

Формула для прогиба фермы с двойной раскосной решеткой под действием сосредоточенной нагрузки

Пережилова Екатерина Дмитриевна

НИУ "МЭИ"

Студент

Аннотация

Нисходящие и восходящие раскосы плоской статически определимой балочной фермы с параллельными поясами имеют разную длину. Методом индукции из анализа ряда решений задач о прогибе ферм с последовательно увеличивающимся числом панелей выводится зависимость прогиба от числа панелей. Упругие стрелки фермы работают только на растяжение и сжатие. Усилия в стержнях находятся в символьной форме в системе символьной математики Maple из решения уравнений равновесия всех узлов. Для вычисления прогиба используется Максвелла- Мора.

Ключевые слова: ферма, формула Максвелла - Мора, прогиб, индукция, Maple

Formula for deflection of the truss with double diagonal lattice under the action of a concentrated load

Perezhilova Ekaterina Dmitrievna

NRU "MPEI"

Student

Abstract

Descending and ascending struts of the flat statically determinate beam truss with parallel belts have a different length. Dependence of the deflection on the number of panels is hatched by the method of induction from the analysis of range of task solution about the truss's deflection with consistently increasing number of panels. The elastic bars of the truss work only on tension and compression. Efforts in the bars are found in symbolic form and in the system of symbolic mathematics Maple from the solution of equilibrium equations of all nodes. Maxwell –Mohr's formula is used to calculate the deflection.

Keywords: truss, Maxwell –Mohr's formula, deflection, induction, Maple

Несмотря на широкое применение численных методов расчета строительных конструкций, ценность простых аналитических формул не уменьшается. Особенно значимы зависимости, полученные не для конкретной конструкции, а универсальные, позволяющие рассчитывать некоторый класс сооружений. Это, в частности, получается, если в формулу вводится какой-то целочисленный параметр, характеризующий число

элементов периодичности регулярной системы. Для балочной фермы это число панелей. Формулы для арочных регулярных статически определимых ферм методом индукции получены в [1-12]. Для вывода искомых зависимостей прогиба от числа панелей использовалась система компьютерной математики Maple. Балочные фермы с различной решеткой рассчитаны аналитически в [13-18], шпренгельные — в [19-22]. Метод индукции в сочетании с возможностями операторов Maple позволяют находить зависимости прогиба от числа панелей и для более сложных пространственных систем [23-32].

Рассмотрим ферму с решеткой, в которой нисходящие раскосы короче восходящих (рис. 1). Ферма имеет $2n$ ячеек периодичности по верхнему поясу. Общее число стержней $n_s = 8n + 14$, включая три жесткие опорные стержня. В поясах фермы содержится $4n + 3$ стержней длиной $2a$, в решетке — остальные $4n + 8$ стержня, из них $2n$ раскосов длиной $d = \sqrt{9a^2 + 4h^2}$ и $2n + 2$ раскосов длиной $c = \sqrt{a^2 + 4h^2}$.

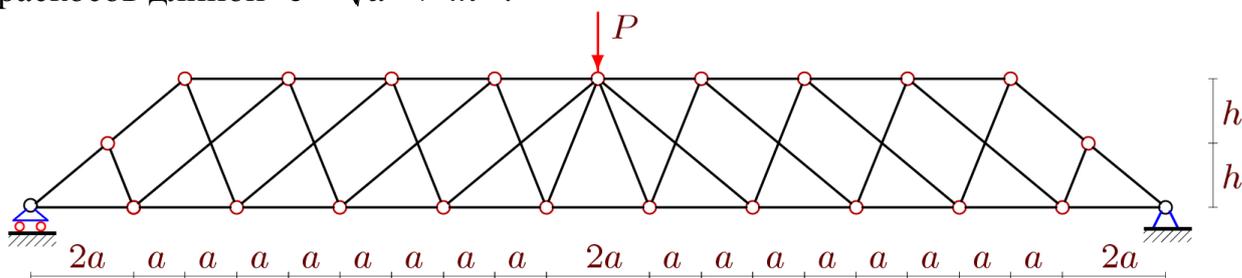


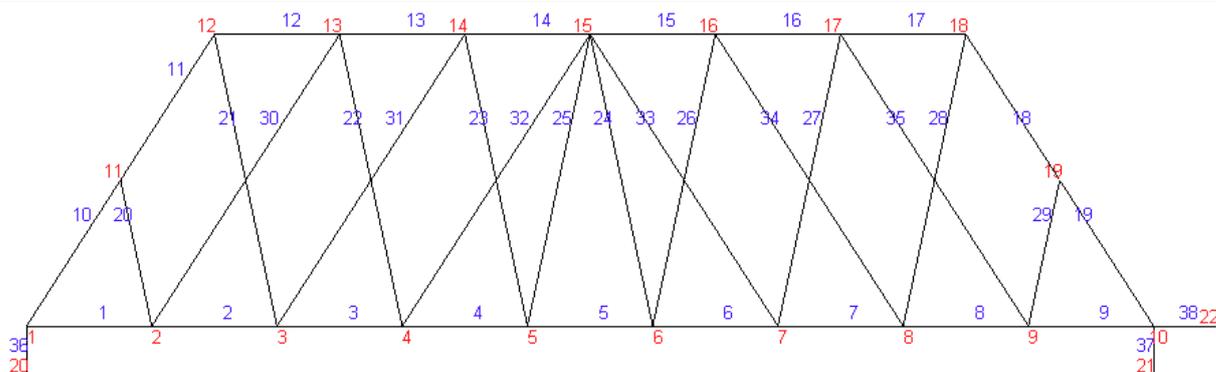
Рис. 1. Ферма при $n = 4$

Расчет усилий в стержнях ведется в программе, написанной на языке системы символьной математики Maple. Величина прогиба находится по формуле Максвелла-Мора:

$$\Delta = P \sum_{i=1}^{n_s-3} S_i^{(P)} s_i l_i / (EF).$$

Обозначено: l_i — длина стержня i , $S_i^{(P)}$ — усилие от действия нагрузки, s_i — усилия от единичной силы в точке определения прогиба, EF — жесткость стержней.

Для определения усилий узлы и стержни фермы нумеруются (рис. 2). Нумерация стержней начинается с нижнего пояса.

Рис. 2. Номера стержней и узлов, $n = 3$

Задаются координаты узлов. Начало координат принимается в опоре 1. Длины опорных стержней выбираются произвольными (в сумму формулы Максвелла – Мора они не входят). Приведем соответствующий фрагмент программы:

```
> for i to 2*n+4 do
  x[i]:=2*a*(i-1): y[i]:=0:
end:
> x[2*n+5]:=3*a/2: y[2*n+5]:=h:
> for i to 2*n+1 do
> x[i+2*n+5]:=2*a*i+a: y[i+2*n+5]:=2*h:
> end:
```

Номер узла начала и конца стержня-вектора:

```
> for i to 2*n+3 do
  N[i]:=[i,i+1]:
end:
> N[2*n+4]:=[1,2*n+5]:
> for i to 2*n+2 do
  N[i+2*n+4]:=[i+2*n+4,i+2*n+5]:
end:
> N[4*n+7]:=[2*n+4,4*n+7]:
> for i to n+2 do
  N[i+4*n+7]:=[i+1,i+2*n+4]:
  N[i+5*n+9]:=[i+n+1,i+3*n+5]:
end:
> for i to n do
> N[i+6*n+11]:=[i+1,i+2*n+6]:
> N[i+7*n+11]:=[i+3+n,i+3*n+5]:
> end:
```

Показано, что форма решения для ферм с разным числом панелей не меняется:

$$EF\Delta = P(c_1a^3 + c_2c^3 + c_3d^3) / (16h^2). \quad (1)$$

Необходимо получить зависимость коэффициентов от числа панелей. Для коэффициента c_1 с помощью оператора **rgf_findrecur** из специализированного пакета **genfunc** получено однородное рекуррентное уравнение пятого порядка:

$$c_{1,n} = 3c_{1,n-1} - 2c_{1,n-2} - 2c_{1,n-3} + 3c_{1,n-4} - c_{1,n-5}.$$

Для следующих коэффициентов получены одинаковые однородные рекуррентные уравнения третьего порядка:

$$c_{2,n} = c_{2,n-1} + c_{2,n-2} - c_{2,n-3},$$

$$c_{3,n} = c_{3,n-1} + c_{3,n-2} - c_{3,n-3}.$$

С помощью оператора **rsolve** находятся и решения этих уравнений:

$$c_1 = 32n^3 / 3 + 48n^2 + 4(-1)^n + 244n / 3 + 50,$$

$$c_2 = (3 - 3(-1)^n + 2n) / 2, \quad (2)$$

$$c_3 = (2n + 3 + (-1)^n) / 2.$$

Выражение (1) с коэффициентами (2) составляют решение поставленной задачи. С помощью этого решения можно легко и точно получить выражение прогиба фермы при любом (даже весьма большом) числе панелей, не прибегая к сложным численным расчетам.

Графические возможности Maple позволяют также наглядно представить распределение усилий в стержнях фермы. На рисунках 3 и 4 показаны усилия в стержнях, отнесенные к нагрузке P при $a = 1$ м, $h = 3$ м.

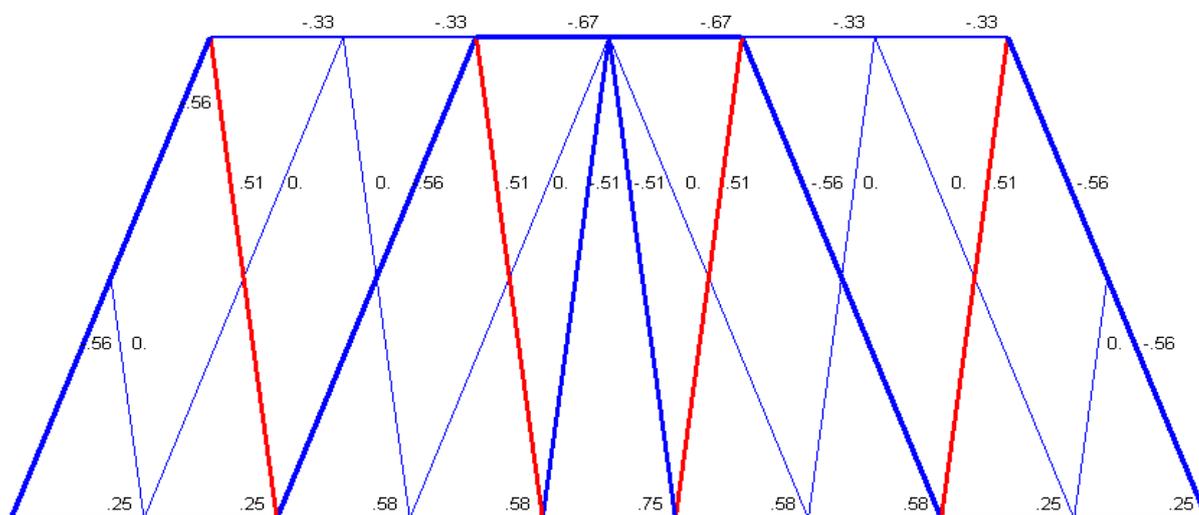
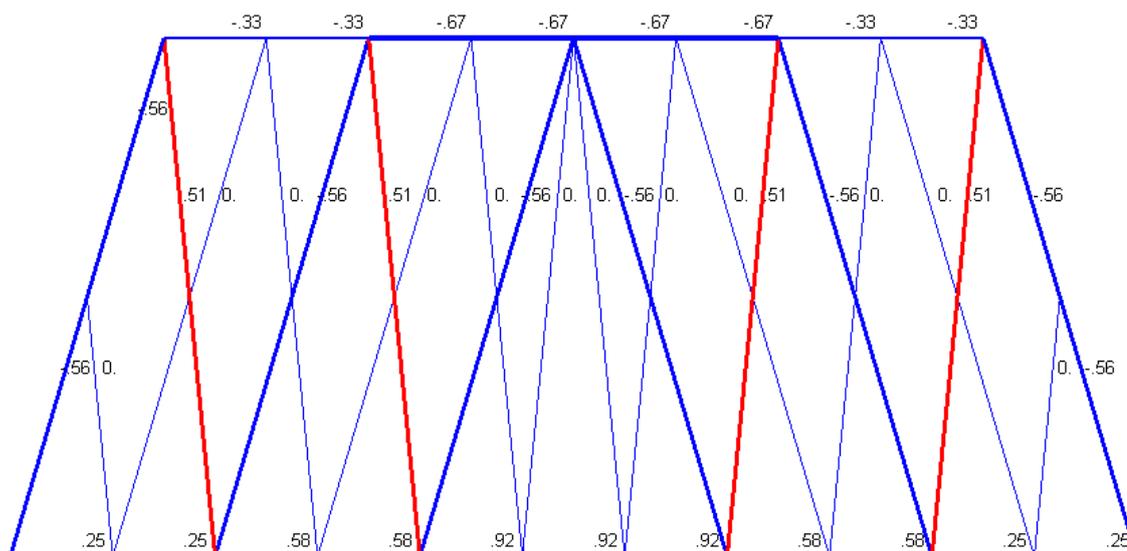


Рис. 3. Распределение усилий при $n = 3$

Рис. 4. Распределение усилий при $n = 4$

Интересно заметить, что в верхнем поясе значение усилия в наиболее сжатом стержне $S = -0,67P$ одинаково и для $n=3$ и $n=4$, в то время как усилие растяжения стержня в середине нижнего пояса при $n=4$ заметно больше, чем при $n=3$.

Обзоры некоторых аналитических решений для задачи о прогибе плоских ферм методом индукции в системе Maple приведены в [33,34]. Численно – аналитический метод решений задач строительной механики с использованием Maple рассмотрен в [35-39].

Библиографический список

1. Осадченко Н.В. Аналитические решения задач о прогибе плоских ферм арочного типа // Строительная механика и конструкции. 2018. Т.1. №16. С.12-33.
2. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета деформаций арочной фермы с произвольным числом панелей // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2018. № 4 (67). С. 86-94.
3. Кирсанов М.Н. Индуктивный анализ деформации арочной фермы // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2018. Т. 14. № 1. С. 64-70.
4. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба арочной фермы // Строительная механика и конструкции. 2018. Т. 1. № 16. С. 7-11.
5. Кирсанов М.Н. Аналитическая оценка прогиба и усилий в критических стержнях арочной фермы // Транспортное строительство. 2017. № 9. С. 8-10.
6. Компанец К. А Расчет смещения подвижной опоры плоской арочной раскосой фермы при нагрузке в середине пролета // Молодежь и наука. 2017. №4. С.108.
7. Савиных А. С. Анализ прогиба арочной раскосой фермы, нагруженной по

- верхнему поясу // Строительство и архитектура. 2017. Том 5. Выпуск 3 (6). С. 12-17.
8. Тиньков Д.В. Расчет прогиба плоской арочной фермы с крестообразной решеткой // Постулат. 2017. № 12 (26). С. 74.
 9. Кирсанов М.Н., Степанов А.С. О зависимости деформаций плоской арочной фермы от числа панелей // Строительная механика и расчет сооружений. 2017. № 5 (274). С. 9-14.
 10. Кунов И.М. О жесткости арочной фермы треугольного очертания в зависимости от перераспределения площадей стержней и числа панелей // Научный альманах. 2016. №6-2 (19). С. 253-256.
 11. Кирсанов М.Н. Сравнительный анализ жесткости двух схем арочной фермы // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2015. № 9 (36). С. 44-55.
 12. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование деформаций плоской фермы арочного типа // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2015. № 3 (31). С. 42-48.
 13. Кирсанов М.Н. Зависимость прогиба плоской решетчатой фермы от числа панелей // Механизация строительства. 2017. Т. 78. № 10. С. 24-27.
 14. Кирсанов М.Н., Хроматов В.Е. Моделирование деформаций плоской фермы треугольного очертания // Строительная механика и расчет сооружений. 2017. № 6 (275). С. 24-28.
 15. Кирсанов М.Н., Москвин В.Г. Деформации плоской фермы с усиленной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2018. № 4 (279). С. 10-14.
 16. Кирсанов М.Н. Индуктивный вывод формул для деформаций плоской решетчатой фермы // Строительство и реконструкция. 2017. № 2 (70). С. 17-22.
 17. Тиньков Д.В. Индуктивный вывод формулы для горизонтального перемещения башенной конструкции // Международный научный семинар "Нелинейные модели в механике, статистике, теории поля и космологии" - GRACOS-17. Казань: Изд-во Академии наук РТ, 2017. С. 249-254.
 18. Пережилова Е.Д. Точное решение задачи о смещении подвижной опоры фермы с произвольным числом панелей // Научный альманах. 2016. № 9-2(23). С. 42-45.
 19. Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A. Analytical calculation and analysis of planar springel truss // Строительная механика и конструкции. 2018. № 2 (17). С. 72-79.
 20. Кирсанов М.Н. Аналитический метод расчета прогиба плоской фермы со сложной решеткой шпренгельного типа // Транспортное строительство. 2017. № 5. С. 11-13.
 21. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба и усилий в шпренгельной ферме с произвольным числом панелей // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2018. Т. 14. № 2. С. 90-95.
 22. Гавриленко А.Б., Кирсанов М.Н. Аналитическая оценка жесткости шпренгельной фермы // Строительство и реконструкция. 2018. 2(76). С.

- 11-17.
23. Кирсанов М.Н. Учет строительного подъема в аналитическом расчете пространственной балочной фермы // Известия Московского государственного технического университета МАМИ. 2014. Т. 4. № 2 (20). С. 36-39.
24. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и оптимизация пространственной балочной фермы // Вестник Московского энергетического института. 2012. № 5. С. 5-8.
25. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба пространственного прямоугольного покрытия // Вестник МГСУ. 2018. Т. 13. № 5 (116). С. 579-586.
26. Кирсанов М.Н. Оценка прогиба и устойчивости пространственной балочной фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 5 (268). С. 19-22.
27. Кирсанов М.Н. Особенности аналитического расчета пространственных стержневых систем // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. № 5 (238). С. 11-15.
28. Кирсанов М.Н. Статический расчет и анализ пространственной стержневой системы // Инженерно-строительный журнал. 2011. № 6 (24). С. 28-34.
29. Кирсанов М.Н. Напряженное состояние и деформации прямоугольного пространственного стержневого покрытия // Научный вестник Воронежского государственного архитектурно-строительного университета. Строительство и архитектура. 2016. № 1 (41). С. 93-100.
30. Кирсанов М.Н. Расчет пространственной стержневой системы, допускающей мгновенную изменяемость // Строительная механика и расчет сооружений. 2012. № 3 (242). С. 48-51.
31. Леонов П.Г., Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и анализ пространственной стержневой конструкции в системе Maple // В сборнике: Информатизация инженерного образования ИНФОРИНО-2014 Труды международной научно-методической конференции. 2014. С. 239-242.
32. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой системы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2012. № 1. С. 49-53.
33. Осадченко Н.В. Расчёт прогиба плоской неразрезной статически определимой фермы с двумя пролётами // Постулат. 2017. № 12. С. 28.
34. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 66–73.
35. Матросов А.В. Расчет балочных перекрытий численно-аналитическим методом // Журнал университета водных коммуникаций. 2012. № 1. С. 8-15.
36. Матросов А.В. Расчет гидротехнических сооружений численно-аналитическим методом // Журнал университета водных коммуникаций.

2010. № 4. С. 8-14.

37. Goloskokov D.P., Matrosov A.V. Comparison of two analytical approaches to the analysis of grillages // В сборнике: 2015 International Conference "Stability and Control Processes" in Memory of V.I. Zubov (SCP) 2015. С. 382-385.
38. Голоскоков Д.П. Моделирование напряженно-деформированного состояния упругих тел с помощью полиномов // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2013. № 1. С. 8-14.
39. Голоскоков Д.П. Расчет плоских перекрытий в системах символьных вычислений // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2015. № 4 (32). С. 119-125.