

Формула для прогиба балочной фермы с треугольной решеткой под действием равномерной нагрузки по нижнему поясу

Белянкин Никита Андреевич
НИУ «МЭИ»
студент

Бойко Андрей Юрьевич
НИУ «МЭИ»
студент

Плясова Анна Алексеевна
РХТУ им. Д.И. Менделеева
студент

Аннотация

Для плоской статически определимой фермы с двумя опорами методом индукции в системе компьютерной математики Maple выводится зависимость прогиба середины пролета от числа панелей. Коэффициенты искомой формулы получаются как решения рекуррентных уравнений. Прогиб определяется с помощью интеграла Мора. Находится асимптотика решения.

Ключевые слова: ферма, интеграла Мора, прогиб, индукция, Maple, асимптотика

Formula for deflection of a beam truss with a triangular lattice under the action of a uniform load on the lower chord

Belyankin Nikita Andreevich
NRU «MPEI»
Student

Boyko Andrey Yurievich
NRU «MPEI»
Student

Plyasova Anna Alexeevna
MUCTR
Student

Abstract

For a planar, statically definable truss with two supports, the induction method in the computer math system Maple derives the dependence of the deflection of the

mid-span on the number of panels. The coefficients of the desired formula are obtained as solutions of recurrent equations. The deflection is determined using the Mohr integral. The asymptotic solution is found.

Keywords: truss, Mohr integral, deflection, induction, Maple, asymptotics

Рассмотрим симметричную балочную статически определимую ферму высотой h (рис. 1) с пролетом, состоящим из n панелей длиной a . Ферма нагружена по узлам нижнего пояса. Особенность фермы — скошенные боковые панели.

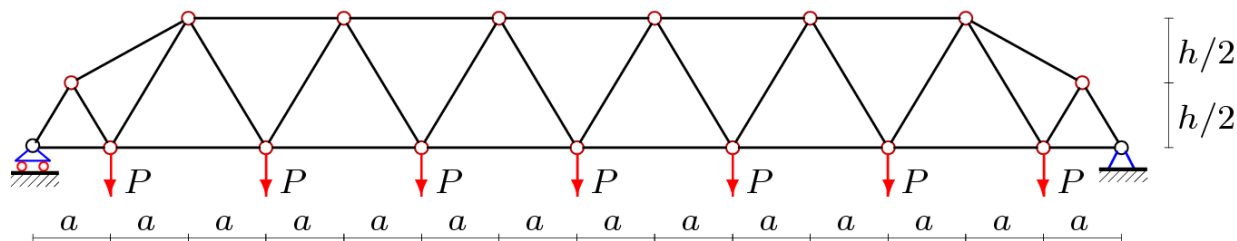


Рисунок 1 — Схема фермы, $n = 2k=8$

Рассматриваемая ферма представляет собой одну из самых простых и широко применяемых в практике строительства. Несмотря на это аналитических решений для этой конструкции в литературе нет. В какой-то степени исключение составляет формула Качурина [1], описанная в монографии под редакцией Стрелецкого [2]. Для высоты, оптимальной по массе балочной фермы с n панелями и длиной пролета L получено соотношение

$$\frac{h_{opt}}{L} = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{0,7n+1}{k}},$$

Для треугольной решетки здесь следует брать $k=2$, и $k=3$ для раскосной. Аналогичная формула, явно не учитывающая число панелей, полученная из условия жесткости на основании формулы Максвелла - Мора имеет более сложный вид

$$\frac{h}{L} = \frac{6,5}{24} \frac{\sigma L}{[f]E} \left(1 + \frac{2h}{L} \right),$$

где принято σ — напряжение (максимальное) в поясе, $[f]/L \approx 1/1500 \dots 1/1000$ — условная мера жесткости.

Аналитическую зависимость прогиба фермы от числа панелей получим по программе [3], которая ранее использовалась в ряде аналитических расчетах арочных [4-15], решетчатых [16-21] и пространственных [22-31] ферм. В [32] по этой же программе были получены зависимости деформации статически определимой плоской фермы башенного типа от ее размеров и числа панелей. Шпренгельные фермы, для которых обычные методы (сечений и вырезания узлов) неприменимы изучены с использованием программы [3] и метода индукции в работах [33-36]. Формулы для прогиба ферм, допускающих кинематическое вырождение

при определенном числе панелей, но вполне работоспособных при в других случаях, методом индукции с применением системы Maple получены в [37-39].

Рассматриваемая ферма содержит $N_s = 4n + 2$ в стержней, включая три стержня, моделирующие шарнирные опоры (подвижную слева и неподвижную справа). Все опорные стержни предполагаются недеформируемыми в сумму формулы Максвелла - Мора при расчете прогиба не входят.

Шарниры и стержни нумеруются (рис. 2).

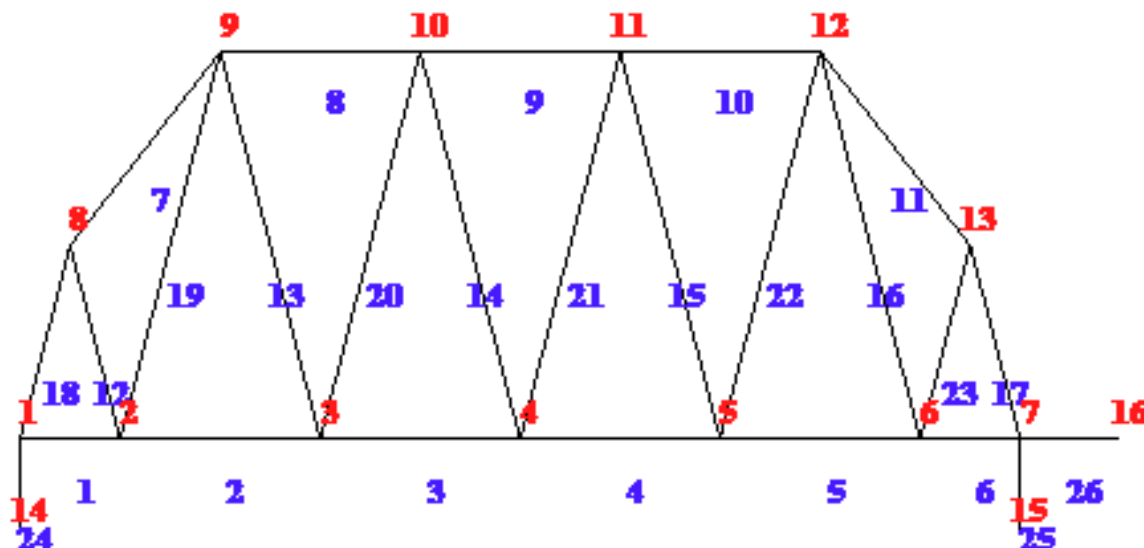


Рисунок 2— Нумерация узлов и стержней, $n=2k=6$

На языке системы символьной математики Maple фрагмент программы ввода координат шарниров имеет вид

```
> x[1]:=0:y[1]:=0:
> for i to n-1 do x[i+1]:=2*a*i-a; y[i+1]:=0:od:
> x[n+1]:=(n-1)*2*a:y[n+1]:=0:
> x[n+2]:=a/2:y[n+2]:=h/2:
> for i to n-2 do x[i+n+2]:=2*a*i; y[i+n+2]:=h:od:
> x[2*n+1]:=x[n]+a/2:y[2*n+1]:=h/2:
```

Порядок соединения стержней (топология конструкции) задают специальные векторы, содержащие номера концов соответствующих стержней

```
> for i to n do
>   N[i]:=[i,i+1]: # Нижний пояс
>   N[i+2*n-1]:=[i+1,i+n+1]: # Раскосы
>   N[i+3*n-1]:=[i,i+n+1]:
> od:
> for i to n-1 do N[i+n]:=[i+n+1,i+n+2]: od: # Верхний пояс
```

Коэффициенты уравнения равновесия узлов в проекциях на оси координат (направляющие косинусы усилий в стержнях фермы, включая три опорные стержня) в программе представлены квадратной матрицей размера $N_s \times N_s$.

Решение системы линейных уравнений в символьной форме методом обратной матрицы, что наиболее удобно в системе символьной математики Maple [3, 40-44]) дает выражения для усилий во всех стержнях, входящие в формулу Максвелла-Мора:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{N_s-3} S_i^{(P)} S_i^{(1)} l_i / (EF).$$

Здесь введены общепринятые обозначения: EF — жесткость стержней (произведение модуля упругости на площадь поперечного сечения), $S_i^{(P)}$ — усилия в стержнях фермы от заданной распределенной нагрузки, l_i — длины стержней, $S_i^{(1)}$ — усилия от единичной силы, приложенной к среднему узлу верхнего пояса. Длины опорных стержней принимаются произвольными, так как в сумму они не входят. Суммарная нагрузка в рассматриваемой задаче равняется $P_s = (n-1)P$.

Расчеты показывают общий вид решения:

$$\Delta = P(a^3 A_k + c^3 C_k + g^3 G_k) / (16h^2). \quad (1)$$

Здесь $c = \sqrt{a^2 + h^2}$, $g = \sqrt{9a^2 + h^2}$ — длины раскосов и боковых стержней верхнего пояса соответственно. Зависимость коэффициентов от числа k находятся методом индукции. Например, при обнаружении общего члена последовательности коэффициентов при a^3 потребовалось проанализировать 10 выражений прогиба и получить следующие натуральные числа: 272, 2112, 8080, 22016, 49040, 95552, 169232, 279040, 435216, 649280. Найти общий член этой последовательности при применении обычных методов расчета затруднительно. Оператором *rgf_findrecur* пакета *genfunc* системы Maple для членов последовательности можно получить линейное однородное рекуррентное уравнение пятого порядка:

$$A_k = 5A_{k-1} - 10A_{k-2} + 10A_{k-3} - 5A_{k-4} + A_{k-5}, \quad k = 2, 3, \dots$$

Оператор *rsolve* находит решение этого уравнения, задающее искомую формулу для коэффициента при a^3

$$A_k = 16(10k^4 - 20k^3 + 17k^2 - 10k + 3) / 3.$$

Аналогично, при анализе численного ряда 21, 67, 145, 255, 397, 571 и т.д., находим, что коэффициент C_k удовлетворяет однородному уравнению третьего порядка $C_k = 3C_{k-1} - 3C_{k-2} + C_{k-3}$ и имеет вид

$$C_k = 16k^2 - 34k + 25, \quad k = 2, 3, \dots$$

В свою очередь, для коэффициента G_k из периодического числового ряда: 3, 5, 7, 9 и т.д., получено однородное уравнение второго порядка: $G_k = 2G_{k-1} - G_{k-2}$, а его решение имеет вид:

$$G_k = 2k - 1, k = 2, 3, \dots$$

Кривые на рисунке 3 построены по формуле (1) для безразмерного относительного прогиба $\Delta' = \Delta EF / (LP_s)$ при длине пролета $L=100$ м. Длина панели a зависит от пролета: $a=L/(2n)$. Суммарная нагрузка на фермы $P_s = P(n-1)$. Высота h указана в метрах.

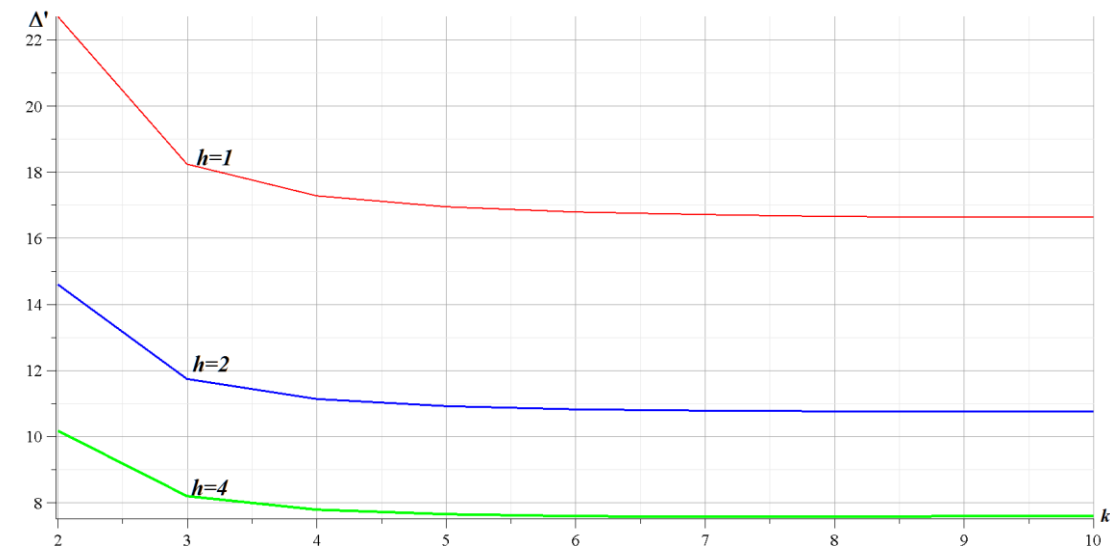


Рисунок 3 — Зависимость относительного прогиба от числа панелей

Характерен достаточно плавный рост прогиба при $k > 5$. Рост практически незаметен, однако положительное значение предела (угол наклона асимптоты) $\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta' / k = h / (2L)$ явно указывает на это. Предел легко вычисляется оператором системы Maple:

$$\text{limit}(\Delta/k, k=\text{infinity}).$$

Аналитические обзоры решений для плоских ферм, полученные в системе компьютерной математики Maple с помощью метода индукции, можно найти в [45,46].

Библиографический список

1. Качурин В.К. О прогибе мостовых ферм. Сб. №17. Отделение инженерных исследований НТК НКПС, 1928.
2. Металлические конструкции. Специальный курс/Н. С. Стрелецкий, Е.И. Беленя, Г.С. Ведеников, Е.Н. Лессиг, К. К. Муханов. М.: Издательство литературы по строительству. 1965. 368 с.
3. Кирсанов М. Н. Maple и Maplet. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
4. Бирбасов А. А. Аналитический расчет прогиба плоской арочной фермы, нагруженной по верхнему поясу//Научный альманах. 2016. №6-2 (19). С. 198-201.
5. Кирсанов М.Н., Степанов А.С. О зависимости деформаций плоской

- арочной фермы от числа панелей // Строительная механика и расчет сооружений. 2017. № 5 (274). С. 9-14.
6. Кирсанов М.Н. Индуктивный анализ деформации арочной фермы // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2018. Т. 14. № 1. С. 64-70.
 7. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба арочной фермы// Строительная механика и конструкции. 2018. Т. 1. № 16. С. 7-11.
 8. Кирсанов М.Н. Сравнительный анализ жесткости двух схем арочной фермы // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2015. № 9 (36). С. 44-55.
 9. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование деформаций плоской фермы арочного типа // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2015. № 3 (31). С. 42-48.
 10. Кирсанов М.Н. Аналитическая оценка прогиба и усилий в критических стержнях арочной фермы // Транспортное строительство. 2017. № 9. С. 8-10.
 11. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета деформаций арочной фермы с произвольным числом панелей // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2018. № 4 (67). С. 86-94.
 12. Компанеец К. А Расчет смещения подвижной опоры плоской арочной раскосной фермы при нагрузке в середине пролета // Молодежь и наука. 2017. №4. С.108.
 13. Савиных А. С. Анализ прогиба арочной раскосой фермы, нагруженной по верхнему поясу. // Строительство и архитектура. 2017. Том 5. Выпуск 3 (6). С. 12-17.
 14. Тиньков Д.В. Расчет прогиба плоской арочной фермы с крестообразной решеткой // Постулат. 2017. № 12 (26). С. 74.
 15. Осадченко Н.В. Аналитические решения задач о прогибе плоских ферм арочного типа// Строительная механика и конструкции. 2018. Т.1. №16. С.12-33.
 16. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет балочной фермы со сложной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 3 (260). С. 7-12.
 17. Kirsanov M.N. A precise solution of the task of a bend in a lattice girder with a random number of panels // Russian Journal of Building Construction and Architecture. 2018. № 1 (37). С. 92-99.
 18. Кирсанов М.Н. Зависимость прогиба плоской решетчатой фермы от числа панелей // Механизация строительства. 2017. Т. 78. № 10. С. 24-27.
 19. Кирсанов М.Н., Хроматов В.Е. Моделирование деформаций плоской фермы треугольного очертания // Строительная механика и расчет сооружений. 2017. № 6 (275). С. 24-28.
 20. Кирсанов М.Н., Москвин В.Г. Деформации плоской фермы с усиленной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2018. № 4 (279). С. 10-14.
 21. Кирсанов М.Н. Индуктивный вывод формул для деформаций плоской

- решетчатой фермы // Строительство и реконструкция. 2017. № 2 (70). С. 17-22.
22. Кирсанов М.Н. Учет строительного подъема в аналитическом расчете пространственной балочной фермы // Известия Московского государственного технического университета МАМИ. 2014. Т. 4. № 2 (20). С. 36-39.
23. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и оптимизация пространственной балочной фермы // Вестник Московского энергетического института. 2012. № 5. С. 5-8.
24. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба пространственного прямоугольного покрытия // Вестник МГСУ. 2018. Т. 13. № 5 (116). С. 579-586.
25. Кирсанов М.Н. Особенности аналитического расчета пространственных стержневых систем // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. № 5 (238). С. 11-15.
26. Кирсанов М.Н. Оценка прогиба и устойчивости пространственной балочной фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 5 (268). С. 19-22.
27. Кирсанов М.Н. Статический расчет и анализ пространственной стержневой системы // Инженерно-строительный журнал. 2011. № 6 (24). С. 28-34.
28. Кирсанов М.Н. Напряженное состояние и деформации прямоугольного пространственного стержневого покрытия // Научный вестник Воронежского государственного архитектурно-строительного университета. Строительство и архитектура. 2016. № 1 (41). С. 93-100.
29. Кирсанов М.Н. Расчет пространственной стержневой системы, допускающей мгновенную изменяемость // Строительная механика и расчет сооружений. 2012. № 3 (242). С. 48-51.
30. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой системы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2012. № 1. С. 49-53.
31. Леонов П.Г., Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и анализ пространственной стержневой конструкции в системе Maple // В сборнике: Информатизация инженерного образования ИНФОРИНО-2014 Труды международной научно-методической конференции. 2014. С. 239-242.
32. Тиньков Д.В. Индуктивный вывод формулы для горизонтального перемещения башенной конструкции // Международный научный семинар "Нелинейные модели в механике, статистике, теории поля и космологии" - GRACOS-17. Казань: Изд-во Академии наук РТ, 2017. С. 249-254.
33. Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A. Analytical calculation and analysis of planar springel truss // Строительная механика и конструкции. 2018. № 2 (17). С. 72-79.
34. Кирсанов М.Н. Аналитический метод расчета прогиба плоской фермы со сложной решеткой шпренгельного типа // Транспортное строительство.

2017. № 5. С. 11-13.
35. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба и усилий в шпренгельной ферме с произвольным числом панелей // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2018. Т. 14. № 2. С. 90-95.
36. Гавриленко А.Б., Кирсанов М.Н. Аналитическая оценка жесткости шпренгельной фермы // Строительство и реконструкция. 2018. 2(76). С. 11-17.
37. Кирсанов М.Н. Вывод формулы для прогиба решетчатой фермы, имеющей случаи кинематической изменяемости // Строительная механика и конструкции. 2017. Т. 1. № 14. С. 27-30.
38. Кирсанов М.Н. Формула для прогиба и анализ кинематической изменяемости решетчатой фермы // Строительная механика и конструкции. 2017. Т. 2. № 15. С. 5-10.
39. Кирсанов М.Н., Разананирина Р.К. Формула для прогиба решетчатой фермы, имеющей случаи кинематической изменяемости // Постулат. 2017. № 9 (23). С. 1.
40. Голоскоков Д. П. Практический курс математической физики в системе Maple. СПб.: Изд-во ПаркКом, 2010. 644 с.
41. Матросов А. В. Maple 6. Решение задач высшей математики и механики. СПб: БХВ-Петербург, 2001. 528 с.
42. Дьяконов В.П. Maple 10/11/12/13/14 в математических расчетах. М.: ДМК Пресс, 2011. 800 с.
43. Кирсанов М.Н. Практика программирования в системе Maple. М.: Издательский дом МЭИ, 2011. 208 с.
44. Кирсанов М.Н. Решения задач по теоретической механике: Учебное пособие М.: ИНФРА-М, 2015. 216 с.
45. Осадченко Н.В. Расчёт прогиба плоской неразрезной статически определимой фермы с двумя пролётами // Постулат. 2017. № 12. С. 28.
46. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 66–73. doi: 10.5862/MCE.57.6