Постулат. 2016. №12 ISSN 2414-4487

УДК 372.851

Задачи оптимизации в школьном курсе математики и методы их решения

Усова Лилия Алексеевна
Приамурский государственный университет им. Шолом – Алейхема
Лицей 11 класс

Размахнина Анна Николаевна
Приамурский государственный университет им. Шолом – Алейхема
Студент

Одоевцева Ирина Геннадьевна
Приамурский государственный университет им. Шолом – Алейхема
Старший преподаватель кафедры информационных систем, математики и методик обучения, преподаватель лицея

Аннотация
В статье рассматриваются роль задач оптимизации в школьном курсе математики и различные методы их решения: метод исследования функции с помощью производной, графический метод линейного программирования, решение средствами Excel.
Ключевые слова: задачи с практическим содержанием, метод исследования функции с помощью производной, графический метод линейного программирования, Excel

Optimization problems in the school course of mathematics and methods for their solution

Usova Lilija
Sholom-Aleichem Priamursky State University
Lyceum 11 class

Razmakhnina Anna Nikolaevna
Sholom-Aleichem Priamursky State University
Student

Odoevceva Irina Gennadyevna
Sholom-Aleichem Priamursky State University
Senior lecturer of the Department of Information Systems, Mathematics and teaching methods

Abstract
The article discusses the role of optimization problems in the school course of mathematics and their solution methods: method of research functions using the derivative, graphical method of linear programming, solving by means of Excel.
Keywords: tasks with practical content, research method functions using the derivative, graphical method of linear programming, Excel

В настоящее время возрастает необходимость реализации прикладной направленности математического образования. Российские школьники испытывают затруднения в применении предметных знаний в повседневной жизни, при продолжении своего обучения в вузе, в практической деятельности [1].

Среди прикладных задач, решаемых в школе, особое место занимают задачи оптимизации, в которых нужно находить максимальное или минимальное значение некоторой функции, т.к. стремление к оптимизации – это естественное состояние человека. Каждый шаг человека, каждое принимаемое им решение – это зачастую неосознанное действие для того, чтобы получить оптимальный результат. Представителям самых разных специальностей приходится иметь дело с задачами оптимизации: инженеры-технологи стараются организовать производство так, чтобы выпускалось как можно больше продукции при наименьшем количестве затрат; конструкторы пытаются разработать прибор для космического корабля, чтобы его масса была наименьшей; экономисты стараются спланировать связи завода с источниками сырья так, чтобы транспортные расходы оказались минимальными и т. д. Каждая организация сталкивается с необходимостью сделать определенную работу, затратив как можно меньше ресурсов.

Задачами оптимизации человек интересуется с античных времен. История сохранила легенду о задаче Дидоны. Финикийская царевна Дидона (IX век до н. э.) решила организовать поселение на берегу понравившегося ей залива в Северной Африке. Она уговорила вождя местного племени отдать ей клочок земли, который можно охватить воловьей шкурой. Воины Дидоны разрезали шкуру на тонкие полоски, и Дидона охватила ремнем участок земли на берегу залива, составленный из этих полосок. Так возник город Карфаген. Задача Дидоны состоит в указании формы границы участка, имеющей заданную длину, при которой площадь участка максимальна. Если знать экстремальное свойство круга, то решение получается немедленно: граница участка представляет часть окружности, имеющей заданную длину.

Задачи на экстремумы оказались среди тех, которыми интересовались лучшие умы античных времен Евклид, Архимед, Аристотель и др., но они решали их только геометрическими методами, и каждая задача для своего решения требовала специфического приема. В XVII веке появились общие методы изучения задач, которые привели к созданию дифференциального и интегрального исчислений.

Первые элементы математического анализа были созданы И. Кеплером (1615 г.), который так описывает появление своего открытия: «Мне как хорошему хозяину следовало запастись вином. Я купил его несколько бочонков. Через некоторое время пришел продавец измерить вместимость бочонков, чтоб назначить цену на вино. Для этого он опускал в каждый бочонок железный прут и, не прибегая ни к какому вычислению, немедленно объявлял, сколько в бочке вина». После размышлений И. Кеплер открыл секрет такого простого способа измерения объема бочек. Оказалось, что бочары за долгую историю научились изготавливать бочки такой формы, при которой они имели наибольший объем при заданной длине мокрой части прута. А поскольку в окрестности максимума значения функции изменяются мало (в этом суть открытия И. Кеплера), то торговец вина почти не ошибался при объявлении объема бочки по одному измерению. Открытое И. Кеплером основное свойство экстремумов было оформлено в виде теоремы П. Ферма (для многочленов), затем И. Ньютоном и Г. В. Лейбницем для произвольных функций. Теперь основное свойство носит название теоремы Ферма, согласно которой в точке экстремума непрерывной функции $f(x)$ производная функции равна нулю. С тех пор исследование функций с помощью анализа бесконечно малых величин стало одним из мощнейших математических методов и привело к созданию современного математического анализа.

Впервые с задачами оптимизации учащиеся знакомятся в 8 классе при изучении темы «Квадратичная функция». Но в школьных учебниках таких задач недостаточно. Позже в 11 классе задачи данного вида встречаются при изучении темы «Применение производной к исследованию функции».

Отличительной особенностью задач оптимизации является то, что одно или несколько условий в ее формулировке позволяют получить либо дополнительное уравнение, либо выделить единственное решение из многих возможных. Решения составляют задачу на отыскание наибольшего или наименьшего значения некоторой функции. Здесь и приходят на помощь методы решения задач оптимизации, о которых и пойдет речь в нашей работе [2].

Суть одного из методов заключается в ***исследовании функции с помощью производной*** для нахождения экстремального значения функции.

Алгоритм решения задач с помощью производной:

1) укажите в задаче все постоянные и переменные величины, а также величину, которая исследуется;

2) из всех переменных величин выберите одну в качестве независимой и укажите область ее изменения;

3) величину, исследуемую в задаче, выразите через выбранную независимую переменную;

4) найдите критические точки полученной функции на области изменения ее аргумента;

5) найдите наибольшее (наименьшее) значение функции на ее области определения;

6) ответьте на вопрос задачи.

Рассмотрим применение данного алгоритма при решении задачи.

Задача «Швейный цех». В швейном цехе имеется 164 м ткани. На шитье одного халата требуется 4 м ткани, а одной пижамы 3 м. Сколько следует изготовить халатов и пижам для получения наибольшей прибыли от реализации продукции, если халат стоит 7 руб., а пижама 6 руб.? Известно, что халатов требуется изготовить не менее 14 шт.?

Пусть x – количество халатов, y – количество пижам. Тогда $x \in [14; 41]$, $y \in [0; 54]$ и решение задачи сводится к нахождению максимального значения функции от двух переменных D (x;y) = 7x + 6y.

$$\begin{cases} D(x;y) = 7x + 6y \\ 4x + 3y = 164 \\ x \geq 14 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Выразим y через x (y = 164/3 - 4x/3) и перейдем к функции с одной переменной. D(x) = 7x + 6(164/3 - 4x/3) = 7x + 984/3 - 24x/3 = 7x + 328 - 8x = 328 - x.

Исследуем данную функцию D'(x) = -1 < 0, значит, функция убывает на всей своей области определения и max значение она достигает при $x_{min} = 14$. 4x + 3y = 164, при x = 14 y = 36. Итак, следует изготовить 14-халатов и 36-пижам.

Также эту задачу можно решить с помощью ***графического метода линейного программирования***. Данный метод используется для решения задач с двумя переменными и основывается на возможности графического изображения области допустимых решений задачи и уровня целевой функции. Линией уровня линейной целевой функции называется прямая, на которой целевая функция задачи принимает постоянное значение.

Данный метод решения не рассматривается в школе, хотя он вполне доступен учащимся и формирует общее видение целого ряда тем и разделов школьного курса математики. Его можно предложить для изучения на элективном курсе в профильных классах.

Алгоритм решения задач графическим методом:

1. строим многоугольник решений системы ограничений;

2. строим некоторую линию уровня для выбранного значения и нормаль линии уровня;

3. перемещаем линию уровня в задаче на максимум в направлении вектора нормали, в задаче на минимум в противоположном направлении до положения опорной прямой;

4. находим точки пересечения опорной прямой и многоугольника решений системы ограничений.

Рассмотрим решение задачи «Швейный цех» графическим методом.

1. Решение системы ограничений есть прямоугольный треугольник, полученный пересечением прямых x = 14, 4x + 3y = 164 и оси OX.

2. Нормаль линии уровня есть вектор с началом в начале координат и концом в точке (7; 6).

3. Перемещаем линию уровня в задаче в направлении вектора нормали.

4. Находим точки пересечения опорной прямой и многоугольника решений системы ограничений (рис. 1). Точка пересечения есть вершина треугольника с координатами (14; 36) – это и есть решение нашей задачи.

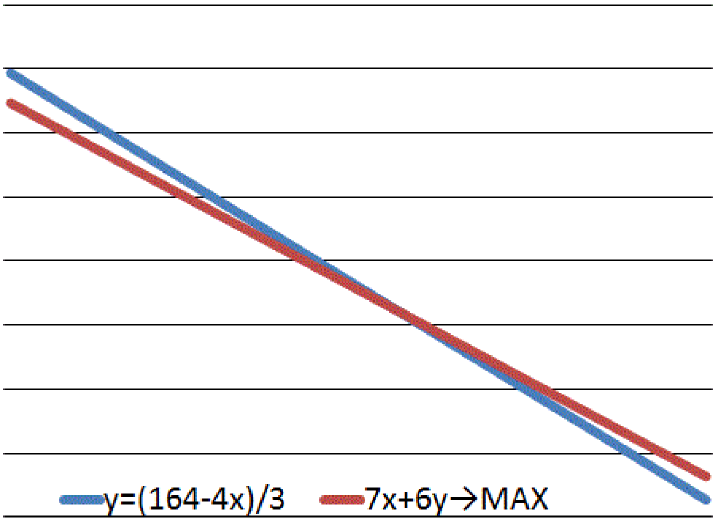

Рисунок 1 – Графическое изображение для задачи «Швейный цех»

Кроме того, задачи на оптимизацию можно решать, используя различные информационные технологии [3 - 6]. Мы рассмотрим ***решение в MS Excel***. Для этого заполним ячейки таблицы исходными данными (рис 2).

B	C	D	E	F	G	H
Ресурсы	вид изделия		Всего материала(м)			
	халат	пижама				
	4	3	164			
Цена за 1 ед.	7	6				7x+6y→max
						4x+3y=164

Рисунок 2. Таблица с исходными данными

	A	B	C	D	E
1		Ресурсы	вид изделия		Всего материала(м)
2			халат	пижама	
3			4	3	
4		Цена за 1 ед.	7	6	164
5					
6					
7					
8		План	1	1	
9		Функция цели	=СУММПРОИЗВ(C4:D4;C8:D8)		
10					
11					
12		Ограничения	=СУММПРОИЗВ(C3:D3;C8:D8)	<=	=E3
13					

Рисунок 3. Таблица с исходными данными в формате формул

Ячейки C8:D8 – полученное оптимальное количество изделий каждого вида;

C4:D4 – коэффициенты функции;

C9 – значение функции;

C12, E12 – ограничения.

Решим задачу с помощью опции в MS Excel: «Поиск решения».

Делаем активной ячейку C9. На вкладке данные, запускаем команду «Поиск решения», появится диалоговое окно (рис. 4).

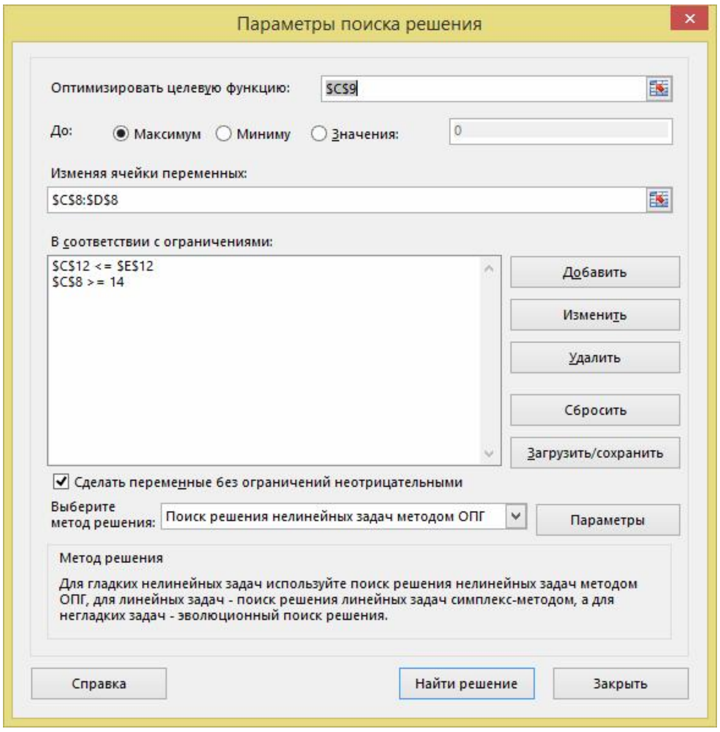

Рисунок 4. Окно поиск решения

В поле оптимизировать целевую функцию указана ссылка на выбранную активную ячейку C9. Устанавливаем переключатель на максимальное значение. В поле, изменяя ячейки переменных, выбираем ячейки, значения которых необходимо рассчитать. Ограничения устанавливаются с помощью кнопки добавить, после нажатия, на которую вызывается диалоговое окно (рис. 5).

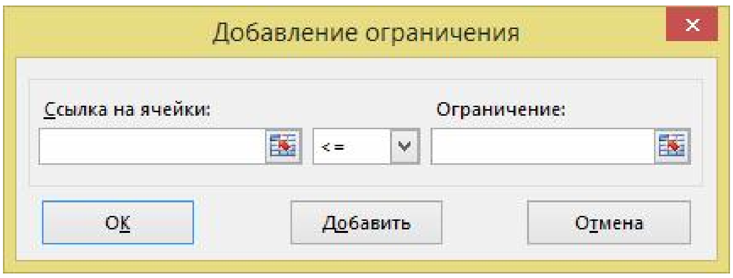

Рисунок 5. Диалоговое окно ограничений

Введем в поле ссылка на ячейку, адрес ячейки, содержащей формулу левой части ограничения (C12), затем выбираем знак соотношения (<=) и в поле ограничение, устанавливаем адрес ячейки правой части ограничения (E12). Также заполним ограничение, согласно условию число халатов не меньше 14. В поле ссылка на ячейку, вводим адрес ячейки (C8), выбираем знак соотношения (> =), в поле ограничения вводим значение 14. Кода все ограничения введены, нажимаем ОК.

Далее для решения поставленной задачи нажимаем «Найти решение». В появившемся окне следует выбрать, в разделе отчеты, удобный для нас вид отчета, например Результаты (рис. 6).

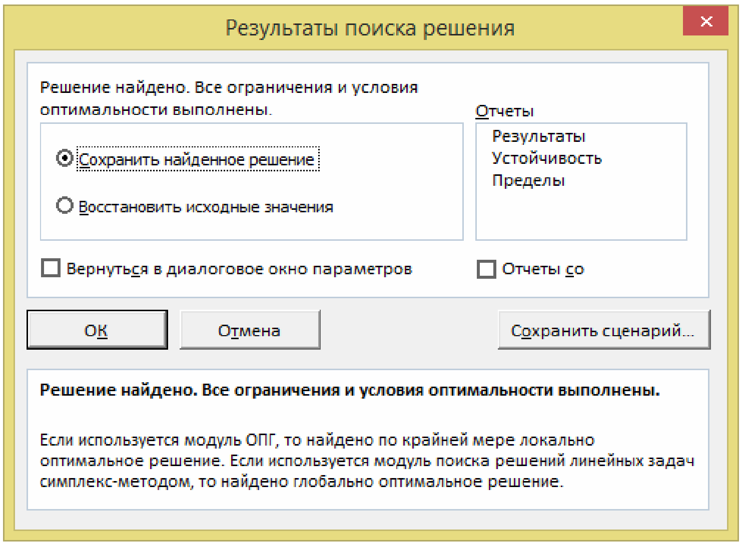

Рисунок 6. Окно результаты поиска решений

После поиска решения, автоматически заполнятся ячейки C8:D8, появится оптимальное количество халатов и пижам, ячейка C9 – значение функции и ячейки C12, E12 – ограничения (рис. 7).

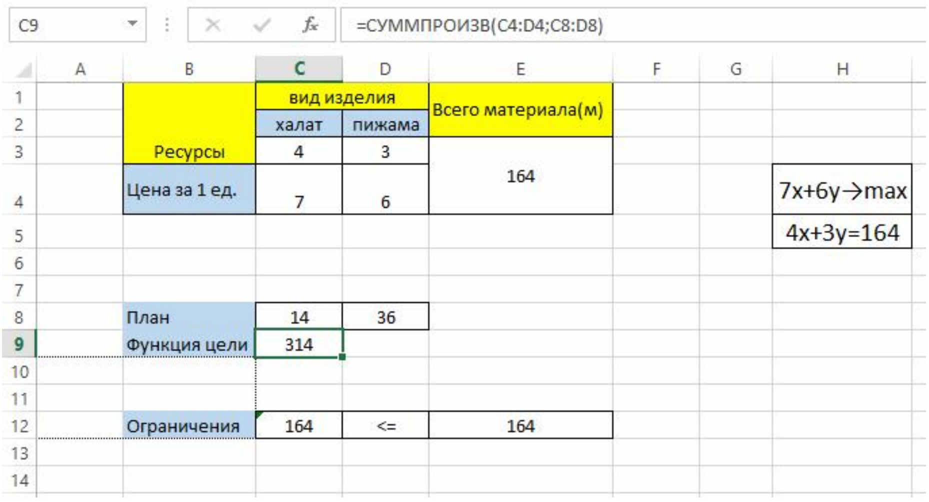

Рисунок 7. Результаты решения

Отчет создан: 08.12.2016 21:32:35
Результат: Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены.
Модуль поиска решения
Модуль: Поиск решения нелинейных задач методом ОПГ
Время решения: 0 секунд.
Число итераций: 0 Число подзадач: 0
Параметры поиска решения
Максимальное время Без пределов, Число итераций Без пределов, Precision 0,000001
Сходимость 0,0001, Размер совокупности 100, Случайное начальное значение 0, Центральные производные
Максимальное число подзадач Без пределов, Максимальное число целочисленных решений Без пределов, Целочисленное отклонение 1%, Считать неотрицательными

Ячейка целевой функции (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение
C9	Функция цели халат	314	314

Ячейки переменных

Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение	Целочисленное
C8	План халат	14	14	Продолжить
D8	План пижама	36	36	Продолжить

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение ячейки	Формула	Состояние	Допуск
C12	Ограничения халат	164	C12<=E12	Привязка	0
C8	План халат	14	C8>=14	Привязка	0

Рисунок 8. Отчет о результатах решения

Из отчета видно, что материалы использованы полностью. Полученный оптимальный план предполагает производство 14 халатов и 36 пижам, выручка от их продажи составит 314 рублей.

В различных проблемах принятия решений возникают самые разнообразные задачи оптимизации. Методы решения данного вида задач не исчерпываются указанными, существует и иные методы, точные или приближенные. Но рассмотренные методы, возможно, использовать при решении задач оптимизации в школьном курсе математики, что будет способствовать углублению и обогащению математических знаний. Через задачи учащиеся знакомимся с экстремальными свойствами изучаемых функций, с некоторыми свойствами неравенств и с возможностями информационных технологий для решения математических задач.

Библиографический список

1. Одоевцева И.Г., Маркова Н.В., Эйрих Н.В. Обеспечение преемственности среднего общего и высшего образования в обучении математике // Наука и школа. 2016. № 5. С. 77-83.
2. Далингер В.А., Симонженков С.Д. Сборник прикладных задач на экстремум: учебное пособие для учащихся школ и классов математического профиля. Омск: ООО ИПЦ «Сфера»,2007. 60с.
3. Штепа Ю.П. Решение задач прогнозирования и оптимизации в школьном курсе информатики // Информатика и образование. 2008. № 9. С. 37-48.
4. Штепа Ю.П. Решение задач прогнозирования и оптимизации в школьном курсе информатики // Информатика и образование. 2008. № 10. С. 39-47.
5. Штепа Ю.П. Решение задач прогнозирования и оптимизации в школьном курсе информатики // Информатика и образование. 2008. № 11. С. 39-50.
6. Усова Л.А., Шкляр И.П., Одоевцева И.Г. Использование MATHCAD И EXCEL при изучении школьного курса математики // Постулат. 2016. №3. С. 12.