

Вывод зависимости прогиба плоской трапецевидной фермы от числа панелей

Грибова Ольга Валерьевна

НИУ "МЭИ"

Старший преподаватель

Аннотация

Ферма с двумя опорами загружена равномерно по узлам верхнего пояса. Прогиб середины конструкции определяется с помощью интеграла Мора. Аналитические выражения для усилий в стержнях находятся методом вырезания узлов в системе компьютерной математики Maple. Ряд решений для ферм с последовательно увеличивающимся числом панелей обобщается методом индукции. Используются специализированные операторы для составления и решения рекуррентных выражений для искомой зависимости. Показано, что в решении существует линейная асимптотика по числу панелей.

Ключевые слова: асимптотика, ферма, интеграл Мора, прогиб, индукция, Maple

Derivation of the dependence of the deflection of a planar trapezoidal shape truss on the number of panels

Gribova Olga Valeryevna

National Research University MPEI, Russia

Senior lecturer

Abstract

The truss with two supports is loaded evenly on the nodes of the upper belt. The deflection of the middle of the structure is determined by the Mohr's integral. The analytical expressions for the forces in the rods are found by the knot-cutting method in the Maple computer mathematics system. A number of solutions for trusses with a consistently increasing number of panels is generalized by induction. Specialized operators are used for composing and solving recurrent expressions for the required dependence. It is shown that there is a linear asymptotic in the solution with respect to the number of panels

Keywords: asymptotics, truss, Mohr's integral, deflection, induction, Maple

Регулярные конструкции (плоские [1-7] или пространственные [8-12]) могут быть рассчитаны на деформации и усилия не только численно, но и аналитически. Рассматриваемая ферма за счет боковых скошенных панелей (рис. 1) не относится в полной мере к регулярным конструкциям. Однако, если зафиксировать число скошенных панелей и рассматривать лишь

среднюю часть с $2n-4$ панелями, то при $n>2$, используя те же методы, что и в известных работах [13-16], можно найти зависимость прогиба не только от нагрузки и размеров, но и от числа панелей.

Подобные фермы просты в изготовлении, недороги, и широко распространены в машиностроении, авиастроении и строительстве. В работах [17-26] метод индукции применен для аналитического расчета плоских арок регулярной структуры.

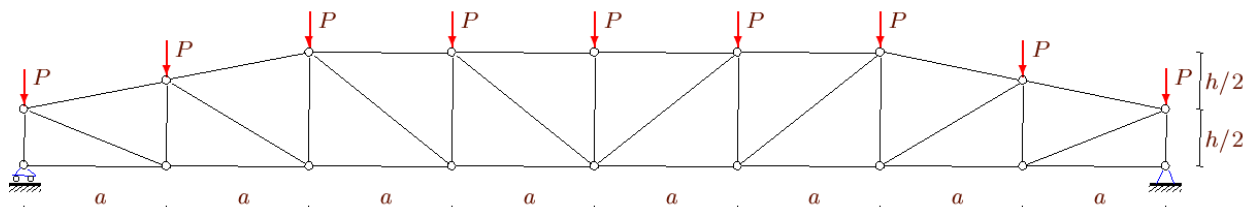


Рисунок 1 — Ферма под равномерной нагрузкой, $n=4$

Расчет усилий в аналитической форме выполняем по программе, написанной на языке системы символьной математики Maple. В программу вводятся координаты шарниров (начало координат в подвижной опоре):

```
> for i to 2*n+1 do x[i]:=a*i-a:y[i]:=0:
    x[i+2*n+1]:=a*i-a: y[i+2*n+1]:=h: od:
> y[2*n+2]:=h/2; y[2*n+3]:=3*h/4; y[4*n+1]:=3*h/4; y[4*n+2]:=h/2;
```

и данные о решетке фермы

```
> for i to 2*n do
>   Nbeg[i]:=i;           Nend[i]:=i+1;           #нижний пояс
>   Nbeg[i+2*n]:=i+2*n+1; Nend[i+2*n]:=i+2*n+2; #верхний пояс
> od:
>
> for i to n do
>   Nbeg[i+4*n]:=i+1; Nend[i+4*n]:=i+2*n+1; #раскосы
>   Nbeg[i+5*n]:=i+n; Nend[i+5*n]:=i+3*n+2; #раскосы
> od:
> for i to 2*n+1 do
>   Nbeg[i+6*n]:=i; Nend[i+6*n]:=i+2*n+1; #вертикали
> od:
```

Для расчета прогиба воспользуемся интегралом Мора в форме:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{m-3} S_i^{(P)} S_i^{(1)} l_i / (EF).$$

Здесь $m=8n+4$ — число стержней в ферме, $S_i^{(P)}$ — усилия в стержнях от нагрузки, l_i — длина стержней, $S_i^{(1)}$ — усилие от единичной нагрузки, EF — жесткость стержней, E — модуль упругости.

Прогиб для фермы с тремя панелями имеет вид

$$\Delta_3 = P(3736a^3 + 72c^3 + 80d^3 + f^3 + 28g^3 + 408h^3) / (144EFh^2),$$

$$\text{где } c = \sqrt{a^2 + h^2}, \quad g = \sqrt{16a^2 + h^2}, \quad f = \sqrt{16a^2 + 9h^2}, \quad d = \sqrt{4a^2 + h^2}.$$

Аналогично, при $n=4$ и $n=5$ имеем

$$\Delta_4 = P(13712a^3 + 288c^3 + 112d^3 + 2f^3 + 41g^3 + 780h^3) / (144EFh^2)$$

$$\Delta_5 = P(11784a^3 + 216c^3 + 48d^3 + f^3 + 18g^3 + 432h^3) / (48EFh^2)$$

Выражения для прогиба Δ_n , $n=3,4,5,\dots$ удовлетворяют однородному уравнению пятого порядка с биномиальными коэффициентами, которое дает оператор `rgf_findrecur` системы Maple из пакета `genfunc`

$$\Delta_n = 5\Delta_{n-1} - 10\Delta_{n-2} + 10\Delta_{n-3} - 5\Delta_{n-4} + \Delta_{n-5}$$

Решение этого уравнения получается либо из решения характеристического уравнения, либо (проще) оператором `rsolve`:

$$\Delta_n = P((60n^4 + 12n^2 - 608n + 592)a^3 + 72(n-2)^2 c^3 + 16(2n-1)d^3 + (n-2)f^3 + (13n-11)g^3 + 12(6n^2 - 11n + 13)h^3) / (144EFh^2).$$

Аналитическая форма решения позволяет найти его асимптотику. Для случая равномерной нагрузки имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta' / n = (c^3 + h^3) / (4h^2L).$$

где $\Delta' = \Delta EF / (LP_s)$, $P_s = P(2n+1)$. Расчет произведен при фиксированном пролете: $a = L / (2n)$.

Рассмотренный метод получения формул для регулярных ферм применим и в задачах колебаний [27-36]. В справочнике [37] и пособии [38] дано описание Maple программы для расчета ферм, использованной в настоящей работе.

Библиографический список

1. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета плоской балочной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2016. Т. 1. № 12. С. 19–24.
2. Шикин К. Однопараметрический вывод формулы для прогиба балочной фермы типа Финка // Постулат. 2018. № 10(36).
3. Пережилова Е. Д. Формула для прогиба консольной фермы под действием распределенной нагрузки по верхнему поясу // Постулат. 2018. № 12.
4. Кирсанов М.Н. Индуктивный вывод формул для деформаций плоской решетчатой фермы // Строительство и реконструкция. 2017. № 2 (70). С.

- 17-22.
5. Кирсанов М.Н., Хроматов В.Е. Моделирование деформаций плоской фермы треугольного очертания // Строительная механика и расчет сооружений. 2017. № 6 (275). С. 24-28.
 6. Астахов С.В. Вывод формулы для прогиба внешне статически неопределимой плоской фермы под действием нагрузки в середине пролета // Строительство и архитектура. 2017 Vol. 5. Issue 2 (15): 50–54
 7. Широков А. С. Индуктивный вывод зависимости прогиба и смещения опоры арочной фермы от числа панелей в системе Maple // Международный научный семинар "Нелинейные модели в механике, статистике, теории поля и космологии" -GRACOS-17. Казань: Изд-во Академии наук РТ, 2017. С. 267-272.
 8. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба пространственного прямоугольного покрытия // Вестник МГСУ. 2018. Т. 13. № 5 (116). С. 579-586.
 9. Кирсанов М.Н. Оценка прогиба и устойчивости пространственной балочной фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 5 (268). С. 19-22.
 10. Кирсанов М.Н. Учет строительного подъема в аналитическом расчете пространственной балочной фермы // Известия Московского государственного технического университета МАМИ. 2014. Т. 4. № 2 (20). С. 36-39.
 11. Кирсанов М.Н. Напряженное состояние и деформации прямоугольного пространственного стержневого покрытия // Научный вестник Воронежского государственного архитектурно-строительного университета. Строительство и архитектура. 2016. № 1 (41). С. 93-100.
 12. Кирсанов М.Н. Расчет пространственной стержневой системы, допускающей мгновенную изменяемость // Строительная механика и расчет сооружений. 2012. № 3 (242). С. 48-51.
 13. Kirsanov M.N., Lafickova M. G., Nikitina A. S. Analysis of the deflection of flat roof trusses // Научный альманах. 2017. 3-3 (29). С. 262-265. DOI: 10.17117/na.2017.03.03.262
 14. Kirsanov M.N., Razananairina P.C. The formula for deflection of truss with cases of kinematic variability. Postulat, 2017. No. 9.
 15. Тиньков Д.В. Анализ точных решений прогиба регулярных шарнирно-стержневых конструкций // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2015. № 6. С. 21–28.
 16. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. № 5 (57). С. 66–73.
 17. Савиных А. С. Анализ прогиба арочной раскосой фермы, нагруженной по верхнему поясу // Строительство и архитектура. 2017. Том 5. Выпуск 3 (6). С. 12-17.
 18. Кирсанов М.Н. Индуктивный анализ деформации арочной фермы // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2018.

- Т. 14. № 1. С. 64-70.
19. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование деформаций плоской фермы арочного типа // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2015. № 3 (31). С. 42-48.
 20. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета деформаций арочной фермы с произвольным числом панелей // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2018. № 4 (67). С. 86-94.
 21. Осадченко Н.В. Аналитические решения задач о прогибе плоских ферм арочного типа // Строительная механика и конструкции. 2018. Т.1. №16. С.12-33.
 22. Кирсанов М.Н. Сравнительный анализ жесткости двух схем арочной фермы // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2015. № 9 (36). С. 44–55.
 23. Кирсанов М.Н., Степанов А.С. О зависимости деформаций плоской арочной фермы от числа панелей // Строительная механика и расчет сооружений. 2017. № 5 (274). С. 9-14.
 24. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба арочной фермы // Строительная механика и конструкции. 2018. Т. 1. № 16. С. 7-11.
 25. Кунов И.М. О жесткости арочной фермы треугольного очертания в зависимости от перераспределения площадей стержней и числа панелей // Научный альманах. 2016. №6-2 (19). С. 253-256.
 26. Компанеец К.А. Расчет смещения подвижной опоры плоской арочной раскосной фермы при нагрузке в середине пролета // Молодежь и наука. 2017. №4. С.108.
 27. Ахмедова Е.Р., Канатова М.И. Собственные частоты колебаний плоской балочной фермы регулярной структуры // Наука и образование в XXI веке: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 31 октября 2014 г. в 17 частях. Часть 11. Тамбов: ООО «Консалтинговая компания Юком», 31 октября 2014. С. 17-18.
 28. Канатова М.И. Частотное уравнение и анализ колебаний плоской балочной фермы // Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. М: Инфра-М. 2015. Т. 1. С. 31-34.
 29. Kirsanov M.N., Tinkov D.V. Analysis of the natural frequencies of oscillations of a planar truss with an arbitrary number of panels // Вестник МГСУ. 2019. Т. 14. № 3 (126). С. 284-292.
 30. Kirsanov M.N. Lower estimate of the fundamental frequency of natural oscillations of a truss with an arbitrary number of panels // Вестник МГСУ. 2019. Т. 14. № 7. С. 844-851.
 31. Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В. Аналитические выражения частот малых колебаний балочной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2019. №1(20). С. 14-20.
 32. Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В. Спектр собственных частот колебаний внешне статически неопределимой фермы // Транспортное строительство. 2019. №2. С. 20-23.

33. Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В. Аналитическое решение задачи о частоте колебания груза в произвольном узле балочной фермы в системе Maple // Строительство: наука и образование. 2018. Т. 8. №. 4. Ст. 3.
34. Кирсанов М.Н. Формула зависимости низшей частоты колебания балочной фермы от числа панелей // Строительная механика и расчет сооружений. 2019. № 3. С. 45-49.
35. Кирсанов М.Н. Формула для основной частоты колебания многопролетной фермы // Строительная механика и конструкции. 2020. № 1 (24). С. 19-24.
36. Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В. Анализ частот колебаний груза в зависимости от его положения в узлах плоской фермы // Строительство и реконструкция. 2020. № 1(87). С. 14-19.
37. Кирсанов М.Н. Плоские фермы. Схемы и расчетные формулы: справочник. М.: Инфра-М, 2019. 238 с.
38. Кирсанов М.Н. Задачи по теоретической механике с решениями в Maple 11. М.: Физматлит, 2010. 264 с.