УДК 519.171

Центрально радиальный метод для идентификации вершинно-взвешенного графа

Кирсанов Михаил Николаевич
НИУ "МЭИ",
профессор

Аннотация
Предлагается алгоритм сравнения графов по совпадению множеств вершин с одинаковым эксцентриситетом, начиная с вершин из центра графа. Алгоритм реализован в системе компьютерной математики Maple. Метод сравнения может быть использован в тренажерах по обучению операторов и инженеров тепловых сетей, где разрабатываемая схема сравнивается с тестовой.
Ключевые слова: тепловые сети, эксцентриситет, радиус графа, изоморфизм графов, индукции, Maple

A centrally radial method for identifying a vertex-weighted graph

Kirsanov Mikhail Nikolaevich
NRU “MPEI”
Professor

Abstract
An algorithm is proposed for comparing graphs by coincidence of the sets of vertices with the same eccentricity, starting from the vertices from the center of the graph. The algorithm is implemented in the Maple computer mathematics system. The comparison method can be used in simulators for training operators and engineers of heating networks, where the developed scheme is compared with the test one.
Keywords:, heat networks, eccentricity, graph radius, graph isomorphism, induction, Maple.

Проблема изоморфизма графов имеет практическое значение во всех задачах, где способы задания графов, в частности нумерация вершин, однозначно не заданы. В [1] эта задача сведена к задаче о распознавании равных симплексов. Установлены связи между несколькими геометрическими инвариантами симплексов и известными классами инвариантов графов.

В [2] разработан прямой алгоритм для задачи проверки изоморфизма графов, не являющийся модификацией схемы рекурсии с возвратом. Число итераций предложенного алгоритма не превышает порядок графа. Доказано, что порядок алгоритма полиномиальный по используемой памяти и числу машинных операций.

В работе [3] предложены алгоритм распознавания изоморфизма графов с асимптотической сложностью по затратам времени и памяти. Метод основан на анализе полустепеней захода и исхода вершин на стыке окрестностей отдельных подграфов исходных графов (рис. 1). Метод инвариантен к порядку рассмотрения вершин в процессе выделения подграфов. Нумерация графов (граф K_4 в подразбиении ребер графа K_3) на рисунке 1 выбрана одинаковой, что позволяет сделать вывод об изоморфности графов, не прибегая к специальным алгоритмам распознавания. Смена нумерации задачу определения изоморфизма делает сложной, особенно, если порядок графов велик.

Наиболее простой метод решения задачи изоморфизма является сравнение инвариантов графов [4]. В 1932 г. Hassler Whitney из Гарвардского университета сформулировал и доказал теорему [5], согласно которой в качестве инвариантов для распознавания могут быть, в частности, числовые параметры реберных образов *L(G)* исходных графов ***G***. Этот метод заложен и в подход [4]. Реберные графы получаются по заданным графам однозначно, что делает объективным выбор характеристик реберных графов для процедур идентификации.

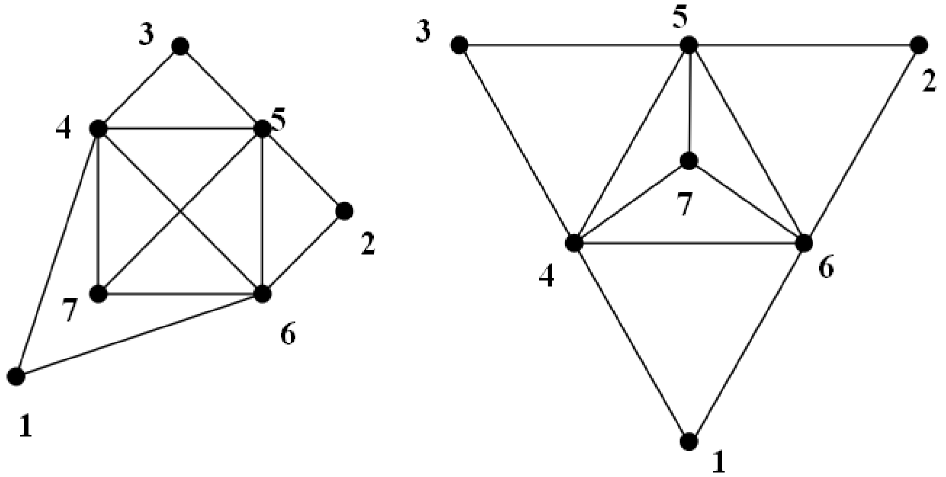

Рисунок 1 — Изоморфные графы с совпадающей нумерацией вершин

Отдельный класс графов в задачах идентификации составляют графы со взвешенными вершинами.

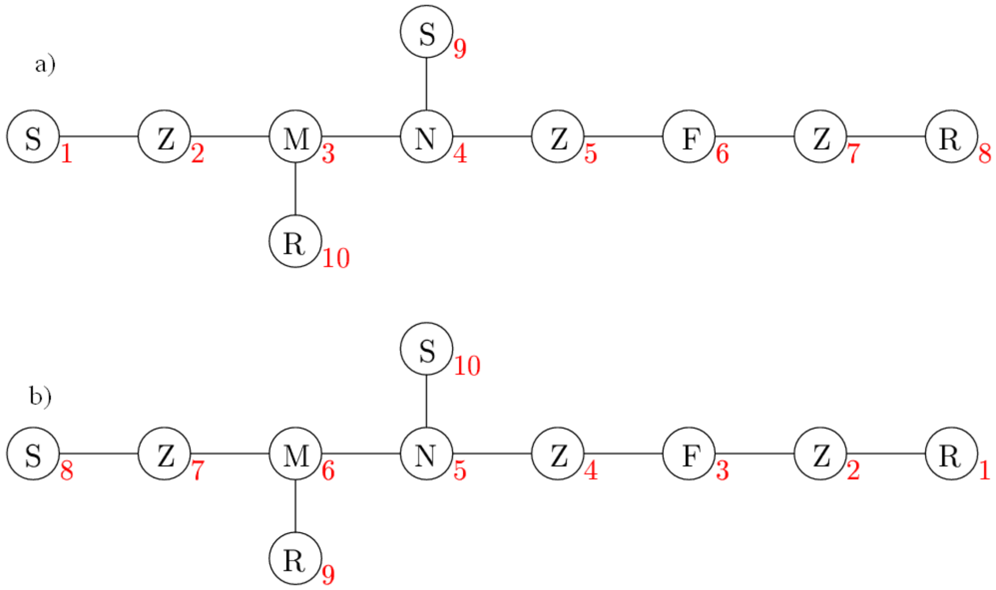

Рисунок 2 — Изоморфные графы сметками вершин с различной нумерацией вершин

Для выявления изоморфности таких графов в настоящей работе предлагается использовать метод сравнения множеств помеченных вершин в с одинаковым эксцентриситетом. Эксцентриситет вершины является ее инвариантом, не зависящим от нумерации вершин, но однозначно привязанный к метке вершины. Первой областью для сравнения является *центр* графа. Пропуская такие очевидные параметры сравнения как порядок и размер графа, из сравнения множеств меток (не номеров!) вершин центров сравниваемых графов можно сделать первый вывод о изоморфности. Обозначим множество меток вершин *центра* графа G за $M_r(G)$ (область нулевого уровня). Эксцентриситет этих вершин по определению равен радиусу $\varepsilon = r$. Для того, чтобы охватить процедурой сравнения все вершины графа выделим из них множества одинакового эксцентриситета $M_{r+k}(G),\ k = 0,...,d - r$. Изоморфизм графов следует из равенств всех соответствующих множеств $M_{r+k}(G') = M_{r+k}(G),\ k = 0,...,d - r$.

Приведем пример расчета с использованием операторов системы компьютерной математики Maple [6] из пакета `networks.` Вершины неорентированного графа (рис. 1а) задаются командой `V:={$1..n}:` Где порядок графа `n:=10.` Ребра графа:

```
E:={{1,2},{2,3},{3,4},{4,5},{5,6},{7,6},{7,8},{4,9},{3,10}}:
```

Таким образом, имеем граф `G:=graph(V,E):` Для контроля ввода можно изобразить граф с помощью оператора `draw(G)`. Основной оператор в этом алгоритме создает матрицу расстояний между вершинами `s:=allpairs(G).` Здесь `s[i,j]` — расстояние между вершинами i и j. Эксцентриситеты вершин — это максимальные расстояния:

```
for i to n do W[i]:=max(seq(s[i,u],u=1..n)):od:
```

Радиус графа — минимальный эксцентриситет вершин:

```
r:=min(seq(W[i],i=1..n));
```

В цикле по вершинам графа выделяем вершины центра графа

```
for j to n do if W[j]=r then print(j,NM[j]) end:end
```

Получаем множество вершин {N,Z}, т. е. список меток вершин 4 и 5.

Здесь — метки вершин, превращающие граф в вершинно-взвешенный

```
NM:=[S,Z,Z,N,Z,F,Z,R,S,R]:
```

Аналогично получаются области уровней 1, 2 и 3:

```
for j to n do if W[j]=r+1 then print(j,NM[j]) end:end:
{Z,F,S}
for j to n do if W[j]=r+2 then print(j,NM[j]) end:end:
{Z,Z,R}
for j to n do if W[j]=r+3 then print(j,NM[j]) end:end:
{S,R}
```

Если теперь этот алгоритм применить к графу на рисунке 2b), а он очевидно изоморфен графу на рисунке 2a), отличаясь от него только нумерацией вершин, то все четыре списка областей 0,1,2,3 будут теми же. Это подтверждает изоморфность графов.

В современных версиях системы Maple вместо устаревшего, но вполне работоспособного пакета `networks` есть аналогичный, но более мощный пакет GraphTheory. Предлагаемый алгоритм может быть реализован и в других системах программирования. Оператор вычисления расстояний **`allpairs`** можно заменить пользовательским, основанным на последовательном возведении в степень матрицы смежности.

Библиографический список

1. Протасов В. Ю. Изоморфизм графов и равенство симплексов //Математические заметки. 2009. Т. 85. №. 5. С. 758-767.
2. Пролубников А. В. Прямой алгоритм проверки изоморфизма графов //Компьютерная оптика. 2007. Т. 31. №. 3.
3. Валяев В. В., Ватутин Э. И. Метод определения изоморфизма графов общего вида за полиномиальное время //Известия Юго-Западного государственного университета. Серия: Управление, вычислительная техника, информатика. Медицинское приборостроение. 2012. №. 2-1. С. 200-206.
4. Кирсанов М.Н., Очков В.Ф., Бабичев И.А. Индуктивный анализ графов

тепловых и электрических сетей // В сборнике: Инфорино-2018 Материалы IV Международной научно-практической конференции. 2018. С. 138-141.
5. Whitney H. Congruent graphs and the connectivity of graphs // Am. J. Math. 1932. Т. 54. С. 160-168. doi:10.2307/2371086.
6. Кирсанов М.Н. Графы в Maple. Задачи, алгоритмы, программы. М.: Физматлит, 2007. 168 с.