

Зависимость прогиба плоской фермы с двойной решеткой под действием равномерной нагрузки от числа панелей

Пережилова Екатерина Дмитриевна

НИУ "МЭИ"

Студент

Аннотация

К плоской статически определимой балочной ферме с параллельными поясами приложена равномерно распределенная по узлам нижнего пояса нагрузка. Нисходящие и восходящие раскосы имеют разный наклон. Из анализа ряда решений задач о прогибе ферм с последовательно увеличивающимся числом панелей методом индукции выводится формула зависимости прогиба от числа панелей. Все стержни фермы упругие и работают только на растяжение или сжатие. В системе символьной математики Maple методом вырезания узлов в символьной форме находятся усилия в стержнях. Прогиб определяется по формуле Максвелла- Мора.

Ключевые слова: ферма, Maple, формула Максвелла - Мора, прогиб, индукция

The dependence of the deflection of flat truss with dual lattice under the action of uniform load from the number of panels

Perezhilova Ekaterina Dmitrievna

NRU "MPEI"

Student

Abstract

A flat statically determined beam truss with parallel belts is subjected to a load evenly distributed over the nodes of the lower belt. Descending and ascending braces have different slopes. From the analysis of a number of solutions to the problems of deflection of trusses with a consistently increasing number of panels by induction, a formula for the dependence of the deflection on the number of panels is derived. All truss rods are elastic and work only on tension or compression. In the system of symbolic mathematics Maple by cutting nodes in symbolic form are the forces in the rods. The deflection is determined by the Maxwell - Mohr formula.

Keywords: truss, Maxwell –Mohr's formula, deflection, induction, Maple

Строительные конструкции, как правило, рассчитываются на прочность, устойчивость и деформации в специализированных компьютерных пакетах, в основу которых положен метод конечных элементов или какие-либо другие численные методы. При этом в таких

программах можно рассчитывать весьма сложные конструкции, включая статически неопределимые и пространственные. Наличие такого подхода не отменяет, однако, аналитические расчеты. В последнее время наиболее распространены системы символьных преобразований Reduce, Maple, Maxima, Derive и др. В [1] приведены аналитические решения для прогиба плоских ферм под действием распределенной и сосредоточенной симметричной нагрузки. В настоящей работе ставится задача рассчитать ферму на нагрузку по нижнему поясу. Такая нагрузка наиболее часто встречается в практике проектирования.

Рассмотрим ферму (рис. 1). В ферме с $2n$ панелями в верхнем поясе содержится $m_0 = 8n + 14$ стержней вместе с тремя стержнями, моделирующими опоры. Расчет усилий произведем по программе [1] методом вырезания узлов.

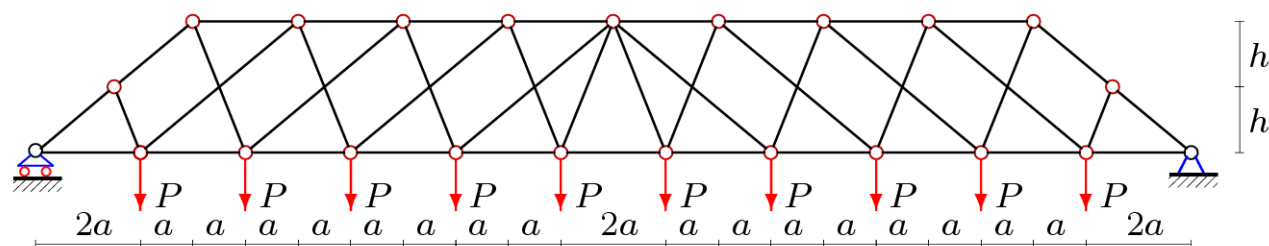


Рис. 1. Ферма под действием равномерной нагрузки, $n=4$

Ранее эта программа использовалась для расчетов арочных [2-13] ферм и ферм пространственного типа [14-23]. Статически определимые решетчатые фермы рассчитывались в [24-29]. Решение для деформации плоской фермы башенного типа получено в аналитической форме в [30]. Выражения для прогиба ферм шпренгельного типа методом индукции получены в работах [31-34]. Фермы, допускающие кинематическую изменяемость при определенном числе панелей рассмотрены в статьях [35-37]. Ферма Г-образной формы для крепления реклам и дорожных знаков аналитически рассчитана на деформации в [38].

Все шарниры и стержни нумеруются (рис. 2). Сначала нумеруются стержни поясов (слева направо), затем стержни решетки. В программу вводятся координаты узлов и порядок соединения стержней в виде векторов, содержащих номера концов стержней. Приведем фрагмент программы, задающий структуру фермы, написанной на языке системы Maple:

```
> for i to 2*n+3 do
    N[i] := [i, i+1];
end:
> N[2*n+4] := [1, 2*n+5]:
> for i to 2*n+2 do
    N[i+2*n+4] := [i+2*n+4, i+2*n+5];
end:
```

```

> N[4*n+7] := [2*n+4, 4*n+7] :
> for i to n+2 do
  N[i+4*n+7] := [i+1, i+2*n+4] :
  N[i+5*n+9] := [i+n+1, i+3*n+5] : end:
> for i to n do
>   N[i+6*n+11] := [i+1, i+2*n+6] :
>   N[i+7*n+11] := [i+3+n, i+3*n+5] :
> end:

```

Для опорных стержней имеем

```

> N[m0-2] := [1, m3-2] : N[m0-1] := [2*n+4, m3-1] :
N[m0] := [2*n+4, m3] :

```

В результате расчетов получено выражение для прогиба фермы, независимое по форме от числа панелей:

$$EF\Delta = P(c_1a^3 + c_2c^3 + c_3d^3) / (8h^2)$$

где $c = \sqrt{a^2 + 4h^2}$, $d = \sqrt{9a^2 + 4h^2}$ — длины раскосов. Коэффициенты в этой формуле, зависящие от числа панелей, найдены с помощью метода индукции.

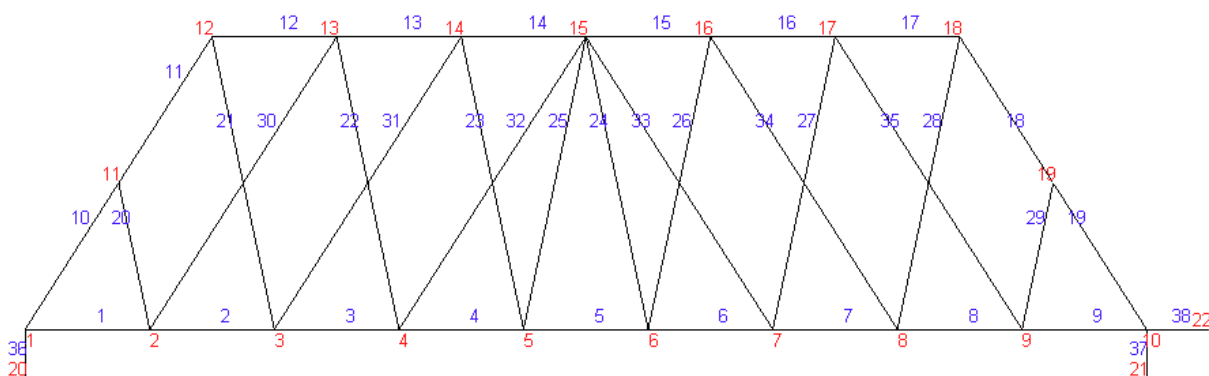


Рис. 2. Нумерация узлов и стержней, $n=3$

Оператор **rgf_findrecur** из специализированного пакета **genfunc** по данным расчета десяти ферм дает линейные однородные рекуррентные уравнения порядков 5 и 3:

$$c_{1,n} = 3c_{1,n-1} - c_{1,n-2} - 5c_{1,n-3} + 5c_{1,n-4} + c_{1,n-5} - 3c_{1,n-6} + c_{1,n-7}$$

$$c_{2,n} = c_{2,n-1} + 2c_{2,n-2} - 2c_{2,n-3} - c_{2,n-4} + c_{2,n-5}$$

$$c_{3,n} = c_{3,n-1} + 2c_{3,n-2} - 2c_{3,n-3} - c_{3,n-4} + c_{3,n-5}$$

С помощью оператора **rsolve** находим решения этих уравнений в виде полиномов четвертого и второго порядка по числу панелей:

$$c_1 = 20n^4 / 3 + 40n^3 + 292n^2 / 3 + (2(-1)^n + 110)n + 2(-1)^n + 46,$$

$$c_2 = (6n^2 + 6((-1)^{n+1} + 3)n + 9(-1)^{n+1} + 9) / 8,$$

$$c_3 = (6n^2 + 2((-1)^n + 9)n + 3(-1)^n + 13) / 8.$$

Полученную аналитическую зависимость прогиба от числа панелей и размеров фермы удобно использовать для оценки точности численного расчета фермы или для эскизного предварительного расчета.

Средствами Maple можно построить картину распределения усилий в стержнях фермы. На рисунке 3 синим цветом выделены сжатые стержни, красным — растянутые. Цифрами указаны усилия в стержнях, отнесенные к силе P . Расчеты произведены при $a=4$ м, $h = 3$ м. Интересно отметить, что наиболее сжатыми ($5,3P$) в верхнем поясе оказались усилия не в середине пролета, как это бывает в балочных фермах с простой решеткой.

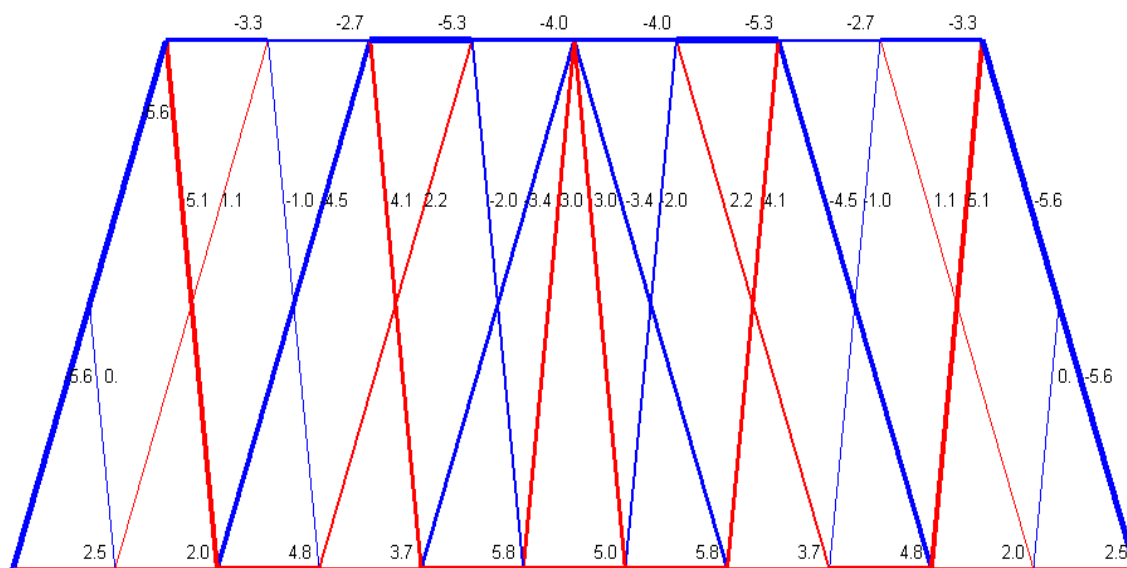


Рис. 3. Распределение усилий в стержнях, $n=4$

В системе Maple можно найти асимптотику решения. Пусть длина панели a зависит от пролета: $a=L/(2n+2)$, а суммарная нагрузка постоянная $P_s = 2(n+1)P$. Асимптотику относительного (безразмерного) прогиба $\Delta' = \Delta EF / (P_s L)$ можно найти с помощью вычисления предела

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta' / n = 3h / (32L).$$

Аналитические обзоры решений для плоских статически определимых ферм, полученные методом индукции в системе символьной математики Maple [39,40], содержатся в работе [41].

Библиографический список

1. Кирсанов М.Н. Плоские фермы. Схемы и расчетные формулы: справочник. М.: ИНФРА-М, 2019. 238 с.
2. Тиньков Д.В. Расчет прогиба плоской арочной фермы с крестообразной решеткой // Постулат. 2017. № 12 (26). С. 74.

3. Кунов И.М. О жесткости арочной фермы треугольного очертания в зависимости от перераспределения площадей стержней и числа панелей // Научный альманах. 2016. №6-2 (19). С. 253-256.
4. Кирсанов М.Н., Степанов А.С. О зависимости деформаций плоской арочной фермы от числа панелей // Строительная механика и расчет сооружений. 2017. № 5 (274). С. 9-14.
5. Кирсанов М.Н. Сравнительный анализ жесткости двух схем арочной фермы // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2015. № 9 (36). С. 44-55.
6. Кирсанов М.Н. Индуктивный анализ деформации арочной фермы // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2018. Т. 14. № 1. С. 64-70.
7. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба арочной фермы// Строительная механика и конструкции. 2018. Т. 1. № 16. С. 7-11.
8. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование деформаций плоской фермы арочного типа // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2015. № 3 (31). С. 42-48.
9. Кирсанов М.Н. Аналитическая оценка прогиба и усилий в критических стержнях арочной фермы // Транспортное строительство. 2017. № 9. С. 8-10.
10. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета деформаций арочной фермы с произвольным числом панелей // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2018. № 4 (67). С. 86-94.
11. Компанец К. А Расчет смещения подвижной опоры плоской арочной раскосой фермы при нагрузке в середине пролета // Молодежь и наука. 2017. №4. С.108.
12. Савиных А. С. Анализ прогиба арочной раскосой фермы, нагруженной по верхнему поясу // Строительство и архитектура. 2017. Том 5. Выпуск 3 (6). С. 12-17.
13. Осадченко Н.В. Аналитические решения задач о прогибе плоских ферм арочного типа// Строительная механика и конструкции. 2018. Т.1. №16. С.12-33.
14. Кирсанов М.Н. Учет строительного подъема в аналитическом расчете пространственной балочной фермы // Известия Московского государственного технического университета МАМИ. 2014. Т. 4. № 2 (20). С. 36-39.
15. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и оптимизация пространственной балочной фермы // Вестник Московского энергетического института. 2012. № 5. С. 5-8.
16. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба пространственного прямоугольного покрытия // Вестник МГСУ. 2018. Т. 13. № 5 (116). С. 579-586.
17. Кирсанов М.Н. Оценка прогиба и устойчивости пространственной балочной фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 5 (268). С. 19-22.

18. Кирсанов М.Н. Особенности аналитического расчета пространственных стержневых систем // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. № 5 (238). С. 11-15.
19. Кирсанов М.Н. Статический расчет и анализ пространственной стержневой системы // Инженерно-строительный журнал. 2011. № 6 (24). С. 28-34.
20. Кирсанов М.Н. Напряженное состояние и деформации прямоугольного пространственного стержневого покрытия // Научный вестник Воронежского государственного архитектурно-строительного университета. Строительство и архитектура. 2016. № 1 (41). С. 93-100.
21. Кирсанов М.Н. Расчет пространственной стержневой системы, допускающей мгновенную изменяемость // Строительная механика и расчет сооружений. 2012. № 3 (242). С. 48-51.
22. Леонов П.Г., Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и анализ пространственной стержневой конструкции в системе Maple // В сборнике: Информатизация инженерного образования ИНФОРИНО-2014 Труды международной научно-методической конференции. 2014. С. 239-242.
23. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой системы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2012. № 1. С. 49-53.
24. Kirsanov M., Komerzan E., Sviridenko O. Analytical calculation of the deflection of an externally statically indeterminate lattice truss // MATEC Web of Conferences, vol. 265, 0527 (2019) <https://doi.org/10.1051/mateconf/201926505027>
25. Kirsanov M.N. A precise solution of the task of a bend in a lattice girder with a random number of panels // Russian Journal of Building Construction and Architecture. 2018. № 1 (37). С. 92-99.
26. Кирсанов М.Н. Зависимость прогиба плоской решетчатой фермы от числа панелей // Механизация строительства. 2017. Т. 78. № 10. С. 24-27.
27. Кирсанов М.Н., Хроматов В.Е. Моделирование деформаций плоской фермы треугольного очертания // Строительная механика и расчет сооружений. 2017. № 6 (275). С. 24-28.
28. Кирсанов М.Н., Москвин В.Г. Деформации плоской фермы с усиленной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2018. № 4 (279). С. 10-14.
29. Кирсанов М.Н. Индуктивный вывод формул для деформаций плоской решетчатой фермы // Строительство и реконструкция. 2017. № 2 (70). С. 17-22.
30. Тиньков Д.В. Индуктивный вывод формулы для горизонтального перемещения башенной конструкции // Международный научный семинар "Нелинейные модели в механике, статистике, теории поля и космологии" - GRACOS-17. Казань: Изд-во Академии наук РТ, 2017. С. 249-254.
31. Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A. Analytical calculation and analysis of planar springel truss // Строительная механика и конструкции. 2018. № 2

- (17). С. 72-79.
32. Кирсанов М.Н. Аналитический метод расчета прогиба плоской фермы со сложной решеткой шпренгельного типа // Транспортное строительство. 2017. № 5. С. 11-13.
33. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба и усилий в шпренгельной ферме с произвольным числом панелей // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2018. Т. 14. № 2. С. 90-95.
34. Гавриленко А.Б., Кирсанов М.Н. Аналитическая оценка жесткости шпренгельной фермы // Строительство и реконструкция. 2018. 2(76). С. 11-17.
35. Кирсанов М.Н. Вывод формулы для прогиба решетчатой фермы, имеющей случаи кинематической изменяемости // Строительная механика и конструкции. 2017. Т. 1. № 14. С. 27-30.
36. Кирсанов М.Н. Формула для прогиба и анализ кинематической изменяемости решетчатой фермы // Строительная механика и конструкции. 2017. Т. 2. № 15. С. 5-10.
37. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба фермы с декоративной решеткой // Строительство: наука и образование. 2019. Т. 9. Вып. 1. Ст. 1. URL: <http://nso-journal.ru>. DOI: 10.22227/2305-5502.2019.1.1
38. Kirsanov M. N. Calculation of G-shaped Farming of Road Signs and Equipment. Russian Journal of Building, Construction and Architecture. Issue № 2 (42), 2019. pp. 62-71 DOI 10.25987/VSTU.2019.42.2.007
39. Матросов А. В. Maple 6. Решение задач высшей математики и механики. СПб: БХВ-Петербург, 2001. 528 с.
40. Голоскоков Д. П. Практический курс математической физики в системе Maple. СПб.: Изд-во ПаркКом, 2010. 644 с.
41. Осадченко Н.В. Расчёт прогиба плоской неразрезной статически определимой фермы с двумя пролётами // Постулат. 2017. № 12. С. 28.