

Аналитический расчет прогиба фермы с симметричной и несимметричной нагрузкой

Шурова Юлия Дмитриевна

НИУ "МЭИ"

Студент

Аннотация

Зависимость прогиба плоской статически определимой фермы, имеющей в опорных частях усиленную решетку, от числа панелей определяется в системе компьютерной математики Maple. Рассмотрены два типа нагрузки - нагрузка, равномерно распределенная по узлам верхнего пояса, и нагрузка на половину пролета, также распределенная по узлам верхнего пояса. Формулы получаются индуктивным методом из обобщения ряда решений. Используются операторы составления и решения рекуррентных уравнений.

Ключевые слова: ферма, прогиб, Maple

Analytical calculation of truss deflection with symmetrical and asymmetric load

Shurova Julia Dmitrievna

NRU "MPEI"

Student

Abstract

The dependence of the deflection of a planar statically definable truss, which has a reinforced lattice in the supporting parts, on the number of panels is determined in the Maple computer mathematics system. Two types of load are considered: a load evenly distributed over the upper belt nodes, and a half-span load also distributed over the upper belt nodes. Formulas are obtained by inductive method from generalization of a number of solutions. Operators for composing and solving recurrent equations are used.

Keywords: truss, deflection, Maple.

Аналитические решения хорошо дополняют численные [1-5] при анализе и расчете строительных конструкций. Большинство формул для прогиба и критических напряжений в фермах получены для регулярных систем [6-8]. Наиболее распространенным методом, позволяющим найти зависимость эксплуатационных характеристик конструкций (прогиб, усилия), является метод индукции [9,10]. Решения для прогиба плоских арочных ферм получены в работах [11-22]. Известны решения для решетчатых ферм с различной конфигурацией решеток и типами опор (включая внешне

статически неопределимые фермы) [23-31] и пространственных стержневых систем [32-36].

В настоящей работе выводятся формулы зависимости прогиба балочной фермы с увеличенными высотами крайних панелей (рис. 1, 2). Решения для этой конструкции под действием сосредоточенной нагрузки получено в [37], симметричной по верхнему и нижнему поясу — в [38].

Узлы и стержни фермы нумеруются (рис. 3). В программу расчета на языке Maple вводятся координаты узлов:

```
> for i to 2 do
  x[i]:=2*a*(i-1):y[i]:=0:
  x[i+2*n]:=2*a*(i-1)+4*n*a-2*a:y[i+2*n]:=0:
> end:
> for i to 2*n-2 do x[i+2]:=2*a*i+a; y[i+2]:=h; end:
  for i to 2*n+1 do
    x[i+2*n+2]:=2*a*(i-1);y[i+2*n+2]:=2*h;
> end:
```

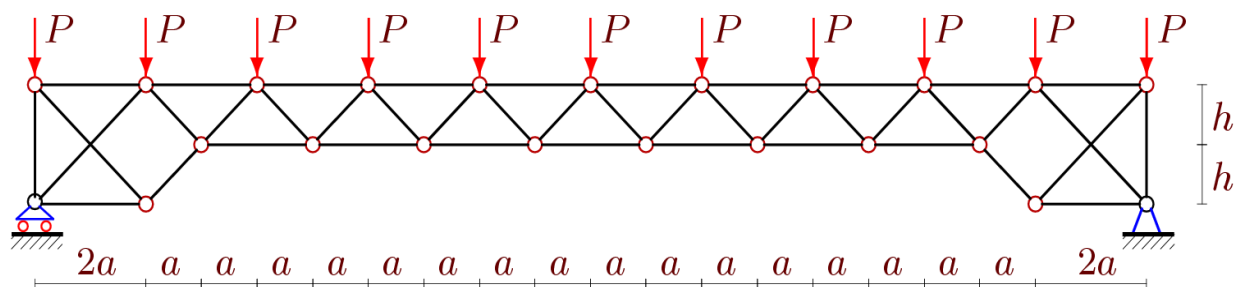


Рисунок 1 — Симметричная равномерная нагрузка, $n=5$

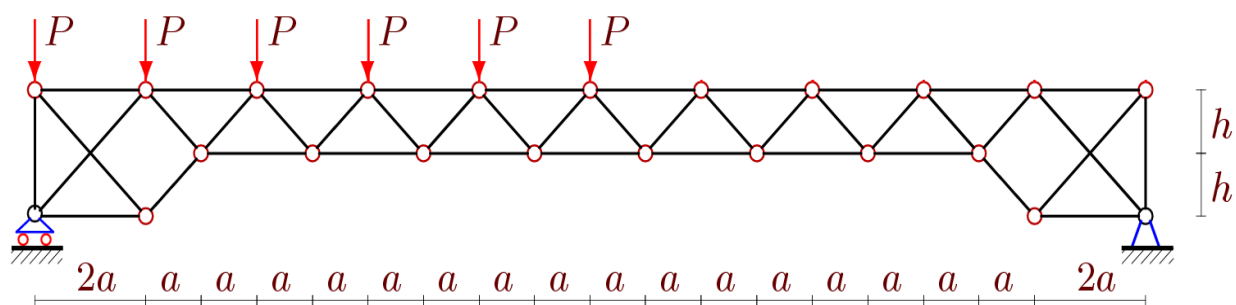
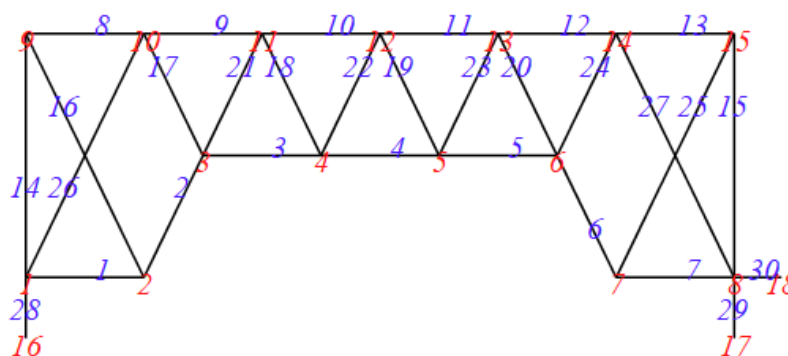


Рисунок 2 — Равномерная нагрузка в половине пролета, $n=5$

Рисунок 3 — Нумерация стержней и узлов, $n=3$

Усилия в стержнях определяются по программе методом вырезания узлов, прогиб — по формуле строительной механики Максвелла - Мора:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{m-3} S_i^{(P)} S_i^{(1)} l_i / (EF).$$

Здесь $m=8n+6$ — число стержней в ферме, $S_i^{(P)}$ — усилия в стержнях от приложенной нагрузки, l_i — длина стержня i , $S_i^{(1)}$ — усилие от действия единичной нагрузки, EF — жесткость стержней, E — модуль упругости стержней.

Расчет ферм с различным числом панелей показывает, что формула для прогиба имеет вид, не зависящий от числа панелей

$$\Delta = P(a^3 C_1 + c^3 C_2 + h^3 C_3) / (EFh^2), \quad (1)$$

где $c = \sqrt{a^2 + h^2}$. В [38] методом индукции получены следующие зависимости ($n > 1$):

$$C_1 = -n^2(1 - 10n^2) / 3, C_2 = n(n + 12) - 7, C_3 = 2n - 3. \quad (2)$$

Для получения общих членов последовательности коэффициентов при a^3 52, 267, 848, 2075, 4308, 7987, 13632, 21843, 33300, 48763... использовался оператор `rgf_findrecur` из пакета `genfunc` и оператор `rsolve`. Приведем соответствующие строки программы:

```
S:=seq(C_1[i],i=2.. Nmax);
NN:=nops([S])/2;
Z:= rgf_findrecur (NN, [S],C1,n);
C1n:=simplify(rsolve({Z,seq(C1(i+1)=S[i],i=1..NN)},t));
```

где в переменную **Z** записывается рекуррентное уравнение, полученное оператором `rgf_findrecur`, **Nmax** — минимальное число членов анализируемой последовательности. Здесь потребовалось 10 аналитических решений для прогиба, по которым удалось получить общий член, входящий в итоговую формулу (1). Оператор `simplify` упрощает формулу.

Аналогично, для нагрузки на половине пролета имеем решение

$$C_1 = n(2n^2(5n + 4) - n + 1) / 6, C_2 = n(13 - 1/n + n) / 2, C_3 = n - 1. \quad (3)$$

Асимптотика решений (1) с коэффициентами (2) и (3) различается. В первом случае, для симметричной нагрузки, имеем кубическую аппроксимацию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta' / n^3 = 5a^2 / (3h^2).$$

Здесь обозначен относительный прогиб

$$\Delta' = \Delta EF / (PL),$$

где $L=2na$ — пролет фермы. Во втором случае

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta' / n^3 = 5a^2 / (6h^2).$$

Библиографический список

1. Марутян А.С. Облегченные пространственно-стержневые конструкции покрытий // Строительная механика и расчет сооружений. 2012. № 1 (240). С. 66-72.
2. Марутян А.С. Оптимизация ферменных конструкций со стойками и полураскосами в треугольных решетках // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 4 (267). С. 60-68.
3. Марутян А.С., Абовян А.Г. Расчет оптимальных параметров плоскоовальных труб для ферменных конструкций // Строительная механика и расчет сооружений. 2017. № 4 (273). С. 17-22.
4. Goloskokov D.P., Matrosov A.V. Approximate analytical approach in analyzing an orthotropic rectangular plate with a crack // Materials Physics and Mechanics. 2018. Т. 36. № 1. С. 137-141.
5. Goloskokov D.P., Matrosov A.V. A superposition method in the analysis of an isotropic rectangle // Applied Mathematical Sciences. 2016. Т. 10. № 54. С. 2647-2660.
6. Игнатъев В.А. Расчет регулярных стержневых систем. Саратов: Саратовское высшее военно-химическое военное училище, 1973.
7. Kirsanov M.N. Planar Trusses: Schemes and Formulas. Cambridge Scholars Publishing. 2019. Lady Stephenson Library, Newcastle upon Tyne, NE6 2PA, UK. ISBN (13): 978-1-5275-3531-2
8. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The structural performance of the periodic truss // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2006. Vol. 54. No. 4. Pp. 756–782. doi:10.1016/j.jmps.2005.10.008
9. Кирсанов М.Н. Индуктивный анализ влияния погрешности монтажа на жесткость и прочность плоской фермы // Инженерно-строительный журнал. 2012. № 5 (31). С. 38-42.
10. Kirsanov M. An inductive method of calculation of the deflection of the truss regular type // Architecture and Engineering. 2016. Т. 1. № 3. С. 14-17.
11. Кирсанов М.Н. Сравнительный анализ жесткости двух схем арочной фермы // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2015. № 9 (36). С. 44-55.
12. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование деформаций плоской фермы арочного типа // Вестник государственного университета морского и

- речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2015. № 3 (31). С. 42-48.
13. Кирсанов М.Н. Индуктивный анализ деформации арочной фермы // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2018. Т. 14. № 1. С. 64-70.
14. Кирсанов М.Н. Аналитическая оценка прогиба и усилий в критических стержнях арочной фермы // Транспортное строительство. 2017. № 9. С. 8-10.
15. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба арочной фермы // Строительная механика и конструкции. 2018. Т. 1. № 16. С. 7-11.
16. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба арочной фермы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. № 5. С. 50-55.
17. Кирсанов М.Н., Степанов А.С. О зависимости деформаций плоской арочной фермы от числа панелей // Строительная механика и расчет сооружений. 2017. № 5 (274). С. 9-14.
18. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета деформаций арочной фермы с произвольным числом панелей // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2018. № 4 (67). С. 86-94.
19. Voropai R.A., Kazmiruk I.Yu. Analytical study of the horizontal stiffness of the flat statically determinate arch truss. Bulletin of Scientific Conferences. 2016. № 2-1(6). Pp. 10-12
20. Bolotina T. D. The deflection of the flat arch truss with a triangular lattice depending on the number of panels // Bulletin of Scientific Conferences. 2016. № 4-3(8). P.7-8.
21. Kazmiruk I.Yu. On the arch truss deformation under the action of lateral load // Science Almanac. 2016. No. 3-3(17). Pp. 75-78.
22. Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A. The dependence of the deflection of the arched truss loaded on the upper belt, on the number of panels // Научный альманах. 2017. N 2-3(28). С. 268-271.
23. Кирсанов М.Н. Формула для основной частоты колебания многопролетной фермы // Строительная механика и конструкции. 2020. Т. 1. № 24. С. 19-24.
24. Кирсанов М.Н. Схема и формулы для расчета прогиба фермы трехпролетного консольного моста с произвольным числом панелей // Строительная механика и расчет сооружений. 2020. № 1 (288). С. 16-22.
25. Vuka-Vaivade K., Kirsanov M.N., Serdjuks D.O. Calculation of deformations of a cantilever-frame planar truss model with an arbitrary number of panels // Вестник МГСУ. 2020. Т. 15. № 4. С. 510-517.
26. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет регулярной балочной фермы с произвольным числом панелей со сложной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 3 (266). С. 16-19.
27. Кирсанов М.Н. К выбору решетки балочной фермы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. № 3. С. 23-27.
28. Кирсанов М.Н. Расчет жесткости стержневой решетки // Вестник машиностроения. 2015. № 8. С. 48-51.
29. Кирсанов М.Н., Маслов А.Н. Формулы для расчета прогиба балочной

- многорешетчатой фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2017. № 2 (271). С. 6-10.
30. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет балочной фермы со сложной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 3 (260). С. 7-12.
31. Кирсанов М.Н. Вывод формулы для прогиба решетчатой фермы, имеющей случаи кинематической изменяемости // Строительная механика и конструкции. 2017. Т. 1. № 14. С. 27-30.
32. Кирсанов М.Н. Оценка прогиба и устойчивости пространственной балочной фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 5 (268). С. 19-22.
33. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование жесткости пространственной статически определимой фермы // Вестник МГСУ. 2017. Т. 12. № 2 (101). С. 165-171.
34. Кирсанов М.Н. Особенности аналитического расчета пространственных стержневых систем // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. № 5 (238). С. 11-15.
35. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой регулярной структуры с плоской гранью // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 2 (259). С. 2-6.
36. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба пространственного прямоугольного покрытия // Вестник МГСУ. 2018. Т. 13. № 5 (116). С. 579-586.
37. Зименков Н. А. Формула для прогиба фермы рамного типа под действием сосредоточенной нагрузки в середине пролета // Постулат. 2019. № 1. С. 2.
38. Белянкин Н.А., Бойко А.Ю. Формулы для прогиба балочной фермы с произвольным числом панелей при равномерном загрузении // Строительная механика и конструкции. 2019. №1(20). С. 21-29.