УДК 372.851

Некоторые вопросы методики обучения решению текстовых задач с применением производной

Кислякова Мария Андреевна
Тихоокеанский государственный университет
старший преподаватель кафедры математики и информационных технологий

Федотова Екатерина Сергеевна
Тихоокеанский государственный университет
студент

Аннотация
Статья посвящена вопросам обучения учащихся старших классов решению текстовых задач с применением производной функции. Авторы предлагают классификацию задач, алгоритм решения типовых задач, список задач для организации самостоятельной работы учащихся.
Ключевые слова: текстовые задачи, методика обучения математике, производная, применение производной.

Some questions of teaching methods for solving text problems with the use of derivative

Kislyakova Maria Andreevna
Pacific National University
senior lecturer, Department of mathematics and information technologies

Fedotova Ekaterina Sergeevna
Pacific National University
student

Abstract
The article is devoted to the issues of teaching high school students to solve text problems using the derived function. The authors propose a classification of problems, algorithm for solving typical problems, a list of tasks for the organization of independent work of students.
Keywords: word problems, teaching methods of mathematics, the derivative, applications of the derivative.

Актуальность. Решение текстовых задач является одной из самых сложных тем школьного курса математики. К началу изучения темы «Производная функции» учащиеся имеют достаточно большой опыт решения традиционных сюжетно-текстовых задач алгебраическим методом.

Под алгебраическим методом в школьном курсе математики понимается решение текстовых задач с помощью составления уравнения или системы уравнений с двумя неизвестными.

Опыта решения текстовых задач функционально-графическим методом, при котором необходимо составить функцию и провести ее исследование, у учащихся нет. Однако умение составлять математическую модель задачи и ее исследование функционально-графическим методом, является показателем высокой математической культуры. Поэтому необходима целенаправленная методика обучения учащихся составлению функции по условию задачи и исследование ее свойств с помощью ее производной.

При изучении гуманитарных, социально-экономических процессов и объектов окружающего мира часто возникает задача определения скорости этих процессов. Решение этой задачи приводит к понятию производной функции, являющемуся основным понятием дифференциального исчисления и его приложениям.

Метод нахождения экстремальных значений функции имеет важнейшее, ключевое значение для решения большого класса задач из разных разделов курса физики, математики и экономики. Специфика этих задач включает получение на основе некоторых физических и математических закономерностей функциональной зависимости и нахождение экстремального значения [4].

Решение различных прикладных задач в формате ЕГЭ часто сводится к нахождению экстремальных (минимальных или максимальных) значений некоторой функции. Точки, в которых функция принимает экстремальные значения, определяются с помощью производной функции.

Классификация текстовых задач, решаемых функционально-графическим методом. В настоящей работе будем придерживаться «контекстной» классификации текстовых задач (рис. 1), т.е. текстовые задачи будем распределять в зависимости от того контекста (сюжета), который задан в условии задачи.

Рисунок 1. Классификация текстовых задач, решаемых функционально-графическим методом

Алгоритм решения текстовой задачи функционально-графическим методом с применением производной функции

I Этап. Анализ задачи и определение необходимости введения переменных для составления функции.

На этом этапе определите величины о которых идет речь, выделите независимую величину и зависимые величины.

II Этап. Формализация условия задачи.

Перевод исходной задачи на язык математики и составление функции. Одну из участвующих в задаче неизвестных величин, через которую сравнительно нетрудно выразить, примите за независимую переменную и обозначьте ее буквой x (или какой-либо иной буквой). Установите реальные границы изменения независимой переменной в соответствии с условиями задачи, т. е. область определения для искомой функции. Установите, какая зависимая величина будет функцией у. Исходя из условий задачи, выразите y через x.

III Этап. Работа с составленной функцией.

На этом этапе для функции $y=f(x)$, $x \in X$ найдите $y_{наим.}$ или $y_{наиб}$, в зависимости от того, что требуется в условии задачи.

Для этого, найдите производную функции и с ее помощью исследуйте функцию на экстремумы и наибольшее и наименьшее значение.

IV Этап. Интерпретация найденного решения.

Переведите полученное решение с «языка математики» в термины первоначальной задачи. Дайте ответ на вопрос задачи. Здесь следует дать конкретный ответ на вопрос задачи, опираясь на результаты, полученные на этапе работы с данной функцией.

Замечание. Как показывает педагогический опыт, самым сложным для учащихся в решении текстовых задач с применением производной функции, является введение переменной и составление функции. Поэтому необходимо провести работу по формированию умения вводить переменную и составлять соответствующую функцию.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример № 1. Какова наибольшая площадь прямоугольного участка земли, который можно огородить куском проволоки длиной *2p?*

– От каких двух параметров зависит площадь прямоугольника? (От ширины и длины).

– Давайте разберемся, есть ли необходимость вводить переменную? (Да)

– Тогда обозначим длину прямоугольника за *x*.

– Чему будет равна тогда ширина? *(p-x)*

– Чему тогда будет равна площадь данного прямоугольного участка? (*S= x(p-x))*.

– Правильно, а теперь можем ли составить функцию, которая зависит от параметра *x*? (Можно, используя формулу площади данного участка)

– Запишите каждый в тетрадки данную функцию, а потом сверимся.

– Итак, у нас получилась с вами функция ***S(x)=x(p-x).***

– А есть ли ограничения на переменную *x? (*Да, *x* должен изменяться от [0; p].)

– Осталось рассмотреть данную функцию и найти ее критические точки, и исходя из того, что нам надо найти ответить на вопрос задачи.

Пример № 2. На странице текст должен занимать 384 см^2. Верхнее и нижнее поля должны быть по 3 см, левое и правое – по 2 см. Если принимать во внимание только экономию бумаги, то каковы должны быть наиболее выгодные размеры страницы?

Решение:

Необходимо сделать чертеж по данной задаче. (Учащиеся читают условие задачи и пробуют самостоятельно сделать чертеж).

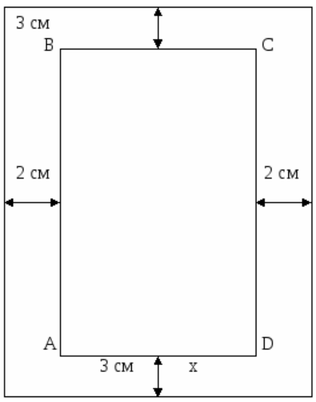

Рисунок 2. Чертеж к примеру № 2

– Какую форму имеет страница? (Форму прямоугольника).

– От каких двух параметров зависит прямоугольник? (От длины и ширины).

– Будем ли мы вводить переменную? (Да).

– Обозначим длину страницы за *x*.

– Выразим ширину страницы через ее длину? (Ширина страницы будет *384/x)*.

– Какие будут ограничения на нашу переменную *x* и будут ли они? (Да ограничения будет на *x*, данная переменная будет изменяться от [0;384]).

– Какие у нас получилось размеры страницы? (Мы получили размеры страницы, которые равны *x+4 и (384/x)+6,* так как необходимо учитывать поля).

– Можем ли мы записать, чему будет равна площадь страницы? (Да, так как мы знаем длину и ширину страницы с учетом полей).

– Запишите, чему будет равна площадь страницы. (Учащиеся самостоятельно записывают, чему будет равна площадь страницы, ***S=(x+4)*((385/x)+6))*** .

– Является ли площадь страницы функцией длины страницы? (Да, так как площадь страницы зависит от переменной *x*).

Осталось рассмотреть данную функцию, найти ее производную и критические точки. Исходя, из этого ответить на вопрос задачи.

***Применение алгоритма к решению текстовых задач с применением производной*.**

Пример 3. Бак для хранения нефтепродуктов, имеющий вид прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием, должен вмещать V литров жидкости. При какой стороне основания площадь поверхности бака (без крышки) будет наименьшей?

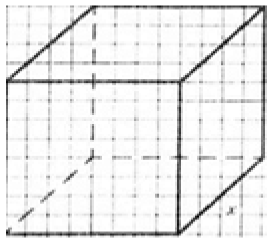

Рисунок 3. Чертеж к примеру № 3

Решение:

Первый этап. Анализ условия задачи.

По условию задачи задан прямоугольный параллелепипед, в основании которого лежит квадрат. Известно, что объем параллелепипеда равен V. Требуется, найти величину основания, при которой площадь поверхности параллелепипеда без верхней грани будет наибольшей.

Второй этап. Составление функции.

1. Оптимизируемая величина – площадь поверхности бака, поскольку в задаче требуется выяснить, когда эта площадь будет наименьшей, обозначим ее буквой S.

2. Площадь поверхности зависит от измерений прямоугольного параллелепипеда. Выберем в качестве независимой переменной – сторону квадрата, служащего основанием параллелепипеда, обозначив ее буквой x. Ясно, что $x > 0$. Других ограничений нет, значит, $0 < x < \infty$.

3. Пусть высота бака равна h, тогда $V = x^2h$, откуда находим $h = \frac{V}{x^2}$.

Поверхность бака состоит из квадрата со стороной x и четырех прямоугольников со сторонами x и $\frac{V}{x^2}$.

Значит, функция для данной задачи имеет вид

$$S = x^2 + 4\frac{V}{x^2}x = x^2 + \frac{4v}{x} \quad \text{где } x \in (0;+\text{oo}).$$

<u>Третий этап</u>. Работа с составленной функцией.

На этом этапе для функции $S = x^2 + 4\frac{V}{x}$, x∈ (0; +oo) надо найти $y_{наим}$.

Для этого найдем производную функции:

$$S' = (x^2 + 4\frac{v}{x})' = 2x - 4\frac{V}{x^2} = 2\frac{x^3-2V}{x^2} .$$

На промежутке (0; +∞) критических точек нет, а стационарная точка только одна: S' = 0 при $x = \sqrt[3]{2V}$. Заметим, что при x $<\sqrt[3]{2V}$ выполняется неравенство S' < 0, а при $x > \sqrt[3]{2V}$ выполняется неравенство S'>0. Значит, x= $\sqrt[3]{2V}$ - единственная стационарная точка, причем точка минимума функции на заданном промежутке, а потому в этой точке функция достигает своего наименьшего значения.

<u>Четвертый этап</u>. *Ответ на вопрос задачи.*

В задаче спрашивается, какой должна быть сторона основания, чтобы бак имел наименьшую поверхность. Мы выяснили, что сторона квадрата, служащего основанием такого бака, равна $\sqrt[3]{2V}$.

Ответ: $\sqrt[3]{2V}$

Пример 4. Из квадратного листа жести со стороной *a* надо изготовить открытую сверху коробку, вырезав по углам квадратики и загнув образовавшиеся кромки. Какой должна быть сторона основания коробки, чтобы ее объем был максимальным?

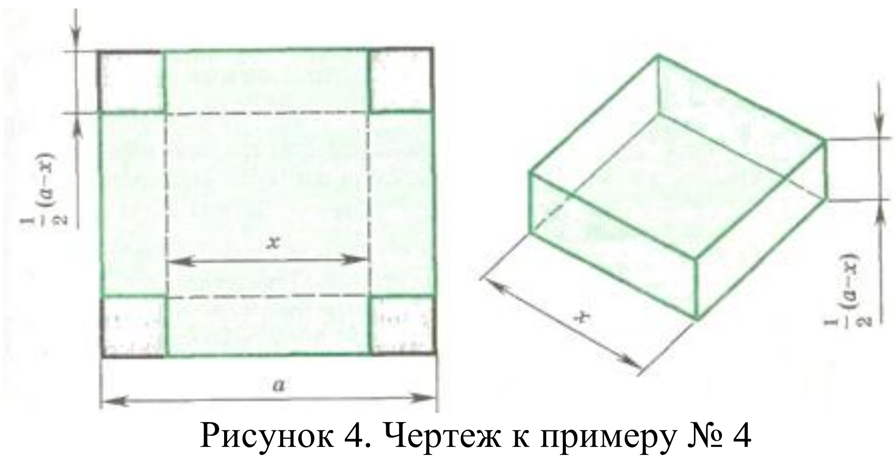

Рисунок 4. Чертеж к примеру № 4

Решение:

<u>Первый этап</u>. Анализ условия задачи.

Дан квадрат со стороной a. Надо составить прямоугольный параллелепипед, чтобы объем был максимальным. При каком значении стороны основания прямоугольного параллелепипеда это возможно?

<u>Второй этап</u>. Составление функции.

Обозначим через x длину стороны основания коробки. Тогда длины сторон вырезанных квадратиков равны $\left(\frac{1}{2}a - x\right)$, а объем коробки равен $\left(\frac{1}{2}a - x\right)x^2$. По смыслу задачи число x удовлетворяет неравенству $0 < x < a$, т. е. принадлежит интервалу $(0; a)$. Таким образом, пример 2 мы свели к такой задаче: найти наибольшее значение функции $V(x) = \left(\frac{1}{2}a - x\right)x^2$ на интервале $(0; a)$.

<u>Третий этап.</u> *Работа с составленной функцией.*

Правило нахождения наименьших и наибольших значений функции было сформулировано для отрезка. Функция V непрерывна на всей числовой прямой. Мы будем искать ее наибольшее значение на отрезке [0; a], потом сделаем выводы для решаемой нами задачи. Находим критические точки функции:

$$V'(x) = \left(\frac{1}{2}(a - x)x^2\right)' = \frac{1}{2})(ax^2 - x^3)' = ax - \frac{3}{2}x^2$$

$$ax - \frac{3}{2}x^2 = 0, x = 0 \text{ или } x = \frac{2}{3}a;$$

$$V\left(\frac{2}{3}a\right) = \frac{1}{2}\left(a - \frac{2}{3}a\right)\left(\frac{2}{3}a\right)^2 = \frac{2}{27}a^3.$$

Так как $V(0) = 0$ и $V(a) = 0$, своего наибольшего значения на отрезке [0; a] функция V достигает при $x = \frac{2}{3}a$, т.е. $\max V(x) = V\left(\frac{2}{3}a\right) = \frac{2}{27}a^3$. Наибольшее значение функции достигается внутри отрезка (0; a), следовательно, и внутри интервала (0; a).

<u>Четвертый этап</u>. *Ответ на вопрос задачи.*

Остается вспомнить, что x – длина стороны основания коробки, имеющей при заданных условиях максимально возможный объем.

Полученный результат означает, что максимальный объем имеет та коробка, сторона основания которой равна $\frac{2}{3}a$.

Для формирования умения решать текстовые задачи с применением производной функции предлагаем следующую систему задач.

1.Сварщики получили задание из металлического стержня длиной ***a*,** необходимо согнуть скобу прямоугольной формы и приварить её к металлической балке. Как выбрать на стержне точки сгиба, чтобы площадь образовавшегося прямоугольника была наибольшей [1]?

2. Найдите размеры коробки наибольшего объема, в основании которой лежит квадрат, а полная поверхность равна 12 м [2].

3. Леонид является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые приборы, но на заводе,

расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно $4t^3$ часов в неделю, то за эту неделю они производят t приборов; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^3 часов в неделю, они производят t приборов . За каждый час работы (на каждом из заводов) Леонид платит рабочему 1 тысячу рублей. Необходимо, чтобы за неделю суммарно производилось 20 приборов. Какую наименьшую сумму придется тратить владельцу заводов еженедельно на оплату труда рабочих [6]?

4. Первичная информация разделяется по серверам №1 и №2 и обрабатывается на них. С сервера №1 при объёме t^2 Гбайт входящей в него информации выходит $20t$ Гбайт, а с сервера №2 при объёме t^2 Гбайт входящей в него информации выходит $21t$ Гбайт обработанной информации,$25 < t < 55$. Каков наибольший общий объём выходящей информации при общем объёме входящей информации в 3364 Гбайт [6]?

5. Пенсионный фонд владеет акциями, цена которых к концу года t становится равной t^2 тыс. руб. (т. е. к концу первого года они стоят 1 тыс. руб., к концу второго — 4 тыс. руб. и т. д.), в течение 20 лет. В конце любого года можно продать акции по их рыночной цене на конец года и положить вырученные деньги в банк под 25% годовых. В конце какого года нужно продать акции, чтобы прибыль была максимальной [6]?

6. Мальчик надувает шарик. При радиусе шарика 10 см скорость увеличения радиуса равна 0,1 см/с. Какой объем воздуха ежесекундно выдыхает мальчик [3]?

Библиографический список

1. Бабушкина Н.М. Урок по теме: «Задачи на отыскание наибольших и наименьших величин». URL: https://открытыйурок.рф/статьи/211725/ (Дата обращения: 15.03.2019).
2. Балабанова В.В. Решение прикладных задач по теме: «Наибольше и наименьшее значение функции». URL: https://открытыйурок.рф/статьи/311608/ (Дата обращения: 15.03.2019).
3. Все о физике. Все для физики. Образовательный портал. URL http://fizportal.ru/node/33 (Дата обращения: 01.04.2019).
4. Дудко Н.Ю. Применение производной функции к решению прикладных геометрических и физических задач / Дудко Н.Ю., Долгих А.Д., Филоненко Т.П. // Наука и производство Урала. 2018. № 14. С. 166-167.
5. Образовательный портал для подготовки к экзаменам «РЕШУ ЕГЭ». Обучающая система Дмитрия Гущина. URL: https://ege.sdamgia.ru (Дата обращения: 01.04.2019).
6. ФИПИ «Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки. Открытый банк заданий ЕГЭ. Математика, профильный уровень. URL: http://www.fipi.ru/ (Дата обращения: 01.04.2019).