G$;

$A'_{\varphi(s)}(t,x,s)\le 0$ и $A''_{\varphi(t)\varphi(s)}(t,x,s)\le 0$ при $(t,x,s)\in G_1$;

д) функции $B(t,x,y),\ B'_{\psi(x)}(t,x,y),\ B'_{\psi(y)}(t,x,y), B''_{\psi(x)\psi(y)}(t,x,y)\in C(G_2)$,

$G_2=\{(t,x,y)/\,0\le t<\infty,\quad 0\le y\le x<\infty\}$, $B(t,x,0)\ge 0$ и $B'_{\psi(x)}(t,x,y)\ge 0$ при $(t,x)\in G$;

$B'_{\psi(y)}(t,x,y)\le 0$ и $B''_{\psi(x)\psi(y)}(t,x,y)\le 0$ при $(t,x,y)\in G_2$;

то уравнение (1) имеет единственное решение в $L^2_{\varphi,\psi}(G)\cap C(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сделаем следующую подстановку:

$$u(t,x)=\int_0^t\int_0^x \vartheta(s,y)\,d\varphi(s)d\psi(y)\ ,$$

$$u''_{\varphi(t)\psi(x)}(t,x)=\vartheta(t,x),\qquad u''_{tx}=\varphi'(t)\psi'(x)u''_{\varphi(t)\psi(x)}(t,x)=\varphi'(t)\psi'(x)\vartheta(t,x),$$

$$\vartheta(0,x)=\vartheta_{tx}(0,x)=0$$

$$u'''_{txt}=\varphi''(t)\psi'(x)\vartheta(t,x)+(\varphi'(t))^2\psi'(x)\vartheta'_{\varphi(t)}(t,x)$$

$$u_t'(t,x)=\varphi'(t)u_{\varphi(t)}'(t,x)=\varphi'(t)\int_0^x \vartheta(t,x)d\psi(y)$$

$$u_x'(t,x)=\psi'(x)u_{\psi(x)}'(t,x)=\psi'(x)\int_0^t \vartheta(s,x)d\varphi(s) \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1), имеем:

$$\varphi''(t)\psi'(x)\vartheta(t,x)+(\varphi'(t))^2\psi'(x)\vartheta_{\varphi(t)}'(t,x)+$$

$$+m(t,x)\ \varphi'(t)\psi'(x)\vartheta(t,x)+a(t,x)\psi'(x)\int_0^t \vartheta(s,x)d\varphi(s)+b(t,x)\varphi'(t)\int_0^x \vartheta(t,y)d\psi(y)+$$

$$+C(t,x)\int_0^t\int_0^x \vartheta(s,y)d\varphi(s)d\psi(y)+\int_0^t K_1(t,x)A(t,x,s)K_1(s,x)\varphi'(s)\psi'(x)\vartheta(s,x)d\varphi(s)+$$

$$+\int_0^x K_1(t,x)B(t,x,y)K_1(t,y)\varphi'(t)\psi'(y)\vartheta(t,y)d\psi(y)=f(t,x) \qquad (3)$$

Очевидно, что задача (1)-(*) эквивалентна системе интегро-дифференциальных уравнений (2)-(3). Обе части уравнения (3) умножив на $\vartheta(t,x)$ и интегрируя по области $G_{\varphi(t)\psi(x)}=\{(s,y): 0\le s\le t,\quad 0\le y\le x\}$, получим:

$$\int_0^t\int_0^x (\varphi'(s))^2\psi'(y)\vartheta_{\varphi(s)}'(s,y)\vartheta(s,y)d\psi(y)d\varphi(s)+\int_0^t\int_0^x \varphi''(s)\psi'(y)\vartheta^2(s,y)d\psi(y)d\varphi(s)+$$

$$+\int_0^t\int_0^x \varphi'(s)\psi'(y)m(s,y)\vartheta^2(s,y)d\psi(y)d\varphi(s)+\int_0^t\int_0^x\int_0^s a(s,y)\psi'(y)\vartheta(\tau,y)\vartheta(s,y)d\varphi(\tau)d\psi(y)d\varphi(s)+$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^y b(s,y)\varphi'(s)\vartheta(s,z)\vartheta(s,y)d\psi(z)d\psi(y)d\varphi(s)+$$

$$\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y C(s,y)\vartheta(\tau,z)\vartheta(s,y)d\psi(z)d\psi(z)d\varphi(\tau)d\psi(y)d\varphi(s)+$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^s K_1(s,y)A(s,y,\tau)K_1(\tau,y)\varphi'(\tau)\psi'(y)\vartheta(\tau,y)\vartheta(s,y)d\varphi(\tau)d\psi(y)d\varphi(s)+$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^y K_1(s,y)B(s,y,z)K_1(s,z)\psi'(z)\varphi'(s)\vartheta(s,z)\vartheta(s,y)d\psi(z)d\psi(y)d\varphi(s)$$

$$=\int_0^t\int_0^x f(s,y)\vartheta(s,y)d\psi(y)d\varphi(s). \qquad (4)$$

Введем обозначение

$\vartheta_1(t,x)=K_1(t,x)\vartheta(t,x),\quad (t,x)\in G$

При помощью которого перепишем (4) в следующем виде

$$\int_0^t\int_0^x(\varphi'(s))^2\psi'(y)\vartheta'_{\varphi(s)}(s,y)\vartheta(s,y)d\psi(y)d\varphi(s)+\int_0^t\int_0^x[\varphi''(s)\psi'(y)+\varphi'(s)\psi'(y)m(s,y)]\vartheta^2(s,y)d\psi(y)d\varphi(s)+$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^s a(s,y)\psi'(y)\vartheta(\tau,y)\vartheta(s,y)d\varphi(\tau)d\psi(y)d\varphi(s)+$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^y b(s,y)\varphi'(s)\vartheta(s,z)\vartheta(s,y)d\psi(z)d\psi(y)d\varphi(s)+$$

$$\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y C(s,y)\vartheta(\tau,z)\vartheta(s,y)d\psi(z)d\varphi(\tau)d\psi(y)d\varphi(s)+$$

$$\int_0^t\int_0^x\int_0^s\varphi'(\tau)\psi'(y)A(s,y,\tau)\vartheta_1(\tau,y)\vartheta_1(s,y)d\varphi(\tau)d\psi(y)d\varphi(s)+$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^y\psi'(z)\varphi'(s)B(s,y,z)\vartheta_1(s,z)\vartheta_1(s,y)d\psi(z)d\psi(y)d\varphi(s)=\int_0^t\int_0^x f(s,y)u(s,y)d\psi(y)d\varphi(s) \tag{5}$$

Затем преобразуем первый, четвертый, пятый, шестой, седьмой и восьмой интегралы в левой части равенства (5). Далее используя лемму 1.

$$\int_0^t\int_0^x(\varphi'(s))^2\psi'(y)\vartheta'_{\varphi(s)}(s,y)\vartheta(s,y)d\psi(y)d\varphi(s)=\int_0^t\int_0^x(\varphi'(s))^2\psi'(y)\frac{1}{2}\left(\vartheta'^2(s,y)\right)'_{\varphi(s)}d\psi(y)d\varphi(s)=$$

$$=\int_0^x\frac{1}{2}\psi'(y)\left[\int_0^t(\varphi'(s))^2\left(\vartheta^2(s,y)\right)'_{\varphi(s)}\right]d\psi(y)d\varphi(s)=$$

$$=\int_0^x\frac{1}{2}\psi'(y)\left[(\varphi'(s))^2\left(\vartheta^2(s,y)\right)\Big|_{s=0}^{s=t}-\int_0^t\left((\varphi'(s))^2\right)'_{\varphi(s)}\vartheta^2(s,y)d\varphi(s)\right]d\psi(y)=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^x\psi'(y)(\varphi'(t))^2\left(\vartheta^2(t,y)\right)d\psi(y)-\int_0^t\int_0^x(\varphi''(s))\psi'(y)\left(\vartheta^2(s,y)\right)d\psi(y)d\varphi(s)$$

$$\int_0^t\int_0^x\int_0^s a(s,y)\psi'(y)\vartheta(\tau,y)\vartheta(s,y)d\varphi(\tau)d\psi(y)d\varphi(s)=$$

$$=\int_0^t\int_0^x\psi'(y)a(s,y)\left[\int_0^s\vartheta(\tau,y)d\varphi(\tau)\right]\left[\int_0^s\vartheta(\tau,y)d\varphi(\tau)\right]'_{\varphi(s)}d\psi(y)d\varphi(s)=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^x\psi'(y)a(t,y)\left(\int_0^t\vartheta(\tau,y)d\varphi(\tau)\right)^2d\psi(y)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\psi'(y)a'_{\varphi(s)}(s,y)\left[\int_0^s\vartheta(\tau,y)d\varphi(\tau)\right]^2d\psi(y)d\varphi(s). \tag{6}$$

Аналогично этому получим:

$$\int_0^t\int_0^x\int_0^y\varphi'(s)b(s,y)\vartheta(s,z)\vartheta(s,y)d\psi(z)d\varphi(s)d\psi(y)=$$

$$=\int\limits_0^t\int\limits_0^x \varphi'(s)b(s,y)\left[\int\limits_0^y \vartheta(s,z)d\psi(z)\right]\left[\int\limits_0^y \vartheta(s,z)d\psi(z)\right]'_{\psi(y)} d\psi(y)d\varphi(s)=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^t \varphi'(s)b(x,s)\left(\int\limits_0^x \vartheta(s,z)d\psi(z)\right)^2 d\varphi(s)-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^x \varphi'(y)b'_{\psi(y)}(s,y)\left[\int\limits_0^y \vartheta(s,z)d\psi(z)\right]^2 d\psi(y)d\varphi(s). \qquad (7)$$

Далее, используя леммы 1-3, преобразуем шестой интеграл:

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^x\int\limits_0^s\int\limits_0^y C(s,y)\vartheta(\tau,z)\vartheta(s,y)d\psi(z)d\varphi(\tau)d\psi(y)d\varphi(s)=$$

$$=\int\limits_0^t\int\limits_0^x C(s,y)\left[\int\limits_0^s\int\limits_0^y \vartheta(\tau,z)d\psi(z)d\varphi(\tau)\right]\left[\int\limits_0^s\int\limits_0^y \vartheta(\tau,z)d\psi(z)d\varphi(\tau)\right]''_{\varphi(s)\psi(y)} d\psi(y)d\varphi(s)=$$

$$=\frac{1}{2}C(t,x)\left[\int\limits_0^t\int\limits_0^x \vartheta(\tau,z)d\psi(z)d\varphi(\tau)\right]^2-\frac{1}{2}\int\limits_0^t C'_{\varphi(s)}(s,x)\left(\int\limits_0^s\int\limits_0^x \vartheta(\tau,z)d\psi(z)d\varphi(\tau)\right)^2 d\varphi(s)-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^x C'_{\psi(y)}(t,y)\left(\int\limits_0^t\int\limits_0^y \vartheta(\tau,z)d\psi(z)d\varphi(\tau)\right)^2 d\psi(y)+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^x C''_{\varphi(s)\psi(y)}(s,y)\left(\int\limits_0^s\int\limits_0^y \vartheta(\tau,z)d\psi(z)d\varphi(\tau)\right)^2 d\psi(y)d\varphi(s)-$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^x C(s,y)\left[\int\limits_0^y \vartheta(s,z)d\psi(z)\right]^2\left[\int\limits_0^s \vartheta(\tau,y)d\varphi(\tau)\right]d\psi(y)d\varphi(s). \qquad (8)$$

Преобразуем седьмой интеграл и используя лемма 1

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^x\int\limits_0^s \varphi'(\tau)\psi'(y)A(s,y,\tau)\vartheta_1(\tau,y)\vartheta_1(s,y)d\varphi(\tau)d\psi(y)d\varphi(s)=$$

$$=-\int\limits_0^t\int\limits_0^x\int\limits_0^s \varphi'(\tau)\psi'(y)A(s,y,\tau)\frac{\partial}{\partial\varphi(\tau)}\left(\int\limits_\tau^s \vartheta_1(\xi,y)d\varphi(\xi)\right)\times$$

$$\times d\varphi(\tau)\vartheta_1(s,y)d\psi(y)d\varphi(s)=\int\limits_0^t\int\limits_0^x\left\{-\varphi'(\tau)\psi'(y)A(s,y,\tau)\vartheta_1(s,y)\left(\int\limits_\tau^s \vartheta_1(\xi,y)d\varphi(\xi)\right)\Bigg|_{\tau=0}^{\tau=s}\right\}d\psi(y)d\varphi(s)+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^x\int\limits_0^s\left(\varphi'(\tau)\psi'(y)A(s,y,\tau)\right)'_{\varphi(\tau)}\vartheta_1(s,y)\left(\int\limits_\tau^s \vartheta_1(\xi,y)d\varphi(\xi)\right)d\varphi(\tau)d\psi(y)d\varphi(s)=$$

$$=\int\limits_0^t\int\limits_0^x \varphi'(0)\psi'(y)A(s,y,0)\frac{1}{2}\frac{d}{d\varphi(s)}\left(\int\limits_0^s \vartheta_1(\xi,y)d\varphi(\xi)\right)^2 d\psi(y)d\varphi(s)+$$

$$=\int\limits_0^t\int\limits_0^x\int\limits_0^s\left[\varphi'(\tau)\psi'(y)A(s,y,\tau)\right]'_{\varphi(\tau)}\frac{1}{2}\left(\left[\int\limits_\tau^s \vartheta_1(\xi,y)d\varphi(\xi)\right]^2\right)'_{\varphi(s)}d\varphi(\tau)d\varphi(s)d\psi(y)$$

Применив формулу Дирихле

$$\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x \varphi'(0)\psi'(y)A(s,y,0)\frac{1}{2}\frac{d}{d\varphi(s)}\left(\int_0^s \vartheta_1(\xi,y)d\varphi(\xi)\right)^2 d\psi(y)d\varphi(s)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_\tau^t \{[\varphi'(\tau)\psi'(y)A(s,y,\tau)]\}'_{\varphi(\tau)}\frac{d}{d\varphi(s)}\left(\left[\int_\tau^s \vartheta_1(\xi,y)d\varphi(\xi)\right]^2\right)d\varphi(s)d\varphi(\tau)d\psi(y)$$

$$\frac{1}{2}\int_0^x \varphi'(0)\psi'(y)A(s,y,0)\left(\int_0^s \vartheta_1(\xi,y)d\varphi(\xi)\right)^2\Bigg|_{s=0}^{s=t} d\psi(y)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x \varphi'(0)\psi'(y)[A'(s,y,0)]'_{\varphi(s)}\left(\int_0^s \vartheta_1(\xi,y)d\varphi(\xi)\right)^2 d\psi(y)d\varphi(s)=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^x \varphi'(0)\psi'(y)A(t,y,0)\left(\int_0^t \vartheta_1(\xi,y)d\varphi(\xi)\right)^2 d\psi(y)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x \varphi'(0)\psi'(y)[A(s,y,0)]'_{\varphi(s)}\left(\int_0^s \vartheta_1(\xi,y)d\varphi(\xi)\right)^2 d\psi(y)d\varphi(s)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^x\int_0^t [\ \varphi'(\tau)\psi'(y)A(t,y,\tau)\ ]'_{\varphi(\tau)}\left(\int_\tau^t \vartheta_1(\xi,y)d\varphi(\xi)\right)^2 d\psi(y)d\varphi(\tau)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_\tau^t [\ \varphi'(\tau)\psi'(y)A(s,y,0)\ ]''_{\varphi(\tau)\varphi(s)}\left(\int_0^s \vartheta_1(\xi,y)d\varphi(\xi)\right)^2 d\psi(y)d\varphi(s)d\varphi(\tau), \tag{9}$$

Аналогично этому получим для восьмой слагаемого

$$\int_0^t\int_0^x\int_0^y \varphi'(s)\psi'(z)B(s,y,z)\vartheta_1(s,z)\vartheta_1(s,y)d\psi(z)d\psi(y)d\varphi(s)=$$

$$\frac{1}{2}\int_0^t \varphi'(s)\psi'(0)B(s,x,0)\left(\int_0^x \vartheta_1(s,v)d\psi(v)\right)^2 d\varphi(s)- -\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x \varphi'(s)\psi'(0)[B(s,y,0)]'_{\psi(y)}\left(\int_0^y \vartheta_1(s,v)d\psi(v)\right)^2 d\psi(y)d\varphi(s)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x \varphi'(s)\psi'(z)[B(s,x,z)]'_{\psi(z)}\left(\int_z^x \vartheta_1(s,v)d\psi(v)\right)^2 d\psi(z)d\varphi(s)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_z^x \varphi'(s)\psi'(z)[B(s,y,z)]''_{\psi(z)\psi(y)}\left(\int_z^y \vartheta_1(s,v)d\psi(v)\right)^2 d\psi(y)d\psi(z)d\varphi(s); \tag{10}$$

Далее, равенство (5) перепишем в следующем виде:

$$\frac{1}{2}\int_0^x (\psi'(y))(\varphi'(t))^2\vartheta'^2(t,y)d\psi(y)-\int_0^t\int_0^x \psi'(y)\varphi''(s)\vartheta^2(s,y)d\varphi(s)d\psi(y)+\int_0^t\int_0^x \psi'(y)\varphi''(s)\vartheta^2(s,y)d\varphi(s)d\psi(y)+$$

$$+\int_0^t\int_0^x \varphi'(s)m(s,y)\psi'(y)\vartheta^2(s,y)d\psi(y)d\varphi(s)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^x \psi'(y)a(t,y)\left(\int_0^t \vartheta(\tau,y)d\varphi(\tau)\right)^2 d\psi(y)+\frac{1}{2}\int_0^t \varphi'(s)b(s,x)\left(\int_0^x \vartheta(s,z)d\psi(z)\right)^2 d\varphi(s)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t C'_{\varphi(s)}(s,x)\left(\int_0^s\int_0^x \vartheta(\tau,z)d\psi(z)d\varphi(\tau)\right)^2 d\varphi(s)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t C'_{\psi(y)}(t,y)\left(\int_0^t\int_0^y \vartheta(\tau,z)d\psi(z)d\varphi(\tau)\right)^2 d\psi(y)++\frac{1}{2}C(t,x)\left[\int_0^t\int_0^x \vartheta(\tau,z)d\psi(z)d\varphi(\tau)\right]^2+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\left\{-\psi'(y)a'_{\varphi(s)}(s,y)\left[\int_0^s \vartheta(\tau,y)d\varphi(\tau)\right]^2-\right.$$

$$-2C(s,y)\left[\int_0^s \vartheta(\tau,y)d\varphi(\tau)\right]\left[\int_0^y \vartheta(s,z)d\psi(z)\right]-$$

$$\left.-\varphi'(s)b'_{\psi(y)}(s,y)\left[\int_0^y \vartheta(s,z)d\psi(z)\right]^2\right\}d\psi(y)d\varphi(s)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x C''_{\varphi(s)\psi(y)}(s,y)\left(\int_0^s\int_0^y \vartheta(\tau,z)d\psi(z)d\varphi(\tau)\right)^2 d\psi(y)d\varphi(s)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^x \varphi'(0)\psi'(y)A(t,y,0)\left(\int_0^t \vartheta_1(\xi,y)d\varphi(\xi)\right)^2 d\psi(y)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x \varphi'(0)\psi'(y)[A(s,y,0)]'_{\varphi(s)}\left(\int_0^s \vartheta_1(\xi,y)d\varphi(\xi)\right)^2 d\psi(y)d\varphi(s)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x[\ \varphi'(\tau)\psi'(y)A(t,y,\tau)\ ]'_{\varphi(\tau)}\left(\int_\tau^t \vartheta_1(\xi,y)d\varphi(\xi)\right)^2 d\psi(y)d\varphi(\tau)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_\tau^t[\ \varphi'(\tau)\psi'(y)A(s,y,\tau)\ ]''_{\varphi(\tau)\varphi(s)}\left(\int_\tau^s \vartheta_1(\xi,y)d\varphi(\xi)\right)^2 d\varphi(s)d\psi(y)d\varphi(\tau)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t \varphi'(s)\psi'(0)B(s,x,0)\left(\int_0^x \vartheta_1(s,v)d\psi(v)\right)^2 d\varphi(s)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x \varphi'(s)\psi'(0)[B(s,y,0)]'_{\psi(y)}\left(\int_0^y \vartheta_1(s,v)d\psi(v)\right)^2 d\varphi(s)d\psi(y)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x[\ \varphi'(s)\psi'(z)B(s,x,z)\ ]'_{\psi(z)}\left(\int_z^x \vartheta_1(s,v)d\psi(v)\right)^2 d\psi(z)d\varphi(s)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^y[\ \varphi'(s)\psi'(z)B(s,y,z)\ ]''_{\psi(z)\psi(y)}\left(\int_z^y \vartheta_1(s,v)d\psi(v)\right)^2 d\psi(z)d\psi(y)d\varphi(s)=$$

$$=\int_0^t\int_0^x f(s,y)\vartheta(s,y)d\psi(y)d\varphi(s). \qquad (11)$$

В силу условий а) – д) левая часть соотношения (5) неотрицательна. Поэтому отсюда вытекает следующее неравенство:

$$\frac{1}{2}\int_0^x(\varphi'(t))^2\psi'(y)\vartheta^2(t,y)d\psi(y)+\int_0^t\int_0^x m(s,y)\varphi'(s)\psi'(y)\vartheta^2(s,y)d\psi(y)d\varphi(s)+$$

$$+\frac{\alpha}{2}\left(\int_0^t\int_0^x \vartheta(s,y)d\psi(y)d\varphi(s)\right)^2 \le \int_0^t\int_0^x f(s,y)\vartheta(s,y)d\psi(y)d\varphi(s).$$

(12)

Имеем далее:

$$\int_0^t\int_0^x f(s,y)\vartheta(s,y)d\psi(y)d\varphi(s) \le \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x f^2(s,y)d\psi(y)d\varphi(s) + \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^s \vartheta^2(s,y)d\psi(y)d\varphi(s)$$

$$\int_0^t\int_0^x [2m(s,y)\varphi'(s)\psi'(y)-1]\vartheta^2(s,y)d\psi(y)d\varphi(s)+\alpha u^2(t,x) \le \left|\int_0^t\int_0^x f^2(s,y)d\psi(y)d\varphi(s)\right|$$

Отсюда, в силу условия (f) получаем

$$u^2(t,x) \le \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty\int_0^\infty f^2(s,y)d\psi(y)d\varphi(s).$$

Следовательно, $u(t,x)$ ограничена при $(t,x)\in G$.

Таким образом, теорема доказана.

ПРИМЕР. Рассмотрим уравнение (1) с условиями (*)

$a(t,x)=e^{2-3t}e^{-x}$, $b(t,x)=e^{2-3x}e^{-t}$, $c(t,x)=e^{-2x}e^{-2t}$, $A(t,x,s)=2e^{-s}e^{-x}t$

$B(t,x,y)=2e^{-y}e^{-t}x$ $K_1(t,x)=e^{-2t}e^{-2x}$ $\varphi(t)=e^t$, $\psi(x)=e^x$

$m(t,x)=e^{-t}e^{-x}\ge 0$

и покажем, что выполняются условия а) - д).

Проверим условие а): $a(t,x)=e^{2-3t}e^{-x}\ge 0$,

$a'_{\varphi(t)}(t,x)\le 0$, $a'_{\varphi(t)}(t,x)=-3e^{2-4t}e^{-x}\le 0$.

Проверим условие б): $b(t,x)=e^{2-3x}e^{-t}\ge 0$, $b'_{\psi(x)}(t,x)=-3e^{2-4x}e^{-t}\le 0$.

Проверим условие в): $C(t,x)=e^{-2x}e^{-2t}\ge\alpha>0$,

$C'_{\varphi(t)}(t,x)\le 0$, $C'_{\varphi(t)}(t,x)=-2e^{-3t}e^{-2x}\le 0$,

$C'_{\psi(x)}(t,x)\le 0$, $C'_{\psi(x)}(t,x)=-2e^{-3x}e^{-2t}\le 0$,

$C''_{\varphi(t)\psi(x)}(t,x)\ge 0$, $C''_{\varphi(t)\psi(x)}(t,x)=4e^{-3x}e^{-3t}\ge 0$,

$(2\varphi'_t(t)\psi'_x(x)-1)\ge 0$, $(2e^te^x-1)\ge 0$, $C^2(t,x)-a'_{\varphi(t)}(t,x)\psi'_x(x)b'_{\psi(x)}(t,x)\varphi'_t(t)\le 0$,

$e^{-4t}e^{-4x}-(-3e^2)e^{-4t}e^{-x}e^x(-3e^2)e^{-4x}e^{-t}e^t\le 0$, $e^{-4t}e^{-4x}-9e^4e^{-4t}e^{-4x}\le 0$.

Проверим условия г)

$A_{\varphi(t)}(t,x,s)=\left(2e^{-s}e^{-x}t\right)'_{\varphi(t)}=2e^{-s}e^{-x}e^{-t}\ge 0$,

$A_{\varphi(s)}(t,x,s)=\left(2e^{-s}e^{-x}t\right)'_{\varphi(s)}=-2e^{-2s}e^{-x}e^{-t}\le 0$

$A_{\varphi(t)\varphi(s)}(t,x,s)=\left(2e^{-s}e^{-x}t\right)''_{\varphi(t)\varphi(s)}=-2e^{-2s}e^{-x}e^{-t}\le 0$

Проверим условия д)

$B_{\psi(t)}(t,x,y)=\left(2e^{-y}e^{-t}x\right)'_{\psi(x)}=2e^{-y}e^{-t}e^{-x}\ge 0$,

$B_{\psi(y)}(t,x,y)=\left(2e^{-y}e^{-t}x\right)'_{\psi(y)}=-2e^{-2y}e^{-t}x\le 0$

$$B_{\psi(x)\psi(y)}(t,x,y) = -2e^{-2y}e^{-t}e^{-x} \le 0$$

Таким образом, для этого примера выполнены условия а) - д). Поэтому в силу теоремы решение задачи (1) – (*) принадлежит пространству $C(G)$.

Библиографический список

1. Асанов А., Абдукаримов А. Ограниченность и квадратичная суммируемость решений линейных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра на полуоси //Вестн. ОшГУ. Сер.физ.-мат. наук. 2001. №4. С. 48-53.
2. Асанов А., Абдукаримов А.М. Квадратичная интегрируемости решений систем двумерных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка с частными производными не неограниченных областях //Вест. КазНУ им. Аль-Фараби. Сер. мат., мех., инф. -2004. №1 (40). С. 48-58.
3. Ведь Ю.А., Искандаров С. Об ограниченности решений линейной системы интегро-дифференциальных уравнений второго порядка типа Вольтерра // Уральск.регион. конф. «Функционально-дифференц. уравнения. уравнения и их приложения», Пермь, ферв. 1988 г.: Тез. докл. -Пермь: Пермск. гос. ун-т, 1988. С. 102.
4. Искандаров С. Об ограниченности, устойчивости и принадлежности пространству $L^2[t_0,\infty)$ решений слабо нелинейных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка типа Вольтерра //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. Фрунзе: Илим, 1981. Вып. 14. - С. 149-158.