УДК 51-7

Исследование модели хищник-жертва с трофическими функциями

Осипов Геннадий Сергеевич
Сахалинский государственный университет
д.т.н., заведующий кафедрой информатики

Распутина Елена Ивановна
Государственный университет морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова
к.ф.-м.н., доцент кафедры математики

Аннотация
В статье излагается методология аналитического исследования неклассической модели хищник-жертва с трофическими функциями. Получены координаты невырожденной особой точки и произведена ее классификация, исследована устойчивость решения при малых отклонениях от особой точки. Выполнено имитационное моделирование системы в среде AnyLogic.
Ключевые слова: модели хищник-жертва, анализ устойчивости решения, имитационная модель

The study of predator-prey model with trophic functions

Osipov Gennadij Sergeevich
Sakhalin State University
Doctor of technical Sciences, Head of the Department of Computer Science

Rasputina Elena Ivanovna
Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping
Candidate of Physical and Mathematical Sciences. Associate Professor

Abstract
In article, the methodology of an analytical research of nonclassical model a predator-prey with trophic functions is explained. Coordinates of a nondegenerate special point are received and its classification is made, stability of the decision in case of small deviations from a special point is probed.
Simulation modeling of system in the environment of AnyLogic is executed.
Keywords predator-prey model, solution stability analysis, simulation model

Введение

В настоящее время классическая задача «хищник-жертва» [1] достаточно хорошо изучена и представлена многими публикациями (например, [2-4]).

Исследованию новых «неклассических» моделей посвящена, например, работа А.В. Норина и М.И. Лебедевой [5], в которой авторы анализируют систему с трофической функцией хищника и исследуют устойчивость решения системы дифференциальных уравнений с учетом запаздывания по времени.

Представленная работа посвящена исследованию модели с трофическими функциями, входящими как в уравнение, описывающее поведение хищника, так и жертвы. Практическая реализация модели выполнена в среде имитационного моделирования AnyLogic [6].

Аналитическое исследование

Рассмотрим модель хищник-жертва в следующей постановке:

$$\begin{cases} \dot{x} = k_x x - \dfrac{q_x xy}{1+ax} \\ \dot{y} = \dfrac{k_y yx}{1+ax} - q_y y \end{cases}, \tag{1}$$

где x, y – численность популяции жертв и хищников, соответственно;

k_x – коэффициент размножения жертвы (мальтузианский параметр);

k_y – коэффициент увеличения численности хищника за счет поедания жертвы;

q_x – коэффициент давления хищника;

q_y – коэффициент вымирания хищников;

a – коэффициент насыщения.

Найдем невырожденную особую точку, очевидно:

$$\begin{cases} k_x - \dfrac{q_x y}{1+ax} = 0 \\ \dfrac{k_y x}{1+ax} - q_y = 0 \end{cases}.$$

Отсюда координаты особой точки $O(x_0, y_0)$ будут следующими:

$$x_0 = \frac{q_y}{k_y - aq_y};\ y_0 = \frac{k_x(1+ax_0)}{q_x} = \frac{k_x k_y}{q_x(k_y - aq_y)}.$$

Очевидно $k_y - aq_y > 0; \dfrac{q_x y_0}{1+ax_0} = k_x; \dfrac{k_y x_0}{1+ax_0} = q_y$.

Разложим функцию $\dfrac{xy}{1+ax}$:

$$\frac{xy}{1+ax} = \frac{y}{a} - \frac{y}{a(1+ax)}.$$

Тогда система (1) представима в виде:

$$\begin{cases} \dot{x} = k_x x + \dfrac{q_x}{a}\dfrac{y}{1+ax} - \dfrac{q_x}{a} y \\ \dot{y} = \dfrac{k_y}{a} y - \dfrac{k_y}{a}\dfrac{y}{1+ax} - q_y y \end{cases}.$$

Исследуем устойчивость системы в особой точке $O(x_0, y_0)$.

Перейдем к переменным $x = \tilde{x} + x_0, y = \tilde{y} + y_0$

Разложим функцию $\dfrac{1}{1+ax}$ в ряд Тейлора в окрестности $(\cdot)x_0$ сохраняя линейные члены

$$\frac{1}{1+ax} = \frac{1}{1+ax_0} - \frac{a}{\left(1+ax_0\right)^2}\tilde{x}.$$

В этом случае получим

$$\dot{\tilde{x}} = \frac{ak_x q_y}{k_y}\tilde{x} - \frac{q_x q_y}{k_y}\tilde{y};$$

$$\dot{\tilde{y}} = \frac{k_y y_0}{\left(1+ax_0\right)^2}\tilde{x} = \frac{k_x k_y}{q_x\left(1+ax_0\right)}\tilde{x}.$$

Представив функцию $\dfrac{1}{\left(1+ax_0\right)^2} = \dfrac{1}{1+ax_0} - \dfrac{a}{\left(1+ax_0\right)^2}$, получим следующее выражение для $\dot{\tilde{y}}$:

$$\dot{\tilde{y}} = \frac{k_x}{q_x}\left(k_y - aq_y\right)\tilde{x}$$

Составим два эквивалентных характеристических уравнения: одно для определения собственных чисел, другое – для проверки условия, что собственные числа комплексно-сопряженные.

Система дифференциальных уравнений для определения собственных чисел будет иметь вид:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \dfrac{ak_x q_y}{k_y}\tilde{x} - \dfrac{q_x q_y}{k_y}\tilde{y} \\ \dot{\tilde{y}} = \dfrac{k_x k_y}{q_x\left(1+ax_0\right)}\tilde{x} \end{cases}. \tag{2}$$

Характеристическое уравнение системы:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{ak_x q_y}{k_y} - \lambda & -\dfrac{q_x q_y}{k_y} \\ \dfrac{k_x k_y}{q_x\left(1+ax_0\right)} & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Или $\lambda^2 - \frac{ak_x q_y}{k_y}\lambda + \frac{k_x q_y}{1+ax_0} = 0$.

Выделяя полный квадрат, получим:

$$\left(\lambda - \frac{ak_x q_y}{2k_y}\right)^2 = \frac{a^2 k_x^2 q_y^2}{4k_y^2} - \frac{k_x q_y}{1+ax_0}. \qquad (3)$$

Исследуем знак правой части характеристического уравнения (3).

Для этого составим систему, эквивалентную (2).

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \frac{ak_x q_y}{k_y}\tilde{x} - \frac{q_x q_y}{k_y}\tilde{y} \\ \dot{\tilde{y}} = \frac{k_x}{q_x}\left(k_y - aq_y\right)\tilde{x} \end{cases} \qquad (4)$$

Характеристическое уравнение системы:

$$\begin{vmatrix} \frac{ak_x q_y}{k_y} - \lambda & -\frac{q_x q_y}{k_y} \\ \frac{k_x}{q_x}\left(k_y - aq_y\right) & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Или $\lambda^2 - \frac{ak_x q_y}{k_y}\lambda + \frac{k_x q_y\left(k_y - aq_y\right)}{k_y} = 0$.

$$\left(\lambda - \frac{ak_x q_y}{2k_y}\right)^2 = \frac{a^2 k_x^2 q_y^2}{4k_y^2} - \frac{k_x q_y\left(k_y - aq_y\right)}{k_y}.$$

Правая часть полученного уравнения будет отрицательной при условии

$$0 < x_0 < \frac{4k_y}{a^2 k_x}$$

При выполнении данного условия собственные числа системы (2) и, соответственно (4), будут комплексно-сопряженные с положительной действительной частью.

$$\lambda_{1,2} = \frac{ak_x q_y}{2k_y} \pm \sqrt{\frac{k_x q_y}{1+ax_0} - \frac{a^2 k_x^2 q_y^2}{4k_y^2}}\,i.$$

Следовательно особая точка $O\left(x_0, y_0\right)$ является неустойчивым фокусом, а фазовые траектории – логарифмическими спиралями.

Практическая реализация

Для имитационного эксперимента используется аналитическая платформа AnyLogic, которая позволяет реализовывать все известные парадигмы имитационного моделирования. В данной задаче применялся системно-динамический подход.

Принципиальная схема модели представлена на рис. 1

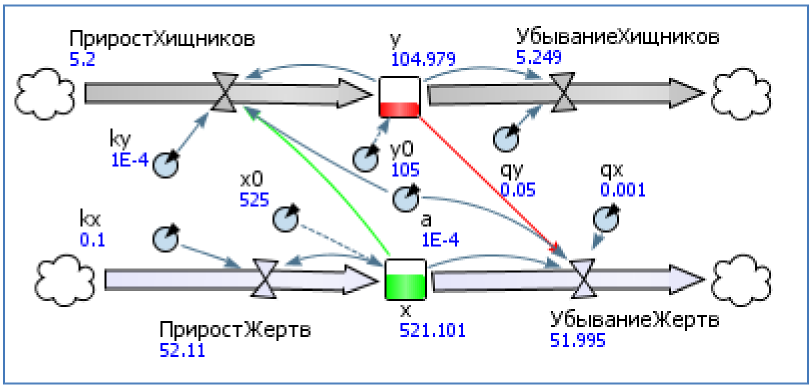

Рис. 1 Схема модели

На рис. 2 приведет типовой фазовый портрет моделируемой системы. В данном случае начальная точка $x(0)=525, y(0)=105$.

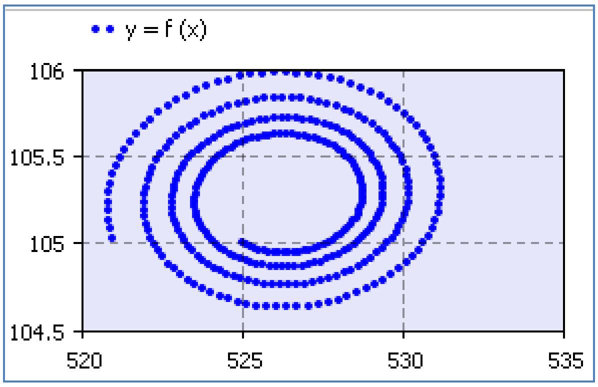

Рис. 2 Фазовая плоскость

Фазовая траектория – логарифмическая спираль, раскручивающаяся против часовой стрелки. Плотность популяций особей непрерывно увеличивается (см. рис. 3).

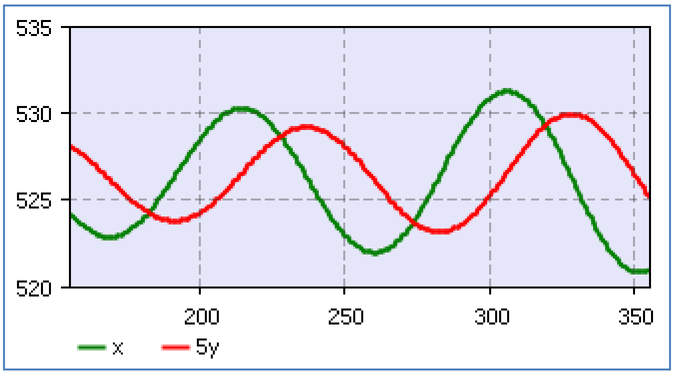

Рис. 3 Изменение плотности популяций во времени

Очевидно, особая точка $O(526{,}32;105{,}26)$ является неустойчивым фокусом $\left(x_0 < \dfrac{4k_y}{a^2 k_x}\right)$.

Выводы

Проведенное качественное (аналитическое) исследование модели хищник-жертва с трофическими функциями позволило получить результат, свидетельствующий о том, что исследуемая система имеет особую точку типа неустойчивый фокус, а фазовые траектории являются логарифмическими спиралями. Результаты имитационного эксперимента, выполненные в среде *AnyLogic*, подтверждают теоретические выводы.

Библиографический список

1. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. Москва-Ижевск: Институт компьютерных технологий, 2004. 288 с.
2. Колпак Е.П. Горыня Е.В., Селицкая Е.А. О моделях А. Д. Базыкина «хищник — жертва» // Молодой ученый. 2016. №2. С. 12-20.
3. Александров А.Ю., Платонов А.В. О предельной ограниченности и перманентности решений одного класса дискретных моделей динамики популяций с переключениями// Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2014. № 1. С. 5-16.
4. Базыкин А.Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. Москва-Ижевск: Институт компьютерных технологий, 2003. 368 с.
5. Лебедева М.И., Норин А.В. Неклассическая модель хищник-жертва // Математические структуры и моделирование. 2016. № 1(37). С. 30–35
6. Многоподходное имитационное моделирование. Системная динамика. [Электронный ресурс]. URL: http://www.anylogic.ru/system-dynamics (дата обращения: 02.02.2017).