

Вывод формулы для прогиба плоской решетчатой фермы с консолями в системе Maple методом индукции

Белянкин Никита Андреевич
НИУ «МЭИ»
студент

Бойко Андрей Юрьевич
НИУ «МЭИ»
студент

Плясова Анна Алексеевна
РХТУ им. Д.И.Менделеева
студент

Аннотация

Балочная статически определимая ферма имеет сложную решетчатую структуру. Равномерная нагрузка приложена по узлам верхнего пояса. Методом индукции выводится зависимость прогиба фермы от числа панелей фермы. Операторы системы символьной математики Maple применяются для определения усилий и решения рекуррентных уравнений для нахождения коэффициентов в искомой формуле. Прогиб определяется по формуле Максвелла - Мора. Консольные части имеют по одной панели.

Ключевые слова: ферма, консоль, формула Максвелла-Мора, прогиб, индукция, Maple

Derivation of a formula for deflection of a flat lattice truss with consoles in the Maple system by induction method

Belyankin Nikita Andreevich
NRU «MPEI»
Student

Boyko Andrey Yurievich
NRU «MPEI»
Student

Plyasova Anna Alexeevna
MUCTR
Student

Abstract

Girder statically definable truss has a complex lattice structure. Uniform load applied over the nodes of the upper belt. The induction method is used to derive

the dependence of the truss deflection on the number of truss panels. The operators of the Maple symbolic mathematics system are used to determine the forces in rods and solve recurrent equations to find the coefficients in the desired formula. Deflection is determined by the formula of Maxwell - Mohr. Console parts have one panel each.

Keywords: console, truss, Maxwell -Mohr's formula, deflection, induction, Maple

Ферма высотой $2h$ (рис. 1) с пролетом, состоящим из $2n$ панелей длиной a , нагружена по узлам верхнего пояса. Особенность фермы — консольные части.

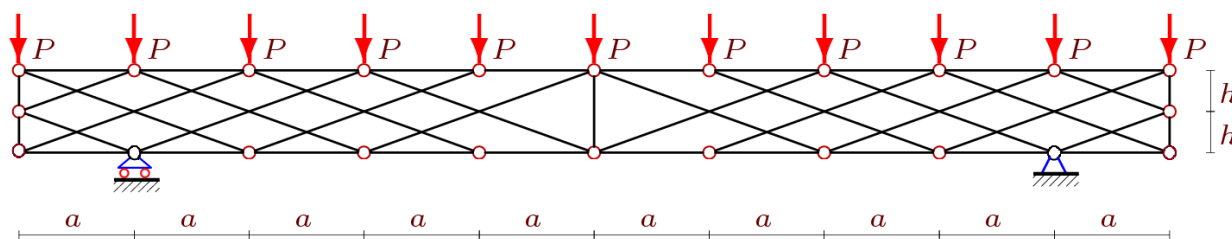


Рисунок 1 — Изображение фермы, $k=2, n=5$

Тройная решетка фермы делает невозможным рассчитать усилия непосредственно известными методами. Единственная возможность вычисление усилий — составление общей системы уравнений равновесия всех узлов. Это удобно делать по известной и хорошо отлаженной программе [1], которая ранее использовалась в ряде аналитических расчетах плоских (арочных, шпренгельных) [2-15] и пространственных [16-22] ферм. Особенно эффективна эта программа для расчета решетчатых ферм [23] и ферм внешне статически неопределимых (распорных) [24], в которых нельзя непосредственно найти даже реакции опор и ферм, допускающих изменяемость при определенном числе панелей [25].

Рассматриваемая ферма содержит $N_s = 8n + 8$ в стержней, включая три стержня, моделирующие шарнирные опоры (подвижную слева и неподвижную справа). Все опорные стержни предполагаются недеформируемыми в сумму формулы Максвелла - Мора при расчете прогиба не входят.

Шарниры и стержни нумеруются (рис. 2).

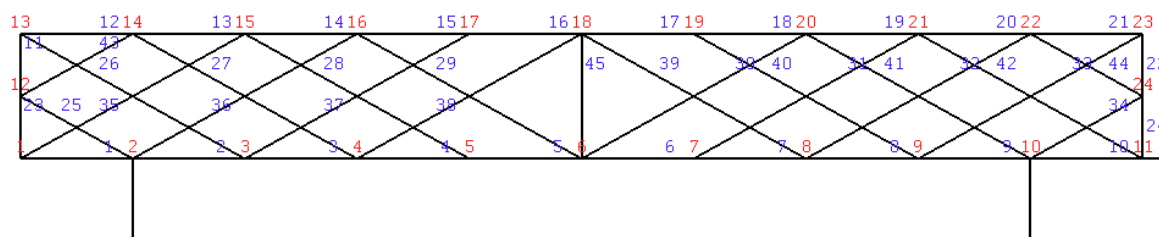


Рисунок 2— Нумерация узлов и стержней, $k=2, n=5$

На языке системы символьной математики Maple фрагмент программы ввода координат шарниров имеет вид

```
> for i to 2*n+1 do x[i]:=a*(i-1); y[i]:=0:
x[i+2*n+2]:=x[i]; y[i+2*n+2]:=2*h: od:
> x[2*n+2]:=0: y[2*n+2]:=h:
> x[4*n+4]:=2*n*a: y[4*n+4]:=h:
```

Коэффициенты уравнения равновесия узлов в проекциях на оси координат (направляющие косинусы усилий) в программе представлены матрицей размера $N_s \times N_s$.

Решение системы линейных уравнений в символьной форме методом обратной матрицы, что наиболее удобно в системе символьной математики Maple [1]) дает выражения для усилий во всех стержнях, входящие в формулу Максвелла-Мора:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{N_s-3} S_i^{(P)} S_i^{(1)} l_i / (EF).$$

Здесь введены стандартные обозначения: EF — жесткость стержней, $S_i^{(P)}$ — усилия в стержнях фермы от заданной нагрузки, l_i — длины стержней, $S_i^{(1)}$ — усилия от единичной силы, приложенной к среднему узлу верхнего пояса. Суммарная нагрузка в рассматриваемой задаче равняется $P_s = (2n+1)P$.

Расчеты показывают общий вид решения:

$$\Delta = P(a^3 A_n + c^3 C_n + h^3 H_n) / (4h^2). \quad (1)$$

Здесь $c = \sqrt{a^2 + h^2}$. Коэффициенты находятся методом индукции. При обнаружении общего члена последовательности коэффициентов при a^3 потребовалось проанализировать 12 выражений прогиба и получить следующие натуральные числа: 20, 128, 580, 1760, 4244, 8736, 16132, 27456, 43924, 66880, 97860, 138528. Найти общий член этой последовательности является затруднительным при применении обычных методов расчета. Оператором *rgf_findrecur* пакета *genfunc* системы Maple для членов последовательности можно получить линейное однородное рекуррентное уравнение шестого порядка:

$$A_k = 4A_{k-1} - 5A_{k-2} + 5A_{k-4} - 4A_{k-5} + A_{k-6}.$$

Оператор *rsolve* находит решение уравнения, задающее искомую формулу для коэффициента при a^3

$$A_k = 2(10k^4 + 2k^2 + 12k - 3(-1)^k + 3) / 3.$$

Аналогично, при анализе численного ряда 20, 56, 116, 192, 292, 408, 548, 704 и т.д., находим, что коэффициент C_k удовлетворяет однородному уравнению четвертого порядка $C_k = 2C_{k-1} - 2C_{k-3} + C_{k-4}$ и имеет вид

$$C_k = 10k^2 + 8k - (-1)^k + 1.$$

В свою очередь, для коэффициента H_k из чередующегося периодического числового ряда: 32, 0, 64, 0, 96, 0, 128, 0, получено следующее однородное уравнение четвертого порядка: $H_k = 2H_{k-2} - H_{k-4}$, а его решение имеет вид:

$$H_k = 8\left(\left(1 - (-1)^k\right)k - (-1)^k + 1\right).$$

Кривые на рисунке 3 построены по формуле (1) для безразмерного относительного прогиба $\Delta' = \Delta EF / (LP_s)$ при длине пролета $L=100$ м. Длина панели a зависит от пролета: $a=L/(2n)$. Высота h указана в метрах.

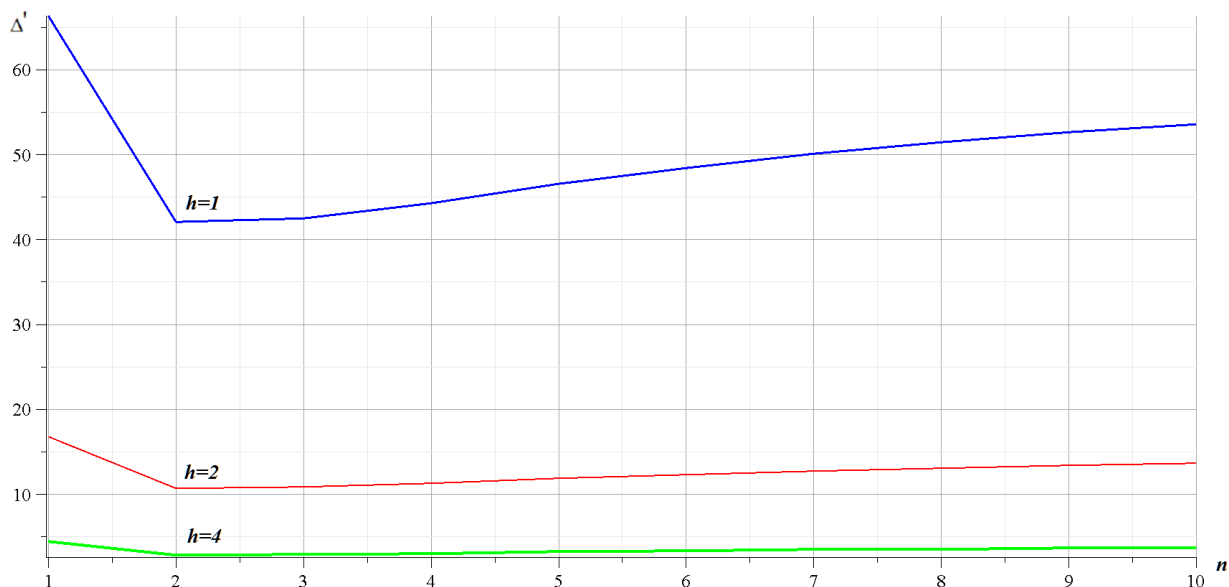


Рисунок 3 — Зависимость прогиба от числа панелей

Характерен «провал» графиков при $n=2$ и дальнейший достаточно плавный рост прогиба.

Метод индукции и программа [1] расчета усилий на языке Maple использовались также при фермы башенного типа [26].

Обзор некоторых работ, использующих систему компьютерной математики Maple, метод индукции и программу [1] при выводе формул для вычисления прогиба плоских ферм, выполнен в [27,28].

Библиографический список

1. Кирсанов М. Н. Maple и MapleT. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
2. Кирсанов М.Н. Анализ усилий и деформаций в корабельном шпангоуте, моделируемом фермой// Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2017. Т. 9. № 3. С. 560-569. 27
3. Кирсанов М.Н., Степанов А.С. О зависимости деформаций плоской арочной фермы от числа панелей // Строительная механика и расчет сооружений. 2017. № 5 (274). С. 9-14.

4. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет балочной фермы с решеткой типа «butterfly» // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 4 (267). С. 2-5.
5. Кирсанов М.Н. Индуктивный анализ деформации арочной фермы // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2018. Т. 14. № 1. С. 64-70.
6. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба арочной фермы // Строительная механика и конструкции. 2018. Т. 1. № 16. С. 7-11.
7. Кирсанов М.Н. Сравнительный анализ жесткости двух схем арочной фермы // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2015. № 9 (36). С. 44-55.
8. Кирсанов М.Н. Аналитический метод расчета прогиба плоской фермы со сложной решеткой шпренгельного типа // Транспортное строительство. 2017. № 5. С. 11-13.
9. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование деформаций плоской фермы арочного типа // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2015. № 3 (31). С. 42-48.
10. Кирсанов М.Н. Аналитическая оценка прогиба и усилий в критических стержнях арочной фермы // Транспортное строительство. 2017. № 9. С. 8-10.
11. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет балочной фермы со сложной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 3 (260). С. 7-12.
12. Kirsanov M.N. A precise solution of the task of a bend in a lattice girder with a random number of panels // Russian Journal of Building Construction and Architecture. 2018. № 1 (37). С. 92-99.
13. Кирсанов М.Н. Зависимость прогиба плоской решетчатой фермы от числа панелей // Механизация строительства. 2017. Т. 78. № 10. С. 24-27.
14. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба двухпролетной плоской фермы // Механизация строительства. 2017. Т. 78. № 5. С. 35-38.
15. Кирсанов М.Н. Статический расчет плоской фермы с двойной треугольной решеткой // Справочник. Инженерный журнал с приложением. 2017. № 11 (248). С. 32-36.
16. Кирсанов М.Н. Расчет пространственной стержневой системы, допускающей мгновенную изменяемость // Строительная механика и расчет сооружений. 2012. № 3 (242). С. 48-51.
17. Кирсанов М.Н. Напряженное состояние и деформации прямоугольного пространственного стержневого покрытия // Научный вестник Воронежского государственного архитектурно-строительного университета. Строительство и архитектура. 2016. № 1 (41). С. 93-100.
18. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба пространственного прямоугольного покрытия // Вестник МГСУ. 2018. Т. 13. № 5 (116). С. 579-586.
19. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой системы // Строительная механика инженерных конструкций и

- сооружений. 2012. № 1. С. 49а-53.
20. Леонов П.Г., Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и анализ пространственной стержневой конструкции в системе maple // В сборнике: Информатизация инженерного образования ИНФОРИНО-2014 Труды международной научно-методической конференции. 2014. С. 239-242.
21. Кирсанов М.Н. Учет строительного подъема в аналитическом расчете пространственной балочной фермы // Известия Московского государственного технического университета МАМИ. 2014. Т. 4. № 2 (20). С. 36-39.
22. Kirsanov M.N. Stress state and deformation of a rectangular spatial rod cover // Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and Architecture. 2016. № 3 (31). С. 71-79.
23. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет многорешетчатой фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2014. № 6 (257). С. 2-6.
24. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба распорной фермы с произвольным числом панелей // Механизация строительства. 2017. Т. 78. № 3. С. 26-29.
25. Кирсанов М.Н. Вывод формулы для прогиба решетчатой фермы, имеющей случаи кинематической изменяемости // Строительная механика и конструкции. 2017. Т. 1. № 14. С. 27-30.
26. Тиньков Д.В. Индуктивный вывод формулы для горизонтального перемещения башенной конструкции // Международный научный семинар «Нелинейные модели в механике, статистике, теории поля и космологии» -GRACOS-17. Казань: Изд-во Академии наук РТ, 2017. С. 249-254.
27. Осадченко Н.В. Аналитические решения задач о прогибе плоских ферм арочного типа // Строительная механика и конструкции. 2018. Т.1. №16. С.12-33.
28. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 66–73. doi: 10.5862/МСЕ.57.6