УДК 517.968

Регуляризация и единственность решений систем линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода на оси

Асанов Авыт
Кыргызско-Турецкий университет "Манас"
Профессор

Камбарова Айсалкын Даминовна
Ошский государственный университет
Старший преподаватель

Аннотация
В данной работе построены регуляризирующие операторы по Лаврентьеву и установлены достаточные условия единственности решений систем линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода на оси.
Ключевые слова: Регуляризация, единственность, решения, система, линейное, интегральное, Вольтерра, первого рода на оси.

Regularization and uniqueness of solutions of systems of linear Volterra integral equations of the first kind on the axis

Asanov Avyt
Kyrgyz-Turkish Manas University
Professor

Kambarova Aisalkyn Daminova
Osh State University
Senior lecturer

Abstract
In this paper, we construct regularizing operators according to Lavrent'ev and establish sufficient conditions for the uniqueness of solutions of systems of linear Volterra integral equations of the first kind on the axis.
Keywords: Regularization, uniqueness, solutions, system, linear, integral, Volterra, first kind on axis.

Одновременно рассматриваются следующие системы линейных интегральных уравнений вида

$$\int_{-\infty}^{t} K(t,s)u(s)ds = f(t), t \in R = (-\infty,\infty), \tag{1}$$

$$\varepsilon v(t,\varepsilon)+\int_{-\infty}^{t}K(t,s)v(s,\varepsilon)ds=f(t)+\varepsilon u_0,t\in R=(-\infty,\infty),\tag{2}$$

где $0<\varepsilon-$ малый параметр, $K(t,s)-$ -извесная $n\times n-$ мерная матричная функция определенная на $G=\{(t,s);-\infty<s\le t<\infty\}$, $f(t)-$ –извесная $n-$ мерная вектор-функция, $u\,(t)$ и $\upsilon(t,\varepsilon)-$ искомые $n-$ мерные вектор-функции.

Различные вопросы интегральных уравнений исследовались во многих работах. В частности, в [1] дан обзор результатов по интегральным уравнениям второго рода. В [2] для линейных интегральных уравнений Вольтерра первого и третьего рода с гладкими ядрами доказано существование многопараметрического семейства решений. В [3] для решения линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода построены регуляризирующие операторы М.М.Лаврентьеву. В [4,10] доказаны теоремы единственности и построены регуляризирующие операторы по М.М.Лаврентьеву для систем линейных и нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода с негладкими матричными ядрами. В [5] для систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода доказаны теоремы единственности и построены регуляризирующие операторы по М.М.Лаврентьеву. В [6] для систем линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода доказаны теоремы единственности и построены регуляризирующие операторы по М.М.Лаврентьеву. В [7] на основе нового подхода изучены вопросы существования и единственности решении для линейных и нелинейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода с многоточечными особенностями. В [9] с помощью модификацией подходу предложенного в [7], изучены один класс систем линейных и нелинейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода.

В настоящей работе на основе модификацией метода предложенного в [5, 9], доказаны теоремы единственности и построены регуляризирующие операторы по М. М. Лаврентьеву для решения систем линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода на оси.

Введем обозначения:

1) Для векторов $u=(u_1,...,u_n)^T, V=(V_1,...,V_n)^T\in R^n$ определим скалярное произведение равенством

$$\langle u,V\rangle=u_1V_1+...+u_nV_n=\sum_{i=1}^{n}u_iV_i$$

и норму

$$\|u\|=\left(\sum_{i=1}^{n}u_i^2\right)^{\frac{1}{2}};$$

2) Обозначим через $C_n(R)-$ пространство всех $n-$ мерных вектор-функций с элементами из $C(R)$ непрерывных на R функций.

3) Через $C_{n0}(R)$ обозначим линейное пространство всех $n-$ мерных вектор-функций с элементами из $C_0(R)$ непрерывных и ограниченных на R

функций. Для $u(t)=(u_1(t),...,u_n(t))\in C_{n,0}(R)$ определим норму $\|u(t)\|=\sup_{t\in R}\|u(t)\|$;

4) Через $C_{\varphi,n}^{\gamma}(R)$ обозначим линейное пространство всех $n-$ мерных вектор-функций $u(t)\in C_{n,0}(R),$ удовлетворяющих условию: $\lim_{t\to-\infty}\|u(t)-u_0\|=0, u_0\in R^n,$

$\|u(t)-u(s)\|\le M|\varphi(t)-\varphi(s)|^{\gamma}, \forall t,s\in R$

где $0<\gamma\le 1, M-$ положительная постоянная, зависящая от $u(t),$ но не от t и s,

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{t}\lambda(s)ds, t\in R,$$

$$\lambda(t)\ge 0, \forall t\in R, \lambda(t)\in C(R).$$

Пусть $\lambda_i(t)(i=1,2,...,n)-$ собственные значение матрицы $\frac{1}{2}[K(t,t)+K^*(t.t)]$ сопряженная матрица к матрице $K(t,t)$ и

$$\lambda(t)=\min_{i\,i}\lambda, t\in R \tag{3}$$

Предположим выполнения следующих условий:

а) Для $K(t,s)=(K_{ij}(t,s)), i,j=1,2,...,nK_{ij}(t,s)\in C(G),$ для фиксированного $t\in R, \|K(t,s)\|, \|K(s,s)\|\in L_1(-\infty,t)$ и $K_{ij}(t,t)\in C(R),$ где $G=(t,s):-\infty; C(G)-$ пространство всех непрерывных функций на G;

б) $\lambda(t)\ge 0$ при $t\in R$ и $\lambda(t)\in C(R),$ где $\lambda(t)-$ определения с помощью формулы (3);

с) при $t>\tau$ для любых $(t,s),(\tau,s)\in G$ справедливо оценка

$$\|K(t,s)-K(\tau,s)\|\le l(s)\left[\int_{\tau}^{t}\lambda(s)ds\right],$$

где $l(t)\in C(R)\cap L_1(R)$

Лемма 1. Пусть выполняются условия $а), в)$ и $x(t,s,\varepsilon)$ Коши для системы

$$\frac{dx}{dt}=-K(t,t)x(t), t\in R,$$

то есть

$$\frac{\mathrm{dX(t,s,}\varepsilon)}{\mathrm{dt}}=-\frac{1}{\varepsilon}K(t,t)X(t,s,\varepsilon), X(t,t,\varepsilon)=I_n \tag{4}$$

где $I_n-n\times n-$ мерная единичная матрица. Тогда справедливо оценка

$$\|X(t,s,\varepsilon)\|\le\exp\left[-\int_{s}^{t}\frac{1}{\varepsilon}\lambda(\tau)d\tau\right], (t,s)\in G \tag{5}$$

Доказательство. Для любого $u \in R^n$ имеем:

$$\frac{d}{dt}\|X(t,s,\varepsilon)u\|^2 = \left\langle \frac{d}{dt}\|X(t,s,\varepsilon)u\|, X(t,s,\varepsilon)u \right\rangle +$$

$$+\left\langle X(t,s,\varepsilon)u, \frac{d}{dt}\|X(t,s,\varepsilon)u\| \right\rangle =$$

$$= \left\langle -\frac{1}{\varepsilon}K(t,t), X(t,s,\varepsilon)u, X(t,s,\varepsilon)u \right\rangle + \left\langle X(t,s,\varepsilon)u - \frac{1}{\varepsilon}K(t,t), X(t,s,\varepsilon)u \right\rangle =$$

$$= -\frac{2}{\varepsilon}\left\langle \frac{1}{2}\left[K(t,t)+K^*(t,t)\right]X(t,s,\varepsilon)u, X(t,s,\varepsilon)u \right\rangle \le$$

$$\le -\frac{2\gamma(t)}{\varepsilon}\|X(t,s,\varepsilon\|^2, (t,s) \in G,$$

то есть

$$\frac{d}{dt}\|X(t,s,\varepsilon\|^2 \le -\frac{2\gamma(t)}{\varepsilon}\|X(t,s,\varepsilon\|^2, (t,s) \in G$$

Здесь мы учитывали условию а), б) и (4). Из паследного неравенства получим оценку (5). Лемма (1) доказана.

Лемма 2. Пусть выполняются условия а), б) и $u(t) \in C^{\gamma}_{\varphi,n}(R)$, $0 < \gamma < 1$,

$$F(t,\varepsilon) = X(t,-\infty,\varepsilon)\left[u(-\infty)-u(t)\right] + \int_{-\infty}^{t} R(t,\tau,\varepsilon)\left[u(-\infty)-u(\tau)\right]d\tau, \varepsilon > 0, \tag{6}$$

где

$$R(t,s,\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}X(t,s,\varepsilon)K(s,s), (t,s) \in G, \tag{7}$$

является резольвентой матричного ядра $\varphi(t) = \int_{-\infty}^{t}\lambda(s)ds, t \in R, \lambda(t) > 0$ при почти всех $t \in R$ и $\|K(t,t)\| \le N_0\lambda(t) > 0$ при всех $t \in R, N_0 > 0.$ Тогда справедлива оценка

$$\|F(t,\varepsilon)\|_C \le C_1\varepsilon^{\gamma},$$

где

$$c_1 = M\sup_{\nu} \ge 0(\varepsilon^{-\nu}\nu^{\gamma}) + MN_0\int_0^{\infty}\varepsilon^{-\nu}\nu^{\gamma}$$

$$M = \sup_{t,s\in R, t\ne s}\frac{\|u(t)-u(s)\|}{|\varphi(t)-\varphi(s)|^{\gamma}}.$$

Доказательство. В силу условию леммы 2, (6) и оценку (5) имеем

$$\|F(t,s)\| \le \|X(t,-\infty,\varepsilon)\|\|u(t)-u(-\infty)\| +$$

$$+\int_{-\infty}^{t}\|R(t,\tau,\varepsilon)\|\|u(t)-u(\tau)\|d\tau \le$$

$$\le \exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{t}\lambda(\tau)d\tau\right]M\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{t}\lambda(\tau,\tau)d\tau\right]^{\gamma}\varepsilon^{\gamma}+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{t}N_0\lambda(\tau,)\exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}\lambda(s)ds\right]M\left[\int_{\tau}^{t}\lambda(s)ds\right]^{\gamma}d\tau \le$$

$$\le M\sup_{\nu\ge 0}(\varepsilon^{-\upsilon}\nu^{\gamma})\varepsilon^{\gamma}+MN_0\left[\int_{0}^{\infty}\varepsilon^{-\nu}\nu^{\gamma}d\nu\right]\varepsilon^{\gamma}=c_1\varepsilon^{\gamma}.$$

Лемма 2 доказана.

Лемма3. Пусть выполняются условия а), в), с) и

$$H(t,s,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}X(t,s,\varepsilon)[K(t,s)-K(s,s)]+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t}R(t,\tau,\varepsilon)[K(t,s)-K(\tau,s)]ds, \qquad (8)$$

где $(t,s)\in G, R(t,s,\varepsilon)$ определить по формуле (6). Тогда справедлива оценка

$$\|H(t,s,\varepsilon)\| \le \left(\varepsilon^{-1}+N_0\right)l(s),(t,s)\in G,\varepsilon>0.$$

Доказательство. В виду условия а), в), с) и (7) из (8) получим

$$\|H(t,s,\varepsilon)\| \le \frac{1}{\varepsilon}\|X(t,s,\varepsilon)\|l(s)\left[\int_{s}^{t}\lambda(\tau)d\tau\right]+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t}\|R(t,\tau,\varepsilon)\|l(s)\int_{s}^{t}\lambda(s)dsd\tau \le$$

$$\le l(s)\exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t}\lambda(\tau)d\tau\right]\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t}\lambda(\tau)d\tau\right]+$$

$$+\frac{N_0 l(s)}{\varepsilon}\int_{s}^{t}\exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}\lambda(\tau)d\tau\right]\lambda(\tau)\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}\lambda(\tau)d\tau\right]d\tau \le$$

$$\le l(s)\sup_{\nu\ge 0}\left[\varepsilon^{-\nu}\nu\right]+$$

$$+N_0 l(s)\int_{0}^{\infty}\varepsilon^{-\nu}\nu d\nu \le \left(\varepsilon^{-}\nu d\nu\right)\le\left(\varepsilon^{-1}+N_0\right)l(s),(t,s)\in G.$$

Лемма 3 доказана.

Теорема. Пусть выполняются условия а), в), с), $\|K(t,t)\le N_0\lambda(t)\|$ при всех $t\in R,$ система (1) имеет решение $u(t)\in C^{\gamma}_{\varphi,n}(R),0<\gamma\le 1.$ Тогда решение $V(t,\varepsilon)$ системы (2) при $\varepsilon\to 0$ сходится во норме $C_{n,0}(R)$ к $u(t).$ При этом справедлива оценка

$$\|V(t,\varepsilon)-u(t)\|_C \le c_2\varepsilon^{\gamma},0<\gamma\le 1, \qquad (9)$$

где

$$c_2 = c_1 \exp\left\{\left(\varepsilon^{-1} + N_0\right)\int_{-\infty}^{\infty} l(s)ds\right\},$$

Число c_1 определена в лемме 2.

Доказательство. В системе (2) сделаем замену

$$V(t,\varepsilon) = u(t) + \xi(t,\varepsilon), \tag{10}$$

где $u(t) -$ решение системы (1). Подставляя (10) в (2) имеем

$$\xi(t,\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{t} K(s,s)\xi(s,\varepsilon)ds -$$
$$-\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{t}[K(t,s) - K(s,s)]\xi(s,\varepsilon)ds - [u(t) - u_0], t \in R. \tag{11}$$

Используя матричную резольвенту

$$R(t,s,\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}X(t,s,\varepsilon)K(s,s), (t,s) \in G \tag{12}$$

матричного ядра $\left[-\frac{1}{\varepsilon}K(s,s)\right]$ систему (11) сводим к эквивалентной системе

$$\xi(t,\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{\tau}[K(t,s) - K(s,s)]\xi(s,\varepsilon)ds - [u(t) - u_0] -$$
$$-\int_{-\infty}^{t} R(t,\tau,\varepsilon)\left\{\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{\tau}[K(\tau,s) - K(s,s)]\xi(s,\varepsilon)ds + u(\tau) - u_0\right\}d\tau.$$

Отсюда используя обобщенную формулу Дирихле, имеем

$$\xi(t,\varepsilon) = \int_{-\infty}^{t} H(t,s,\varepsilon)\xi(t,\varepsilon)ds + F(t,\varepsilon), t \in R, \tag{13}$$

где

$$\mathrm{H}(t,s,\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}[\mathrm{K}(t,s) - \mathrm{K}(s,s)] - \frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t}\mathrm{R}(\tau,s,\varepsilon)[\mathrm{K}(\tau,s) - \mathrm{K}(s,s)]d\tau, \tag{14}$$

$$\mathrm{F}(t,\varepsilon) = -[\mathrm{u}(t) - \mathrm{u}_0] - \int_{-\infty}^{\tau}\mathrm{R}(t,\tau,\varepsilon)[\mathrm{u}(\tau) - \mathrm{u}_0]d\tau. \tag{15}$$

Покажем, что $\mathrm{H}(t,s,\varepsilon)$ определенный по формуле (14), можно преобразовать к виду (8). В самом деле, учитывая (12) и

$$\frac{d\mathrm{X}(t,s,\varepsilon)}{ds} = \frac{1}{\varepsilon}\mathrm{X}(t,s,\varepsilon)\mathrm{K}(s,s), (t,s) \in \mathrm{G},$$

имеем

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mathrm{R}(\mathrm{t},\tau,\varepsilon)[\mathrm{K}(\mathrm{t,s})-\mathrm{K}(\mathrm{s,s})]\mathrm{d}\tau =$$

$$=-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \frac{dX(t,s,\varepsilon)}{ds}\mathrm{d}\tau[\mathrm{K}(\mathrm{t,s})-\mathrm{K}(\mathrm{s,s})]=$$

$$=-\frac{1}{\varepsilon}[\mathrm{K}(\mathrm{t,s})-\mathrm{K}(\mathrm{s,s})+\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{X}(\mathrm{t,s},\varepsilon)[\mathrm{K}(\mathrm{t,s})-\mathrm{K}(\mathrm{s,s})].$$

Отсюда, получим

$$-\frac{1}{\varepsilon}[\mathrm{K}(\mathrm{t,s})-\mathrm{K}(\mathrm{s,s})]=-\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{X}(\mathrm{t,s},\varepsilon)[\mathrm{K}(\mathrm{t,s})-\mathrm{K}(\mathrm{s,s})]+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mathrm{R}(\mathrm{t},\tau,\varepsilon)[\mathrm{K}(\mathrm{t,s})-\mathrm{K}(\mathrm{s,s})]\mathrm{d}\tau,(\mathrm{t,s})\in \mathrm{G} \qquad (16)$$

Подставляя (16) в (14) имеем (8). Аналогично, используя формулы

$$-[\mathrm{u}(\mathrm{t})-\mathrm{u}_0]=-\mathrm{X}(\mathrm{t},-\infty,\varepsilon)[\mathrm{u}(\mathrm{t})-\mathrm{u}_0]+$$

$$+\int_{-\infty}^{\tau}\mathrm{R}(\mathrm{t},\tau,\varepsilon)[\mathrm{u}(\mathrm{t})-\mathrm{u}_0]d\tau, t\in R,$$

из (15) имеем (6).

Далее используя леммы 1 и 2, из (13) получим

$$\|\xi(\mathrm{t,s})\|\le\int_{-\infty}^{t}(e^{-1}+N_0)l(s)\|\xi(s,\varepsilon)\|ds+c_1\varepsilon^{\gamma}, t\in R$$

Отсюда, применяя неравенство Гроноулла-Беллмана и учитывая (10), имеем оценку(9). Теорема доказана.

Следствие. Если выполняются условия а), в) с), $\|\mathrm{K}(\mathrm{t,t})\|\le \mathrm{N}_0\lambda(t), t\in \mathrm{R}$ и существует $T\in R$ такое, что $\lambda(t)>0$ при почти всех $t\in)-\infty;T)$ то решение системы (1) в пространстве $C^{\lambda}_{\varphi,n}(R)$ единственно.

Доказательство. Пусть $u(t)\in C^{\gamma}_{\varphi,n}, 0<\gamma\le 1$ является решением системы (1) при $f(t)=0.$ Умножая системы (1) скалярно справа и слева на

$u_0=\lim_{t\to-\infty}u(t)\in R^n$

и складывая, имеем

$$\left\langle\int_{-\infty}^{t}K(s,s)u_0ds,u_0\right\rangle+\left\langle u_0,\int_{-\infty}^{t}K(s,s)u_0ds\right\rangle+\left\langle\int_{-\infty}^{t}K(s,s)[u(s)-u_0]ds,u_0\right\rangle+$$

$$+\left\langle u_0,\int_{-\infty}^{t}K(s,s)[u(s)-u_0]ds\right\rangle+\left\langle\int_{-\infty}^{t}[K(t,s)-K(s,s)]u(s)ds,u_0\right\rangle+$$

$$+\left\langle u_{0,}\int_{-\infty}^{t}[K(t,s)-K(s,s)]u(s)ds\right\rangle=0,$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle-$ скалярное произведение в R^n. Отсюда имеем

$$\int_{-\infty}^{t}\left\langle [K(s,s)+K^{*}(s,s)]u_{0,}u_{0}\right\rangle ds=$$

$$=-\int_{-\infty}^{t}\{\left\langle K(s,s)[u(s)-u_{0}]u_{0}\right\rangle+\left\langle u_{0},K(s,s)[u(s)-u_{0}]\right\rangle\}ds-$$

$$-\int_{-\infty}^{t}\{\left\langle K(t,s)-K(s,s)u(s)_{0}\right\rangle\}ds. \qquad (17)$$

Далее, в силу условия следствие теоремы из (17), получим

$$2\left[\int_{-\infty}^{t}\lambda(s)ds\right]\|u_{0}\|^{2}\le 2N_{0}\left[\int_{-\infty}^{t}\lambda(s)ds\right]\|u_{0}\|\sup_{s\in(-\infty;t)}\|u(s)-u_{0}\|+$$

$$+2\|u_{0}\|\|u_{0}(t)\|_{c}\left[\int_{-\infty}^{t}l(s)ds\right]\left[\int_{-\infty}^{t}\lambda(\tau)d\tau\right],t\in(-\infty,T].$$

Отсюда, получим

$$\|u_{0}\|\le N_{0}\sup_{s\in(-\infty,t)}\|u(s)-u_{0}\|+\|u(t)\|_{C}\int_{-\infty}^{t}l(s)ds,\,t\in(-\infty,T], \qquad (18)$$

Из (18), переходя к пределу при $t\to-\infty$ имеем $\|u_0\|$=0. Тогда из оценки (9) вытекает, что $\|u_0\|_C=0$, т.е. u(t)=0 при $t\in R$. Следствие теоремы доказана.

Пример. Рассмотрим системы (1) и(2) при

$$K(t,s)=\begin{pmatrix}k_{11}(t,s)k_{12}(t,s)\\ k_{13}(t,s)k_{14}(t,s)\end{pmatrix},$$

$$k_{11}(t,s)=a_{1}(s)+l_{1}(s)\left[\int_{s}^{t}\beta_{1}(\tau)d\tau\right],$$

$$k_{12}(t,s)=a_{2}(s)+l_{2}(s)\left[\int_{s}^{t}\beta_{2}(\tau)d\tau\right],$$

$$k_{21}(t,s)=a_{3}(s)+l_{3}(s)\left[\int_{s}^{t}\beta_{3}(\tau)d\tau\right],$$

$$k_{22}(t,s)=a_{4}(s)+l_{4}(s)\left[\int_{s}^{t}\beta_{4}(\tau)d\tau\right],(t,s)\in G,$$

где для фиксированного $t\in Ra_{1}(s),a_{2}(s),a_{3}(s),\lambda(s)=\min_{i=1,3}a_{1}(s)$

$$\beta_{1}(s),\beta_{2}(s),\beta_{3}(s)\in L_{1}(-\infty,t),l_{1},(t)l_{2}(t),l_{3}(t),l_{4}(t)\in L_{1}(R),$$

$a_{1}(t)\ge 0$ и $a_{2}(t)\ge 0$ при всех $t\in R,|a_{i}(t)|\le M_{1}\lambda(t)$ при всех $t\in R,$

$i = 1,2,3, \left|\beta_j(t)\right| \le M_2\lambda(t)$ и $\left|l_j(t)\right| \le M_3 l_5(t)$ при всех $t \in R,$

$j = 1,2,3,4, l_5(t) \in L_1(R), M_1, M_2, M_3 -$ положительные известные постоянные числа.

В этом случае, все условия теоремы выполняются при

$$\lambda(t) = \min_{i=1,3} a_i(t), l(t) = 2M_2M_3l_5(t), t \in R, N_0 = 2M_1.$$

Библиографический список

1. Цалюк З.Б. Интегральные уравнения Вольтерра //Итоги науки и техники. Мат. анализ. Т.15. М., 1977. С. 131-198.
2. Магницкий Н.А. Линейные интегральные уравнения Вольтерра первого рода и третьего рода //Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1979. Т.19. є 4. С. 970-989.
3. Лаврентьев М.М. Об интегральных уравнениях первого рода // Докл. АН СССР. 1959. Т. 127. № 1. С. 31-33.
4. Иманалиев М.И., Асанов А. О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода // Докл. АН СССР. 1989. Т. 309. № 5. С. 1052-1055.
5. Иманалиев М.И., Асанов А. Регуляризация и единственность решений систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода // Докл РАН 2007. Т. 415. № 1. С. 14-17.
6. Иманалиев М.И., Асанов А. О решениях систем линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода // Докл. РАН. 2010. Т. 430. № 6. С. 1-4.
7. Asanov A., Matanova K., Asanov R. A class of linear and nonlinear Fredholm integral equations of the third kind // Kuwait J. of Science. 2017. V. 44. № 1. P. 17-28.
8. Иманалиев М.И., Асанов А., Асанов Р.А. Об одном классе систем линейных и нелинейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода с многоточечными особенностями // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. № 3. С. 387-397.
9. Asanov A. Regularization, uniqueness and existence of Solutions of Volterra equations of the first kind, VSP, Utrecht, The Netherlands, 1998